
Stanford University Libraries

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

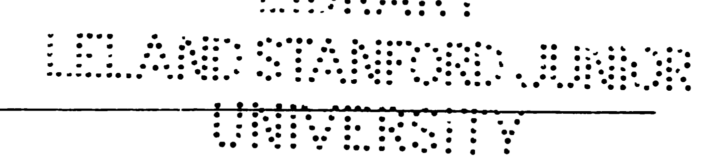
In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.



Sechs und vierzigster Band.

In vier Heften.

Mit sieben lithographirten Tafeln.

Berlin, 1853.

Bei Georg Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier),
Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs
des sechs und vierzigsten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

2. Geometrie.

3. Mechanik.

II. Angewandte Mathematik.

1.

Tafeln für die Zerlegung der Zahlen bis 4100 in Biquadrate.

(Von Herrn Professor Dr. *C. A Bretschneider* in Gotha.)

Die Aufforderung des Herrn Prof. *Jacobi*, die von *Waring* aufgestellte Vermuthung, dass alle Zahlen die Summe von 19 oder weniger Biquadraten sind, einer Prüfung zu unterwerfen, veranlasste mich, alle Zerfällungen der Zahlen bis 4100 in Biquadrate aufzusuchen.

Diese Zerfällungen wurden durch einen einfachen Mechanismus ausgeführt, der im Wesentlichen auf dem Umstande beruht, dass $1 = 3^4 - 5.2^4$ ist. Sollte daher von den Zerfällungen irgend einer Zahl zu denen der nächst folgenden Zahl fortgeschritten werden, so war nur nöthig, in den ersteren die Anzahl der 2^4 um fünf zu verringern und dafür die Anzahl der 3^4 um Eins zu vergrössern. Dabei war zu merken, dass jedenfalls statt 16.3^4 der ihm gleiche Werth 6^4 gesetzt werden musste. Waren dagegen in den zunächst vorangehenden Zerfällungen weniger als fünf Biquadrate von 2 vorhanden, wohl aber noch ein oder mehrere Biquadrate von 4, so musste eines der letzteren durch den gleich grossen Werth 16.2^4 ersetzt werden, damit die Subtraction ausführbar war. Bei dieser Art der Rechnungsanlage ergab sich eine ununterbrochene Controle der Rechnung dadurch, dass die Zerfällungen jedes Vielfachen von 16 genau *ein* Biquadrat von 2 mehr enthalten mussten, als die des nächst vorangehenden Vielfachen. Zu grösserer Sicherheit wurden jedoch die Biquadrate von 3, 5 und 7 nebst ihren Summen zu je zwei u. s. w. zum Voraus in das Rechnungs-Schema eingetragen, und es ergaben sich dadurch für grössere Theile der Arbeit neue, von den vorigen unabhängige Controlen. Am Schlusse der Rechnung wurde aus sämmtlichen Zerfällungen einer und derselben Zahl diejenige ausgehoben, welche die kleinste Anzahl von Biquadraten erforderte, und durch Subtraction des grössten in ihr enthaltenen Summanden wurden sie nochmals geprüft. Sämmtliche auf diese

Weise gefundenen Zerfällungen sind in der *ersten Tafel* zusammengestellt; und zwar so, dass rechts von der zu zerfällenden Zahl (welche in der mit N überschriebenen Spalte zu suchen ist,) diejenigen Coefficienten stehen, mit denen die senkrecht über ihnen angemerkten Biquadrate multiplicirt werden müssen. Demnach ist z. B.: $615 = 6.1^4+2^4+3^4+2.4^4 = 3.1^4+2.2^4+4.3^4+4^4 = 3.2^4+7.3^4$. Findet sich eine Zahl n in der Spalte N nicht, so hat man, um zu ihrer Zerfällung zu gelangen, die in der Spalte befindliche nächst-kleinere Zahl m zu suchen und zu dem Summen-Ausdrucke der letzteren noch die Grösse $(n-m).1^4$ zu addiren. So findet sich z. B. $654 = 6.1^4+8.3^4$.

In der *zweiten Tafel* sind sämmtliche Zahlen von 1 bis zu $4096 = 8^4$ gruppenweise so zusammengestellt, dass die kleinste Anzahl von Biquadraten, in welche eine Zahl möglicherweise zerfället werden kann, das ordnende Princip war. Dabei stellte sich die Richtigkeit des *Waring*'schen Satzes heraus. Nach einem vorläufigen Versuche, der sich freilich nur bis $4096 = 4^6$ erstreckte, beträgt die entsprechende Zahl für die 5ten und 6ten Potenzen beziehungsweise 37 und 73. Sollte das Gesetz, nach welchem die Zerlegungen in den bis jetzt untersuchten Fällen sich bilden, allgemeine Geltung haben, so würde man zur Auffindung der höchsten Potenzenzahl ϖ, welche nöthig ist, um *alle* Zahlen als eine Summe $p$ter Potenzen darzustellen, nichts weiter nöthig haben, als die Zahl a aus der Gleichung $3^p = a.2^p+b$ (wo $b<2^p$) zu suchen, und fände dann $\varpi = a+2^p-2$.

Gotha, den 9. October 1850.

Tafel 1.

N	$1^4,2^4,3^4,4^4,5^4$
16	(0,1)
32	(0,2)
48	(0,3)
64	(0,4)
80	(0,5)
81	(0,0,1)
96	(0,6)
97	(0,1,1)
112	(0,7)
113	(0,2,1)
128	(0,8)
129	(0,3,1)
144	(0,9)
145	(0,4,1)
160	(0,10)
161	(0,5,1)
162	(0,0,2)
176	(0,11)
177	(0,6,1)
178	(0,1,2)
192	(0,12)
193	0,7,1
194	0,2,2
208	0,13
209	0,8,1
210	0,3,2
224	0,14
225	0,9,1
226	0,4,2
240	0,15
241	0,10,1
242	0,5,2
243	0,0,3
256	0,0,0,1
259	3,0,0,1
	0,1,3
272	0,1,0,1
275	3,1,0,1
	0,2,3
288	0,2,0,1
291	3,2,0,1
	0,3,3

N	$1^4,2^4,3^4,4^4,5^4$
304	0,3,0,1
307	3,3,0,1
	0,4,3
320	0,4,0,1
323	3,4,0,1
	0,5,3
324	0,0,4
336	0,5,0,1
337	0,0,1,1
340	3,0,1,1
	0,1,4
352	0,6,0,1
353	0,1,1,1
356	3,1,1,1
	0,2,4
368	0,7,0,1
369	0,2,1,1
372	3,2,1,1
	0,3,4
384	0,8,0,1
385	0,3,1,1
388	3,3,1,1
	0,4,4
400	0,9,0,1
401	0,4,1,1
404	3,4,1,1
	0,5,4
405	0,0,5
416	0,10,0,1
417	0,5,1,1
418	0,0,2,1
421	3,0,2,1
	0,1,5
432	0,11,0,1
433	0,6,1,1
434	0,1,2,1
437	3,1,2,1
	0,2,5
448	0,12,0,1
449	0,7,1,1
450	0,2,2,1
453	3,2,2,1
	0,3,5

N	$1^4,2^4,3^4,4^4,5^4$
464	0,13,0,1
465	0,8,1,1
466	0,3,2,1
469	3,3,2,1
	0,4,5
480	0,14,0,1
481	0,9,1,1
482	0,4,2,1
485	3,4,2,1
	0,5,5
486	0,0,6
496	10,0,6
	0,15,0,1
497	0,10,1,1
498	0,5,2,1
499	0,0,3,1
502	3,0,3,1
	0,1,6
512	0,0,0,2
515	3,0,0,2
	0,1,3,1
518	6,0,0,2
	3,1,3,1
	0,2,6
528	0,1,0,2
531	3,1,0,2
	0,2,3,1
534	6,1,0,2
	3,2,3,1
	0,3,6
544	0,2,0,2
547	3,2,0,2
	0,3,3,1
550	6,2,0,2
	3,3,3,1
	0,4,6
560	0,3,0,2
563	3,3,0,2
	0,4,3,1
566	6,3,0,2
	3,4,3,1
	0,5,6
567	0,0,7
576	0,4,0,2

N	$1^4,2^4,3^4,4^4,5^4$
579	3,4,0,2
	0,5,3,1
580	0,0,4,1
583	3,0,4,1
	0,1,7
592	0,5,0,2
593	0,0,1,2
596	3,0,1,2
	0,1,4,1
599	6,0,1,2
	3,1,4,1
	0,2,7
608	0,6,0,2
609	0,1,1,2
612	3,1,1,2
	0,2,4,1
615	6,1,1,2
	3,2,4,1
	0,3,7
624	0,7,0,2
625	0,0,0,0,1
640	0,8,0,2
641	0,1,0,0,1
648	0,0,8
656	0,9,0,2
657	0,2,0,0,1
661	0,0,5,1
664	3,0,5,1
	0,1,8
672	0,10,0,2
673	0,3,0,0,1
674	0,0,2,2
677	3,0,2,2
	0,1,5,1
680	6,0,2,2
	3,1,5,1
	0,2,8
688	0 11,0,2
689	0,4,0,0,1
690	0,1,2,2
693	3,1,2,2
	0,2,5,1

N	$1^4,2^4,3^4,4^4,5^4$
696	6,1,2,2
	3,2,5,1
	0,3,8
704	0,12,0,2
705	0,5,0,0,1
706	0,0,1,0,1
720	0,13,0,2
721	0,6,0,0,1
722	0,1,1,0,1
729	0,0,9
736	7,0,9
	0,14,0,2
737	0,7,0,0,1
738	0,2,1,0,1
742	0,0,6,1
745	3,0,6,1
	0,1,9
752	7,1,9
	10,0,6,1
	0,15,0,2
753	0,8,0,0,1
754	0,3,1,0,1
755	0,0,3,2
758	3,0,3,2
	0,1,6,1
761	6,0,3,2
	3,1,6,1
	0,2,9
768	0,0,0,3
771	3,0,0,3
	0,1,3,2
774	6,0,0,3
	3,1,3,2
	0,2,6,1
777	9,0,0,3
	6,1,3,2
	3,2,6,1
	0,3,9
784	0,1,0,3
787	0,0,2,0,1
800	0,2,0,3
803	0,1,2,0,1
810	0,0,10
816	0,3,0,3

N	$1^4,2^4,3^4,4^4,5^4$
819	0,2,2,0,1
823	0,0,7,1
826	3,0,7,1
	0,1,10
832	0,4,0,3
835	0,3,2,0,1
836	0,0,4,2
839	3,0,4,2
	0,1,7,1
842	6,0,4,2
	3,1,7,1
	0,2,10
848	0,5,0,3
849	0,0,1,3
852	3,0,1,3
	0,1,4,2
855	6,0,1,3
	3,1,4,2
	0,2,7,1
858	9,0,1,3
	6,1,4,2
	3,2,7,1
	0,3,10
864	0,6,0,3
865	0,1,1,3
868	0,0,3,0,1
880	0,7,0,3
881	0,0,0,1,1
884	3,0,0,1,1
	0,1,3,0,1
891	0,0,11
896	0,8,0,3
897	0,1,0,1,1
900	3,1,0,1,1
	0,2,3,0,1
904	0,0,8,1
907	3,0,8,1
	0,1,11
912	0,9,0,3
913	0,2,0,1,1
916	3,2,0,1,1
	0,3,3,0,1

N	$1^4,2^4,3^4,4^4,5^4$
917	0,0,5,2
920	3,0,5,2
	0,1,8,1
923	6,0,5,2
	3,1,8,1
	0,2,11
928	0,10,0,3
929	0,3,0,1,1
930	0,0,2,3
933	3,0,2,3
	0,1,5,2
936	6,0,2,3
	3,1,5,2
	0,2,8,1
939	9,0,2,3
	6,1,5,2
	3,2,8,1
	0,3,11
944	0,11,0,3
945	0,4,0,1,1
946	0,1,2,3
949	0,0,4,0,1
960	0,12,0,3
961	0,5,0,1,1
962	0,0,1,1,1
965	3,0,1,1,1
	0,1,4,0,1
972	0,0,12
976	4,0,12
	0,13,0,3
977	0,6,0,11
978	0,1,1,1,1
981	3,1,1,1,1
	0,2,4,0,1
985	0,0,9,1
988	3,0,9,1
	0,1,12
992	7,0,9,1
	4,1,12
	0,14,0,3
993	0,7,0,1,1

N	$1^4,2^4,3^4,4^4,5^4$
994	0,2,1,1, 1
997	3,2,1,1 ,1
	0,3,4,0 ,1
998	0,0,6,2
1001	3,0,6,2
	0,1,9,1
1004	6,0,6,2
	3,1,9,1
	0,2,12
1008	10,0,6,2
	7,1,9,1
	4,2,12
	0,15,0,3
1009	0,8,0,1,1
1010	0,3,1,1,1
1011	0,0,3,3
1014	3,0,3,3
	0,1,6,2
1017	6,0,3,3
	3,1,6,2
	0,2,9,1
1020	9,0,3,3
	6,1,6,2
	3,2,9,1
	0,3,12
1024	0,0,0,4
1027	3,0,0,4
	0,1,3,3
1030	0,0,5,0,1
1040	0,1,0,4
1043	0,0,2,1,1
1046	3,0,2,1,1
	0,1,5,0,1
1053	0,0,13
1056	0,2,0,4
1059	0,1,2,1,1
1062	3,1,2,1,1
	0,2,5,0,1
1066	0,0,10,1
1069	3,0,10,1
	0,1,13
1072	0,3,0,4
1075	0,2,2,1,1

N	$1^4,2^4,3^4,4^4,5^4$
1078	3,2,2,1,1
	0,3,5,0,1
1079	0,0,7,2
1082	3,0,7,2
	0,1,10,1
1085	6,0,7,2
	3,1,10,1
	0,2,13
1088	0,4,0,4
1091	0,3,2,1,1
1092	0,0,4,3
1095	3,0,4,3
	0,1,7,2
1098	6,0,4,3
	3,1,7,2
	0,2,10,1
1101	9,0,4,3
	6,1,7,2
	3,2,10,1
	0,3,13
1104	0,5,0,4
1105	0,0,1,4
1108	3,0,1,4
	0,1,4,3
1111	0,0,6,0,1
1120	0,6,0,4
1121	0,1,1,4
1124	0,0,3,1,1
1127	3,0,3,1,1
	0,1,6,0,1
1134	0,0,1
1136	0,7,0,4
1137	0,0,0,2,1
1140	3,0,0,2,1
	0,1,3,1,1
1143	6,0,0,2,1
	3,1,3,1,1
	0,2,6,0,1
1147	0,0,11,1
1150	3,0,11,1
	0,1,14
1152	0,8,0,4

N	$1^4,2^4,3^4,4^4,5^4$
1153	0,1,0,2,1
1156	3,1,0,2,1
	0,2,3,1,1
1159	6,1,0,2,1
	3,2,3,1,1
	0,3,6,0,1
1160	0,0,8,2
1163	3,0,8,2
	0,1,11,1
1166	6,0,8,2
	3,1,11,1
	0,2,14
1168	0,9,0,4
1169	0,2,0,2,1
1172	3,2,0,2,1
	0,3,3,1,1
1173	0,0,5,3
1176	3,0,5,3
	0,1,8,2
1179	6,0,5,3
	3,1,8,2
	0,2,11,1
1182	9,0,5,3
	6,1,8,2
	3,2,11,1
	0,3,14
1184	0,10,0,4
1185	0,3,0,2,1
1186	0,0,2,4
1189	3,0,2,4
	0,1,5,3
1192	0,0,7,0,1
1200	0,11,0,4
1201	0,4,0,2,1
1202	0,1,2,4
1205	0,0,4,1,1
1208	3,0,4,1,1
	0,1,7,0,1
1215	0,0,15
1216	1,0,15
	0,12,0,4
1217	0,5,0,2,1

N	$(1,2,3,4,5,6)^4$
1218	0,0,1,2,1
1221	3,0,1,2,1
	0,1,4,1,1
1224	6,0,1,2,1
	3,1,4,1,1
	0,2,7,0,1
1228	0,0,12,1
1231	3,0,12,1
	0,1,15
1232	4,0,12,1
	1,1,15
	0,13,0,4
1233	0,6,0,2,1
1234	0,1,1,2,1
1237	3,1,1,2,1
	0,2,4,1,1
1240	6,1,1,2,1
	3,2,4,1,1
	0,3,7,0,1
1241	0,0,9,2
1244	3,0,9,2
	0,1,12,1
1247	6,0,9,2
	3,1,12,1
	0,2,15
1248	7,0,9,2
	4,1,12,1
	1,2,15
	0,14,0,4
1249	0,7,0,2,1
1250	0,0,0,0,2
1265	0,8,0,2,1
1266	0,1,0,0,2
1273	0,0,8,0,1
1280	0,0,0,5
1282	0,2,0,0,2
1286	0,0,5,1,1
1289	3,0,5,5,1
	0,1,8,0,1
1296	0,0,0,0,0,1
1309	13,0,0,0,0,1
	0,0,13,1
1312	0,1,0,0,0,1
1322	10,1,0,0,0,1
	0,0,10,2
1325	13,1,0,0,0,1
	3,0,10,2
	0,1,13,1
1328	0,2,0,0,0,1
1331	0,0,1,0,2
1344	0,3,0,0,0,1
1347	0,1,1,0,2
1354	0,0,9,0,1
1360	0,4,0,0,0,1
1361	1,4,0,0,0,1
	0,0,1,5
1363	0,2,1,0,2
1367	0,0,6,1,1
1370	3,0,6,1,1
	0,1,9,0,1
1376	0,5,0,0,0,1
1377	0,0,1,0,0,1
1390	13,0,1,0,0,1
	0,0,14,1
1392	0,6,0,0,0,1
1393	0,1,1,0,0,1
1403	10,1,1,0,0,1
	0,0,11,2
1406	13,1,1,0,0,1
	3,0,11,2
	0,1,14,1
1408	0,7,0,0,0,1
1409	0,2,1,0,0,1
1412	0,0,2,0,2
1424	0,8,0,0,0,1
1425	0,3,1,0,0,1
1428	0,1,2,0,2
1435	0,0,10,0,1
1440	0,9,0,0,0,1
1441	0,4,1,0,0,1
1442	1,4,1,0,0,1
	0,0,2,5
1444	0,2,2,0,2
1448	0,0,7,1,1
1451	3,0,7,1,1
	0,1,10,0,1
1456	0,10,0,0,0,1
1457	0,5,1,0,0,1
1458	0,0,2,0,0,1
1471	13,0,2,0,0,1
	0,0,15,1
1472	0,11,0,0,0,1
1473	0,6,1,0,0,1
1474	0,1,2,0,0,1
1484	10,1,2,0,0,1
	0,0,12,2
1487	13,1,2,0,0,1
	3,0,12,2
	0,1,15,1
1488	0,12,0,0,0,1
1489	0,7,1,0,0,1
1490	0,2,2,0,0,1
1493	0,0,3,0,2
1504	0,13,0,0,0,1
1505	0,8,1,0,0,1
1506	0,0,0,1,2
1509	3,0,0,1,2
	0,1,3,0,2
1516	0,0,11,0,1
1520	0,14,0,0,0,1
1521	0,9,1,0,0,1
1522	0,1,0,1,2
1525	3,1,0,1,2
	0,2,3,0,2
1529	0,0,8,1,1
1532	3,0,8,1,1
	0,1,11,0,1
1536	0,0,0,6
1538	0,2,0,1,2
1539	0,0,3,0,0,1
1552	0,0,0,1,0,1
1555	3,0,0,1,0,1
	0,1,3,0,0,1
1565	13,0,0,1,0,1
	10,1,3,0,0,1
	0,0,13,2
1568	0,1,0,1,0,1
1571	3,1,0,1,0,1
	0,2,3,0,0,1
1574	0,0,4,0,2
1584	0,2,0,1,0,1
1587	0,0,1,1,2
1590	0,1,4,0,2
	3,0,1,1,2
1597	0,0,12,0,1
1600	0,3,0,1,0,1
1603	0,1,1,1,2
1606	3,1,1,1,2
	0,2,4,0,2
1610	0,0,9,11
1613	3,0,9,1,1
	0,1,12,0,1
1616	0,4,0,1,0,1
1617	1,4,0,1,0,1
	0,0,1,6
1619	0,2,1,1,2
1620	0,0,4,0,0,1
1632	0,5,0,1,0,1
1633	0,0,1,1,0,1
1636	3,0,1,1,0,1
	0,1,4,0,0,1
1646	13,0,1,1,0,1
	10,1,4,0,0,1
	0,0,14,2
1648	0,6,0,1,0,1
1649	0,1,1,1,0,1
1652	3,1,1,1,0,1
	0,2,4,0,0,1
1655	0,0,5,0,2
1664	0,7,0,1,0,1
1665	0,2,1,1,0,1
1668	0,0,2,1,2
1671	3,0,2,1,2
	0,1,5,0,2
1678	0,0,13,0,1
1680	0,8,0,1,0,1
1681	0,3,1,1,0,1
1684	0,1,2,1,2
1687	3,1,2,1,2
	0,2,5,0,2
1691	0,0,10,1,1
1694	3,0,10,1,1
	0,1,13,0,1
1696	0,9,0,1,0,1
1697	0,4,1,1,0,1
1698	1,4,1,1,0,1
	0,0,2,6
1700	0,2,2,1,2
1701	0,0,5,0,0,1
1712	0,10,0,1,0,1
1713	0,5,1,1,0,1
1714	0,0,2,1,0,1
1717	3,0,2,1,0,1
	0,1,5,0,0,1
1727	13,0,2,1,0,1
	10,1,5,0,0,1
	0,0,15,2
1728	0,11,0,1,0,1
1729	0,6,1,1,0,1
1730	0,1,2,1,0,1
1733	3,1,2,1,0,1
	0,2,5,0,0,1
1736	0,0,6,0,2
1744	0,12,0,1,0,1
1745	0,7,1,1,0,1
1746	0,2,2,1,0,1
1749	0,0,3,1,2
1752	3,0,3,1,2
	0,1,6,0,2
1759	0,0,14,0,1
1760	0,13,0,1,0,1
1761	0,8,1,1,0,1
1762	0,0,0,2,2

N	$(1,2,3,4,5,6)^4$	N	$(1,2,3,4,5,6)^4$	N	$(1,2,3,4,5,6)^4$	N	$(1,2,3,4,5,6)^4$	N	$(1,2,3,4,5,6)^4$
1765	3,0,0,2,2	**1862**	3,1,1,2,2	**2002**	0,0,1,0,1,1	**2150**	3,1,0,1,3	**2261**	3,0,1,1,1,1
	0,1,3,1,2		0,2,4,1,2	**2015**	13,0,1,0,1,1		0,2,3,0,3		0,1,4,0,1,1
1768	6,0,0,2,2	**1863**	0,0,7,0,0,1		0,0,14,1,1	**2154**	0,0,8,1,2	**2268**	0,0,12,0,0,1
	3,1,3,1,2	**1872**	0,4,0,2,0,1	**2016**	0,13,0,2,0,1	**2157**	3,0,8,1,2	**2272**	4,0,12,0,0,1
	0,2,6,0,2	**1873**	1,4,0,2,0,1	**2017**	0,6,0,0,1,1		0,1,11,0,2		0,13,0,3,0,1
1772	0,0,11,1,1		0,0,1,7	**2018**	0,1,1,0,1,1	**2160**	0.6,0,3,0,1	**2273**	0,6,0,1,1,1
1775	3,0,11,1,1	**1875**	0,0,0,0,3	**2025**	0,0,9,0,0,1	**2161**	0,1,1,3,0,1	**2274**	0,1,1,1,1,1
	0,1,14,0,1	**1888**	0,5,0,2,0,1	**2032**	7,0,9,0,0,1	**2163**	0,2,0,1,3	**2277**	3,1,1,1,1,1
1776	0,14,0,1,0,1	**1889**	0,0,1,2,0,1		0,14,0,2,0,1	**2164**	0,0,3,0,1,1		0,2,4,0,1,1
1777	0,9,1,1.0,1	**1891**	0,1,0,0,3	**2033**	0,7,0,0,1,1	**2176**	0,7,0,3,0,1	**2280**	0,0,5,0,3
1778	0,1,0,2,2	**1898**	0,0,8,0,2	**2034**	0,2,1,0,1,1	**2177**	0,0,0,1,1,1	**2289**	0,7,0,1,1,1
1781	3,1,0,2,2	**1904**	0,6,0,2,0,1	**2037**	0,0,2,0,3	**2180**	3,0,0,1,1,1	**2290**	0,2,1,1,1,1
	0,2,3,1,2	**1905**	0,1,1,2,0,1	**2048**	0,0,0,8		0,1,3,0,1,1	**2293**	0,0,2,1,3
1782	0,0,6,0,0,1	**1907**	0,2,0,0,3	**2050**	0,3,1,0,1,1	**2187**	0,0,11,0,0,1	**2296**	0,1,5,0,3
1792	0,0,0,7	**1911**	0,0,5,1,2	**2051**	0,0,3,2,0,1	**2192**	0,8,0,3,0,1		3,0,2,1,3
1794	0,2,0,2,2	**1914**	3,0,5,1,2	**2053**	0,1,2,0,3	**2193**	0,1,0,1,1,1	**2303**	0,0,13,0,2
1795	0,0,3,1,0,1		0,1,8,0,2	**2060**	0,0,10,0,2	**2196**	3,1,0,1,1,1	**2304**	0,0,0,9
1798	3,0,3,1,0,1	**1920**	0,7,0,2,0,1	**2064**	0,0,0,3,0,1		0,2,3,0,1,1	**2306**	0,3,1,1,1,1
	0,1,6,0,0,1	**1921**	0,0,0,0,1,1	**2067**	3,0,0,3,0,1	**2199**	0,0,4,0,3	**2307**	0,0,3,3,0,1
1808	0,0,0,2,0,1	**1934**	13,0,0,0,1,1		0,1,3,2,0	**2208**	0,9,0,3,0,1	**2309**	0,1,2,1,3
1811	3,0,0,2,0,1		0,0,13,1,1	**2069**	0,2,2,0,3	**2209**	0,2,0,1,1,1	**2312**	3,1,2,1,3
	0,1,3,1,0,1	**1936**	0,8,0,2,0,1	**2073**	0,0,7,1,2	**2212**	0,0,1,1,3		0,2,5,0,3
1814	6,0,0,2,0,1	**1937**	0,1,0,0,1,1	**2076**	3,0,7,1,2	**2215**	3,0,1,1,3	**2316**	0,0,10,1,2
	3,1,3,1,0,1	**1944**	0,0,8,0,0,1		0,1,10,0,2		0,1,4,0,3	**2319**	3,0,10,1,2
	0,2,6,0,0,1	**1952**	0,9,0,2,0,1	**2080**	0,1,0,3,0,1	**2222**	0,0,12,0,2		0,1,13,0,2
1817	0,0,7,0,2	**1953**	0,2,0,0,1,1	**2083**	0,0,2,0,1,1	**2224**	0,10,0,3,0,1	**2320**	0,0,0,4,0,1
1824	0,1,0,2,0,1	**1956**	0,0,1,0,3	**2096**	0,2,0,3,0,1	**2225**	0,3,0,1,1,1	**2325**	0,2,2,1,3
1827	3,1,0,2,0.1	**1968**	0,10,0,2,0,1	**2099**	0,1,2,0,1,1	**2226**	0,0,2,3,0,1	**2326**	0,0,5,0,1,1
	0,2,3,1,0,1	**1969**	0,3,0,0,1,1	**2106**	0,0,10,0,0,1	**2228**	0,1,1,1,3	**2336**	0,1,0,4,0,1
1830	0,0,4,1,2	**1970**	0,0,2,2,0,1	**2112**	0,3,0,3,0,1	**2231**	3,1,1,1,3	**2339**	0,0,2,1,1,1
1833	3,0,4,1,2	**1972**	0,1,1,0,3	**2115**	0,2,2,0,1,1		0,2,4,0,3	**2342**	3,0,2,1,1,1
	0,1,7,0,2	**1979**	0,0,9,0,2	**2118**	0,0,3,0,3	**2235**	0,0,9,1,2		0,1,5,0,1,1
1840	0,2,0,2,0,1	**1984**	0,11,0,2,0,1	**2128**	0,4,0,3,0,1	**2238**	3,0,9,1,2	**2349**	0,0,13,0,0,1
1843	0,0,1,2,2	**1985**	0,4,0,0,1,1	**2129**	1,4,0,3,0,1		0,1,12,0,2	**2352**	0,2,0,4,0,1
1846	3,0,1,2,2	**1986**	0,1,2,2,0,1		0,0,1,8	**2240**	0,11,0,3,0,1	**2355**	0,1,2,1,1,1
	0,1,4,1,2	**1988**	0,2,1,0,3	**2131**	0,0,0,1,3	**2241**	0,4,0,1,1,1	**2358**	3,1,2,1,1,1
1849	6,0,1,2,2	**1992**	0,0,6,1,2	**2134**	3,0,0,1,3	**2242**	0,1,2,3,0,1		0,2,5,0,1,1
	3,1,4,1,2	**1995**	3,0,6,1,2		0,1,3,0,3	**2244**	0,2,1,1,3	**2361**	0,0,6,0,3
	0,2,7,0,2		0,1,9,0,2	**2141**	0,0,11,0,2	**2245**	0,0,4,0,1,1	**2368**	0,3,0,4,0,1
1853	0,0,12,1,1	**2000**	0,12,0,2,0,1	**2144**	0,5,0,3,0,1	**2256**	0,12,0,3,0,1	**2371**	0,2,2,1,1,1
1856	0,3,0,2,0,1	**2001**	0,5,0,0,1,1	**2145**	0,0,1,3,0,1	**2257**	0,5,0,1,1,1	**2374**	0,0,3,1,3
1859	0,1,1,2,2			**2147**	0,1,0,1,3	**2258**	0,0,1,1,1,1	**2377**	3,0,3,1,3
									0,1,6,0,3

N	(1,2,3,4,5,6,7)⁴
2384	0,4,0,49,1
2385	1,4,0,4,0,1
	0,0,1,9
2387	0,0,0,2,3
2390	3,0,0,2,3
	0,1,3,1,3
2393	6,0,0,2,3
	3,1,3,1,3
	0,2,6,0,3
2397	0,0,11,1,2
2400	0,5,0,4,0,1
2401	0,0,0,0,0,0,1
2416	0,6,0,4,0,1
2417	0,1,0,0,0,0,1
2430	13,1,0,0,0,0,1
	0,0,14,0,0,1
2432	0,7,0,4,0,1
2433	0,2,0,0,0,0,1
2442	0,0,7,0,3
2448	0,8,0,4,0,1
2449	0,3,0,0,0,0,1
2455	0,0,4,1,3
2458	3,0,4,1,3
	0,1,7,0,3
2464	0,9,0,4,0,1
2465	0,4,0,0,0,0,1
2468	0,0,1,2,3
2471	3,0,1,2,3
	0,1,4,1,3
2474	6,0,1,2,3
	3,1,4,1,3
	0,2,7,0,3
2478	0,0,12,1,2
2480	0,10,0,4,0,1
2481	0,5,0,0,0,0,1
2482	0,0,1,0,0,0,1
2496	14,0,1,0,0,0,1
	0,11,0,4,0,1
2497	0,6,0,0,0,0,1
2498	0,1,1,0,0,0,1

N	(1,2,3,4,5,6,7)⁴
2500	0,0,0,0,4
2513	0,7,0,0,0,0,1
2514	0,2,1,0,0,0,1
2516	0,1,0,0,0,4
2523	0,0,8,0,3
2529	0,8,0,0,0,0,1
2530	0,3,1,0,0,0,1
2532	0,2,0,0,0,4
2536	0,0,5,1,3
2539	3,0,5,1,3
	0,1,8,0,3
2545	0,9,0,0,0,0,1
2546	0,0,0,0,2,1
2559	13,0,0,0,2,1
	0,0,13,1,2
2560	0,0,0,10
2561	1,0,0,10
	0,10,0,0,0,0,1
2562	0,1,0,0,2,1
2563	0,0,2,0,0,0,1
2576	0,0,0,5,0,1
2578	0,2,0,0,2,1
2579	0,1,2,0,0,0,1
2581	0,0,1,0,4
2592	0,0,0,0,0,2
2595	3,0,0,0,0,2
	0,2,2,0,0,0,1
2597	0,1,1,0,4
2604	0,0,9,0,3
2608	0,1,0,0,0,2
2611	3,1,0,0,0,2
	0,3,2,0,0,0,1
2613	0,2,1,0,4
2617	0,0,6,1,3
2620	3,0,6,1,3
	0,1,9,0,3
2624	0,2,0,0,0,2
2627	0,0,1,0,2,1
2640	0,3,0,0,0,2
2643	0,1,1,0,2,1
2644	0,0,3,0,0,0,1

N	(1,2,3,4,5,6,7)⁴
2656	0,4,0,0,0,2
2657	0,0,0,1,0,0,1
2660	3,0,0,1,0,0,1
	0,1,3,0,0,0,1
2662	0,0,2,0,4
2672	0,5,0,0,0,2
2673	0,0,1,0,0,2
	0,1,0,1,0,0,1
2676	3,0,1,0,0,2
	3,1,0,1,0,0,1
	0,2,3,0,0,0,1
2678	0,1,2,0,4
2685	0,0,10,0,3
2688	0,6,0,0,0,2
2689	0,1,1,0,0,2
	0,2,0,1,0,0,1
2692	3,1,1,0,0,2
	3,2,0,1,0,0,1
	0,3,3,0,0,0,1
2694	0,2,2,0,4
2698	0,0,7,1,3
2701	3,0,7,1,3
	0,1,10,0,3
2704	0,7,0,0,0,2
2705	0,2,1,0,0,2
	0,3,0,1,0,0,1
2708	0,0,2,0,2,1
2720	0,8,0,0,0,2
2721	0,3,1,0,0,2
	0,4,0,1,0,0,1
2724	0,1,2,0,2,1
2725	0,0,4,0,0,0,1
2736	0,9,0,0,0,2
2737	0,4,1,0,0,2
	0,5,0,1,0,0,1
2738	0,0,1,1,0,0,1
2741	3,0,1,1,0,0,1
	0,1,4,0,0,0,1
2743	0,0,3,0,4
2752	0,10,0,0,0,2
2753	0,5,1,0,0,2
	0,6,0,1,0,0,1

N	(1,2,3,4,5,6,7)⁴
2754	0,0,2,0,0,2
	0,1,1,1,0,0,1
2756	0,0,0,1,4
2759	3,0,0,1,4
	0,1,3,0,4
2766	0,0,11,0,3
2768	0,11,0,0,0,2
2769	0,6,1,0,0,2
	0,7,0,1,0,0,1
2770	0,1,2,0,0,2
	0,2,1,1,0,0,1
2772	0,1,0,1,4
2775	3,1,0,1,4
	0,2,3,0,4
2779	0,0,8,1,3
2782	3,0,8,1,3
	0,1,11,0,3
2784	0,12,0,0,0,2
2785	0,7,1,0,0,2
	0,8,0,1,0,0,1
2786	0,2,2,0,0,2
	0,3,1,1,0,0,1
2788	0,2,0,1,4
2789	0,0,3,0,2,1
2800	0,13,0,0,0,2
2801	0,8,1,0,0,2
	0,9,0,1,0,0,1
2802	0,0,0,1,2,1
2805	3,0,0,1,2,1
	0,1,3,0,2,1
2806	0,0,5,0,0,0,1
2816	0,0,0,11
2817	1,0,0,11
	0,9,1,0,0,2
	0,10,0,1,0,0,1
2818	0,1,0,1,2,1
2819	0,0,2,1,0,0,1
2822	3,0,2,1,0,0,1
	0,1,5,0,0,0,1
2824	0,0,4,0,4
2832	0,0,0,6,0,1
2834	0,2,0,1,2,1

N	$(1,2,3,4,5,6,7)^4$
2835	0,0,3,0,0,2
	0,1,2,1,0,0,1
2837	0,0,1,1,4
2840	3,0,1,1,4
	0,1,4,0,4
2847	0,0,12,0,3
2848	0,0,0,1,0,2
2851	3,0,0,1,0,2
	0,1,3,0,0,2
	0,2,2,1,0,0,1
2853	0,1,1,1,4
2856	3,1,1,1,4
	0,2,4,0,4
2860	0,0,9,1,3
2863	3,0,9,1,3
	0,1,12,0,3
2864	0,1,0,1,0,2
2867	0,2,3,0,0,2
	3,1,0,1,0,2
	0,3,2,1,0,0,1
2869	0,2,1,1,4
2870	0,0,4,0,2,1
2880	0,2,0,1,0,2
2883	0,0,1,1,2,1
2886	3,0,1,1,2,1
	0,1,4,0,2,1
2887	0,0,6,0,0,0,1
2896	0,3,0,1,0,2
2899	0,1,1,1,2,1
2900	0,0,3,1,0,0,1
2903	3,0,3,1,0,0,1
	0,1,6,0,0,0,1
2905	0,0,5,0,4
2912	0,4,0,1,0,2
2913	0,0,0,2,0,0,1
2916	3,0,0,2,0,0,1
	0,1,3,1,0,0,1
	0,0,4,0,0,2
2918	0,0,2,1,4
2921	3,0,2,1,4
	0,1,5,0,4
2928	0,5,0,1,0,2
2929	0,0,1,1,0,2
	0,1,0,2,0,0,1
2932	3,0,1,1,0,2
	0,1,4,0,0,2
	3,1,0,2,0,0,1
	0,2,3,1,0,0,1
2934	0,1,2,1,4
2937	3,1,2,1,4
	0,2,5,0,4
2941	0,0,10,1,3
2944	0,6,0,1,0,2
2945	0,1,1,1,0,2
	0,2,0,2,0,0,1
2948	3,1,1,1,0,2
	0,2,4,0,0,2
	3,2,0,2,0,0,1
	0,3,3,1,0,0,1
2950	0,2,2,1,4
2951	0,0,5,0,2,1
2960	0,7,0,1,0,2
2961	0,2,1,1,0,2
	0,3,0,2,0,0,1
2964	0,0,2,1,2,1
2967	3,0,2,1,2,1
	0,1,5,0,2,1
2968	0,0,7,0,0,0,1
2976	0,8,0,1,0,2
2977	0,3,1,1,0,2
	0,4,0,2,0,0,1
2980	0,1,2,1,2,1
2981	0,0,4,1,0,0,1
3984	3,0,4,1,0,0,1
	0,1,7,0,0,0,1
2986	0,0,6,0,4
2992	0,9,0,1,0,2
2993	0,4,1,1,0,2
	0,5,0,2,0,0,1
2994	0,0,1,2,0,0,1
2997	3,0,1,2,0,0,1
	0,1,4,1,0,0,1
	0,0,5,0,0,2
2999	0,0,3,1,4
3002	3,0,3,1,4
	0,1,6,0,4
3008	0,10,0,1,0,2
3009	(0,5,1,1,0,2)
	(0,6,0,2,0,0,1)
3010	(0,0,2,1,0,2)
	(0,1,1,2,0,0,1)
3012	0,0,0,2,4
3015	3,0,0,2,4
	0,1,3,1,4
3018	6,0,0,2,4
	3,1,3,1,4
	0,2,6,0,4
3022	0,0,11,1,3
3024	0,11,0,1,0,2
3025	0,6,1,1,0,1
	0,7,0,2,0,0,1
3026	0,0,0,0,1,0,1
3040	0,12,0,1,0,2
3041	0,7,1,1,0,2
	0,8,0,2,0,0,1
3042	0,1,0,0,1,0,1
3049	0,0,8,0,0,0,1
3056	7,0,8,0,0,0,1
	0,13,0,1,0,2
3057	0,8,1,1,0,2
	0,9,0,2,0,0,1
3058	0,2,0,0,1,0,1
3062	0,0,5,1,0,0,1
3065	3,0,5,1,0,0,1
	0,1,8,0,0,0,1
3067	0,0,7,0,4
3072	0,0,0,12
3073	1,0,0,12
	0,9,1,1,0,2
	0,10,0,2,0,0,1
3074	0,3,0,0,1,0,1
3075	0,0,2,2,0,0,1
3078	3,0,2,2,0,0,1
	0,0,6,0,0,2
	0,1,5,1,0,0,1
3080	0,0,4,1,4
3083	3,0,4,1,4
	0,1,7,0,4
3088	0,0,0,7,0,1
3090	0,4,0,0,1,0,1
3091	0,1,2,2,0,0,1
	0,0,3,1,0,2
3093	0,0,1,2,4
3096	3,0,1,2,4
	0,1,4,1,4
3099	6,0,1,2,4
	3,1,4,1,4
	0,2,7,0,4
3103	0,0,12,1,3
3104	0,0,0,2,0,2
3107	0,0,1,0,1,0,1
3120	0,1,0,2,0,2
3123	0,1,1,0,1,0,1
3125	0,0,0,0,5
3130	5,0,0,0,5
	0,0,9,0,0,0,1
3136	0,2,0,2,0,2
3139	0,2,1,0,1,0,1
3141	0,1,0,0,5
3143	2,1,0,0,5
	0,0,6,1,0,0,1
3146	5,1,0,0,5
	3,0,6,1,0,0,1
	0,1,9,0,0,0,1
3148	0,0,8,0,4
3152	0,3,0,2,0,2
3155	0,3,1,0,1,0,1
3156	0,0,3,2,0,0,1
3157	1,0,3,2,0,0,1
	0,2,0,0,5
3159	3,0,3,2,0,0,1
	2,2,0,0,5
	0,1,6,1,0,0,1
	0,0,7,0,0,2
3161	0,0,5,1,4



N	$(1,2,3,4,5,6,7)^4$
3164	3,0,5,1,4
	0,1,8,0,4
3168	0,4,0,2,0,2
3169	0,0,0,3,0,0,1
3171	0,0,0,0,3,1
3184	0,5,0,2,0,2
3185	0,0,1,2,0,2
	0,1,0,3,0,0,1
3187	0,1,0,0,3,1
3188	0,0,2,0,1,0,1
3200	0,6,0,2,0,2
3201	0,1,1,2,0,2
	0,2,0,3,0,0,1
3203	0,2,0,0,3,1
3204	0,1,2,0,1,0,1
3206	0,0,1,0,5
3211	5,0,1,0,5
	0,0,10,0,0,0,1
3216	0,7,0,2,0,2
3217	0,0,0,0,1,2
3220	3,0,0,0,1,2
	0,2,2,0,1,0,1
3222	0,1,1,0,5
3224	2,1,1,0,5
	0,0,7,1,0,0,1
3227	5,1,1,0,5
	3,0,7,1,0,0,1
	0,1,10,0,0,0,1
3229	0,0,9,0,4
3232	0,8,0,2,0,2
3233	0,1,0,0,1,2
3236	3,1,0,0,1,2
	0,3,2,0,1,0,1
3237	0,0,4,2,0,0,1
3238	1,0,4,2,0,0,1
	0,2,1,0,5
3240	3,0,4,2,0,0,1
	2,2,1,0,5
	0,0,8,0,0,2
	0,1,7,1,0,0,1
3242	0.0.6,1,4
3245	3,0.6,1,4
	0,1,9,0,4
3248	0.9,0,2,0,2
3249	0,2,0,0,1,2
3250	0,0,1,3,0,0,1
3252	0,0,1,0,3,1
3264	0,10,0,2,0,2
3265	0,3,0,0,1,2
3266	0,1,1,3,0,0,1
	0,0,2,2,0,2
3268	0,1,1,0,3,1
3269	0,0,3,0,1,0,1
3280	0,11,0,2,0,2
3281	0,4,0,0,1,2
3282	0,0,0,1,1,0,1
3285	3,0,0,1,1,0,1
	0,1,3,0,1,0,1
3287	0,0,2,0,5
3292	5,0,2,0,5
	0,0,11,0,0,0,1
3296	9,0,2,0,5
	4,0,11,0,0,0,1
	0,12,0,2,0,2
3297	0,5,0,0,1,2
3298	0,0,1,0,1,2
	0,1,0,1,1,0,1
3301	3,0,1,0,1,2
	3,1,0,1,1,0,1
	0,2,3,0,1,0,1
3303	0,1,2,0,5
3305	2,1,2,0,5
	0,0,8,1,0,0,1
3308	5,1,2,0,5
	3,0,8,1,0,0,1
	0,1,11,0,0,0,1
3310	0,0,10,0,4
3313	0,6,0,0,1,2
3314	0,1,1,0,1,2
	0,2,0,1,1,0,1
3317	3,1,1,0,1,2
	3,2,0,1,1,0,1
	0,3,3,0,1,0,1
3318	0,0,5,2,0,0,1
3319	1,0,5,2,0,0,1
	0,2,2,0,5
3321	3,0,5,2,0,0,1
	2,2,2,0,5
	0,0,9,0,0,2
	0,1,8,1,0,0,1
3323	0,0,7,1,4
3326	3,0,7,1,4
	0,1,10,0,4
3328	0,0,0,13
3329	0,7,0,0,1,2
3330	0,2,1,0,1,2
	0,3,0,1,1,0,1
3331	0,0,2,3,0,0,1
3333	0,0,2,0,3,1
3344	0,0,0,8,0,1
3346	0,3,1,0,1,2
	0,4,0,1,1,0,1
3347	0,0,3,2,0,2
	0,1,2,3,0,0,1
3349	0,1,2,0,3,1
3350	0,0,4,0,1,0,1
3360	0,0,0,3,0,2
3363	0,0,1,1,1,0,1
3366	3,0,1,1,1,0,1
	0,1,4,0,1,0,1
3368	0,0,3,0,5
3373	5,0,3,0,5
	0,0,12,0,0,0,1
3376	0,1,0,3,0,2
3379	0,0,2,0,1,2
	0,1,1,1,1,0,1
3381	0,0,0,1,5
3384	3,0,0,1,5
	0,1,3,0,5
3386	5,0,0,1,5
	2,1,3,0,5
	0,0,9,1,0,0,1
3389	8,0,0,1,5
	5,1,3,0,5
	3,0,9,1,0,0,1
	0,1,12,0,0,0,1
3391	0,0,11,0,4
3392	0,2,0,3,0,2
3395	0,1,2,0,1,2
	0,2,1,1,1,0,1
3397	0,1,0,1,5
3399	2,1,0,1,5
	0,0,6,2,0,0,1
3400	3,1,0,1,5
	1,0,6,2,0,0,1
	0,2,3,0,5
3402	5,1,0,1,5
	3,0,6,2,0,0,1
	2,2,3,0,5
	0,1,9,1,0,0,1
	0.0,10,0,0,2
3404	0,0,8,1,4
3407	3,0,8,1,4
	0,1,11,0,4
3408	0,3,0,3,0,2
3411	0,2,2,0,1,2
	0,3,1,1,1,0,1
3412	0,0,3,3,0,0,1
3413	1,0,3,3,0,0,1
	0,2,0,1,5
3414	0,0,3,0,3,1
3424	0,4,0,3,0,2
3425	0,0,0,4,0,0,1
3427	0,0,0,1,3,1
3430	3,0,0,1,3,1
	0,1,3,0,3,1
3431	0,0,5,0,1,0,1
3440	0,5,0,3,0,2
3441	0,0,1,3,0,2
	0,1,0,4,0,0,1
3443	0,1,0,1,3,1
3444	0,0,2,1,1,0,1
3447	3,0,2,1,1,0,1
	0,1,5,0,1,0,1
3449	0,0,4,0,5
3454	5,0,4,0,5
	0,0,13,0,0,0,1
3456	0,6,0,3,0,2
3457	0,1,1,3,0,2
	0,2,0,4,0,0,1
3459	0,2,0,1,3,1
3460	0,1,2,1,1,0,1
	0,0,3,0,1,2
3462	0,0,1,1,5
3465	3,0,1,1,5
	0,1,4,0,5
3467	5,0,1,1,5
	2,1,4,0,5
	0,0,10,1,0,0,1
3470	8,0,1,1,5
	5,1,4,0,5
	3,0,10,1,0,0,1
	0,1,13,0,0,0,1
3472	0,7,0,3,0,2
3473	0,0,0,1,1,2
3476	3,0,0,1,1,2
	0,1,3,0,1,2
	0,2,2,1,1,0,1
3478	0,1,1,1,5
3480	2,1,1,1,5
	0,0,7,2,0,0,1
3481	3,1,1,1,5
	1,0,7,2,0,0,1
	0,2,4,0,5
3483	5,1,1,1,5
	3,0,7,2,0,0,1
	2,2,4,0,5
	0,0,11,0,0,2
	0,1,10,1,0,0,1

N	$(1,2,3,4,5,6,7)^4$
3485	0,0,9,1,4
3488	0,8,0,3,0,2
3489	0,1,0,1,1,2
3492	3,1,0,1,1,2
	0,2,3,0,1,2
	0,3,2,1,1,0,1
3493	0,0,4,3,0,0,1
3494	1,0,4,3,0,0,1
	0,2,1,1,5
3495	0,0,4,0,3,1
3504	0,9,0,3,0,2
3505	0,2,0,1,1,2
3506	0,0,1,4,0,0,1
3508	0,0,1,1,3,1
3511	3,0,1,1,3,1
	0,1,4,0,3,1
3512	0,0,6,0,1,0,1
3520	0,10,0,3,0,2
3521	0,3,0,1,1,2
3522	0,2,3,0,2
	0,1,1,4,0,0,1
3524	0,1,1,1,3,1
3525	0,0,3,1,1,0,1
3528	3,0,3,1,1,0,1
	0,1,6,0,1,0,1
3530	0,0,5,0,5
3535	5,0,5,0,5
	0,0,14,0,0,0,1
3536	6,0,5,0,5
	1,0,14,0,0,0,1
	0,11,0,3,0,2
3537	0,4,0,1,1,2
3538	0,0,0,2,1,0,1
3541	3,0,0,2,1,0,1
	0,4,0,1,2
	0,1,3,1,1,0,1
3543	0,0,2,1,5
3546	3,0,2,1,5
	0,1,5,0,5
3548	5,0,2,1,5
	2,1,5,0,5
	0,0,11,1,0,0,1
3551	8,0,2,1,5
	5,1,5,0,5
	3,0,11,1,0,0,1
	0,1,14,0,0,0,1
3552	9,0,2,1,5
	6,1,5,0,5
	4,0,11,1,0,0,1
	1,1,14,0,0,0,1
	0,12,0,3,0,2
3553	0,5,0,1,1,2
3554	0,0,1,1,1,2
	0,1,0,2,1,0,1
3557	3,0,1,1,1,2
	3,1,0,2,1,0,1
	0,1,4,0,1,2
	0,2,3,1,1,0,1
3559	0,1,2,1,5
3561	2,1,2,1,5
	0,0,8,2,0,0,1
3562	3,1,2,1,5
	1,0,8,2,0,0,1
	0,2,5,0,5
3564	5,1,2,1,5
	3,0,8,2,0,0,1
	2,2,5,0,5
	0,1,11,1,0,0,1
	0,0,12,0,0,2
3566	0,0,10,1,4
3569	0,6,0,1,1,2
3570	0,1,1,1,1,2
	0,2,0,2,1,0,1
3573	3,1,1,1,1,2
	3,2,0,2,1,0,1
	0,2,4,0,1,2
	0,3,3,1,1,0,1
3574	0,0,5,3,0,0,1
3575	1,0,5,3,0,0,1
	0,2,2,1,5
3576	0,0,5,0,3,1
3584	0,0,0,14
3585	0,7,0,1,1,2
3586	0,2,1,1,1,2
	0,3,0,2,1,0,1
3587	0,0,2,4,0,0,1
3589	0,0,2,1,3,1
3592	3,0,2,1,3,1
	0,1,5,0,3,1
3593	0,0,7,0,1,0,1
3600	0,0,0,9,0,1
3603	0,3,1,1,1,2
	0,4,0,2,1,0,1
3603	0,1,2,4,0,0,1
	0,0,3,3,0,1
3605	0,1,2,1,3,1
3606	0,0,4,1,1,0,1
3609	3,0,4,1,1,0,1
	0,1,7,0,1,0,1
3611	0,0,6,0,5
3616	0,0,0,4,0,2
3619	0,0,1,2,1,0,1
3622	3,0,1,2,1,0,1
	0,1,4,1,1,0,1
	0,0,5,0,1,2
3624	0,0,3,1,5
3627	3,0,3,1,5
	0,1,6,0,5
3629	5,0,3,1,5
	2,1,6,0,5
	0,0,12,1,0,0,1
3632	0,1,0,4,0,2
3635	0,1,1,2,1,0,1
	0,0,2,1,1,2
3637	0,0,0,2,5
3640	3,0,0,2,5
	0,1,3,1,5
3642	5,0,0,2,5
	2,1,3,1,5
	0,0,9,2,0,0,1
3643	6,0,0,2,5
	3,1,3,1,5
	1,0,9,2,0,0,1
	0,2,6,0,5
3645	8,0,0,2,5
	5,1,3,1,5
	3,0,9,2,0,0,1
	2,2,6,0,5
	0,0,13,0,0,2
	0,1,12,1,0,0,1
3647	0,0,11,1,4
3648	0,2,0,4,0,2
3651	0,0,0,0,2,0,1
3664	0,3,0,4,0,2
3667	0,1,0,0,2,0,1
3674	0,0,8,0,1,0,1
3680	0,4,0,4,0,2
3681	0,0,0,5,0,0,1
3683	0,2,0,0,2,0,1
3687	0,0,5,1,1,0,1
3690	3,0,5,1,1,0,1
	0,1,8,0,1,0,1
3692	0,0,7,0.5
3696	0,5,0,4,0,2
3697	0,0,0,0,0,1,1
3705	8,0,0,0,0,1,1
	0,0,4,1,5
3708	11,0,0,0,0,1,1
	3,0,4,1,5
	0,1,7,0,5
3710	13,0,0,0,0,1,1
	5,0,4,1,5
	2,1,7,0,5
	0,0,13,1,0,0,1

N	(1,2,3,4,5,6,7)⁴	N	(1,2,3,4,5,6,7)⁴	N	(1,2,3,4,5,6,7)⁴	N	(1,2,3,4,5,6,7)⁴
3712	0,6,0,4,0,2	3764	0,2,1,0,2,0,1	3829	0,1,2,0,2,0,1	3907	0,0,0,1,2,0,1
3713	0,1,0,0,0,1,1	3766	0,1,0,0,6	3831	0,0,1,0,6	3910	3,0,0,1,2,0,1
3718	5,1,0,0,0,1,1	3768	2,1,0,0,6	3836	5,0,1,0,6		0,1,3,0,2,0,1
	0,0,1,2,5		0,0,6,1,1,0,1		0,0,10,0,1,0,1	3912	0,0,2,0,6
3721	8,1,0,0,0,1,1	3771	5,1,0,0,6	3840	0,0,0,15	3917	5,0,2,0,6
	3,0,1,2,5		3,0,6,1,1,0,1	3841	0,9,0,0,0,1,1		0,0,11,0,1,0,1
	0,1,4,1,5		0,1,9,0,1,0,1	3842	0,0,0,0,2,2	3920	0,2,0,0,0,3
3723	10,1,0,0,0,1,1	3773	0,0,8,0,5	3845	3,0,0,0,2,2	3923	0,1,0,1,2,0,1
	5,0,1,2,5	3776	3,0,8,0,5		0,2,2,0,2,0,1		0,0,1,0,2,2
	2,1,4,1,5		0,10,0,4,0,2	3847	0,1,1,0,6	3926	3,1,0,1,2,0,1
	0,0,10,2,0,1,1	3777	0,5,0,0,0,1,1	3849	2,1,1,0,6		3,0,1,0,2,2
3724	11,1,0,0,0,1,1	3778	0,0,1,0,0,1,1		0,0,7,1,1,0,1		0,2,3,0,2,0,1
	6,0,1,2,5	3786	8,0,1,0,0,1,1	3852	5,1,1,0,6	3928	0,1,2,0,6
	3,1,4,1,5		0,0,5,1,5		3,0,7,1,1,0,1	3930	2,1,2,0,6
	1,0,10,2,0,1,1	3789	11,0,1,0,0,11		0,1,10,0,1,0,1		0,0,8,1,1,0,1
	0,2,7,0,5		3,0,5,1,5	3854	0,0,9,0,5	3933	5,1,2,0,6
3726	13,1,0,0,0,1,1		0,1,8,0,5	3856	0,0,0,10,0,1		3,0,8,1,1,0,1
	8,0,1,2,5	3791	13,0,1,0,0,1,1	3857	1,0,0,10,0,1		0,1,11,0,1,0,1
	5,1,4,1,5		5,0,5,1,5		0,10,0,0,0,1,1	3935	0,0,10,0,5
	3,0,10,2,0,1,1		2,1,8,0,5	3858	0,1,0,0,2,2	3936	0,3,0,0,0,3
	2,2,7,0,5		0,0,14,1,0,0,1	3859	0,0,2,0,0,1,1	3937	1,3,0,0,0,3
	0,1,13,1,0,0,1	3792	14,0,1,0,0,1,1	3867	8,0,2,0,0,1,1		0,0,0,6,0,0,1
	0,0,14,0,0,2		6,0,5,1,5		0,0,6,1,5	3939	0,1,1,0,2,2
3728	0,7,0,4,0,2		3,1,8,0,5	3870	11,0,2,0,0,1,1		0,2,0,1,2,0,1
3729	0,2,0,0,0,1,1		1,0,14,1,0,0,1		3,0,6,1,5	3940	0,0,3,0,0,1,1
3732	0,0,1,0,2,0,1		0,11,0,4,0,2		0,1,9,0,5	3948	8,0,3,0,0,1,1
3744	0,8,0,4,0,2	3793	0,6,0,0,0,1,1	3872	0,0,0,5,0,2		0,0,7,1,5
3745	0,3,0,0,0,1,1	3794	0,1,1,0,0,1,1	3874	0,2,0,0,2,2	3951	11,0,3,0,0,1,1
3748	0,1,1,0,2,0,1	3796	0,0,0,0,4,1	3875	0,1,2,0,0,1,1		3,0,7,1,5
3750	0,0,0,0,6	3809	0,7,0,0,0,1,1	3877	0,0,1,0,4,1		0,1,10,0,5
3755	5,0,0,0,6	3810	0,2,1,0,0,1,1	3888	0,0,0,0,0,3	3952	0,4,0,0,0,3
	0,0,9,0,1,0,1	3812	0,1,0,0,4,1	3891	3,0,0,0,0,3	3953	0,0,0,1,0,1,1
3760	0,9,0,4,0,2	3813	0,0,2,0,2,0,1		0,2,2,0,0,1,1	3956	3,0,0,1,0,1,1
3761	0,4,0,0,0,1,1	3825	0,8,0,0,0,1,1	3893	0,1,1,0,4,1		0,1,3,0,0,1,1
3762	1,4,0,0,0,1,1	3826	0,3,1,0,0,1,1	3894	0,0,3,0,2,0,1	3958	0,0,2,0,4,1
	0,0,1,5,0,0,1	3828	0,2,0,0,4,1	3904	0,1,0,0,0,3	3968	0,5,0,0,0,3

N	$(1,2,3,4,5,6,7)^4$	N	$(1,2,3,4,5,6,7)^4$	N	$(1,2,3,4,5,6,7,8)^4$
3969	0,1,0,1,0,1,1	**4021**	0,0,4,0,0,1,1	**4084**	0,2,0,1,4,1
	0,0,1,0,0,3	**4029**	8,0,4,0,0,1,1	**4085**	0,1,2,1,2,0,1
3972	3,1,0,1,0,1,1		0,0,8,1,5		0,0,3,0,2,2
	3,0,1,0,0,3	**4032**	0,9,0,0,0,3	**4087**	0,0,1,1,6
	0,2,3,0,0,1,1	**4033**	0,4,1,0,0,3	**4090**	3,0,1,1,6
3974	0,1,2,0,4,1		0,5,0,1,0,1,1		0,1,4,0,6
3975	0,0,4,0,2,0,1	**4034**	0,0,1,1,0,1,1	**4092**	5,0,1,1,6
3984	0,6,0,0,0,3	**4037**	3,0,1,1,0,1,1		2,1,4,0,6
3985	0,1,1,0,0,3		0,1,4,0,0,1,1		0,0,10,1,1,0,1
	0,2,0,1,0,1,1	**4039**	0,0,3,0,4,1	**4095**	8,0,1,1,6
3988	0,0,1,1,2,0,1	**4048**	0,10,0,0,0,3		5,1,4,0,6
3991	3,0,1,1,2,0,1	**4049**	0,5,1,0,0,3		3,0,10,1,1,0,1
	0,1,4,0,2,0,1		0,6,0,1,0,1,1		0,1,13,0,1,0,1
3993	0,0,3,0,6	**4050**	0,0,2,0,0,3	**4096**	0,0,0,0,0,0,0,1
3998	5,0,3,0,6		0,1,1,1,0,1,1		
	0,0,12,0,1,0,1	**4052**	0,0,0,1,4,1		
4000	0,7,0,0,0,3	**4055**	3,0,0,1,4,1		
4001	0,2,1,0,0,3		0,1,3,0,4,1		
	0,3,0,1,0,1,1	**4056**	0,0,5,0,2,0,1		
4004	0,0,2,0,2,2	**4064**	0,11,0,0,0,3		
	0,1,1,1,2,0,1	**4065**	0,6,1,0,0,3		
4006	0,0,0,1,6		0,7,0,1,0,1,1		
4009	3,0,0,1,6	**4066**	0,1,2,0,0,3		
	0,1,3,0,6		0,2,1,1,0,1,1		
4011	5,0,0,1	**4068**	0,1,0,1,4,1		
	2,1,3,0,6	**4069**	0,0,2,1,2,0,1		
	0,0,9,1,1,0,1	**4072**	3,0,2,1,2,0,1		
4014	8,0,0,1,6		0,1,5,0,2,0,1		
	5,1,3,0,6	**4074**	0,0,4,0,6		
	3,0,9,1,1,0,1	**4079**	5,0,4,0,6		
	0,1,12,0,1,0,1		0,0,13,0,1,0,1		
4016	0,8,0,0,0,3	**4080**	0,12,0,0,0,3		
4017	0,3,1,0,0,3	**4081**	0,7,1,0,0,3		
	0,4,0,1,0,1,1		0,8,0,1,0,1,1		
4020	0,1,2,0,2,2	**4082**	0,2,2,0,0,3		
	0,2,1,1,2,0,1		0,3,1,1,0,1,1		

Tafel 2.

I. In eine Summe *zweier* Biquadrate lassen sich zerlegen die Zahlen:

2 17 32 82 97 162 257 272 337 512 626 641
706 881 1250 1297 1312 1377 1552 1921 2402 2417 2482 2592
2657 3026 3697 4097

II. In eine Summe *dreier* Biquadrate lassen sich zerlegen die Zahlen:

3 18 33 48 83 98 113 163 178 243 258 273
288 338 353 418 513 528 593 627 642 657 707 722
768 787 882 897 962 1137 1251 1266 1298 1313 1328 1331
1378 1393 1458 1506 1553 1568 1633 1808 1875 1922 1937 2002
2177 2403 2418 2433 2483 2498 2546 2563 2593 2608 2658 2673
2738 2848 2913 3027 3042 3107 3217 3282 3651 3698 3713 3778
3888 3953 4098

III. In eine Summe von nicht weniger als *vier* Biquadraten lassen sich zerlegen die Zahlen:

4 19 34 49 64 84 99 114 129 164 179 194
244 259 274 289 304 324 339 354 369 419 434 499
514 529 544 594 609 628 643 658 673 674 708 723
738 769 784 788 813 849 868 883 898 913 963 978
1024 1043 1138 1153 1218 1252 1267 1282 1299 1314 1329 1332
1344 1347 1379 1394 1409 1412 1459 1474 1507 1522 1539 1554
1569 1584 1587 1634 1649 1714 1762 1809 1824 1876 1889 1891
1923 1938 1953 1956 2003 2018 2064 2083 2131 2178 2193 2258
2404 2419 2434 2449 2484 2499 2500 2514 2547 2562 2564 2579
2594 2609 2624 2627 2644 2659 2674 2689 2739 2754 2802 2819
2849 2864 2914 2929 2994 3028 3043 3058 3104 3108 3123 3169
3171 3188 3218 3233 3283 3298 3363 3473 3538 3652 3667 3699
3714 3729 3732 3779 3794 3842 3859 3889 3904 3907 3954 3969
4034 4099

IV. In eine Summe von *fünf* oder mehreren Biquadraten können zerlegt werden die Zahlen:

5 20 35 50 65 80 85 100 115 130 145 165
180 195 210 245 260 275 290 305 320 325 340 355
370 385 405 420 435 450 500 515 530 545 560 580
595 610 629 644 659 675 689 690 709 724 739 754

755	770	785	789	800	804	819	850	865	869	884	899
914	929	930	949	964	979	994	1025	1040	1044	1059	1105
1124	1139	1154	1169	1219	1234	1253	1268	1280	1283	1300	1315
1330	1333	1345	1348	1360	1363	1380	1395	1410	1413	1425	1428
1460	1475	1490	1493	1508	1523	1538	1540	1555	1570	1585	1588
1600	1603	1620	1635	1650	1665	1668	1715	1730	1763	1778	1795
1810	1825	1840	1843	1877	1890	1892	1905	1907	1924	1939	1954
1957	1969	1970	1972	2004	2019	2034	2037	2065	2080	2084	2099
2132	2145	2147	2164	2179	2194	2209	2212	2259	2274	2320	2339
2387	2405	2420	2435	2450	2465	2485	2501	2515	2516	2530	2548
2565	2578	2580	2581	2595	2610	2625	2628	2640	2643	2645	2660
2675	2690	2705	2708	2725	2740	2755	2756	2770	2803	2818	2820
2835	2850	2865	2880	2883	2900	2915	2930	2945	2995	3010	3029
3044	3059	3074	3075	3105	3109	3120	3124	3125	3139	3170	3172
3185	3187	3189	3204	3219	3234	3249	3250	3252	3269	3284	3299
3314	3360	3364	3379	3425	3427	3444	3474	3489	3539	3554	3619
3653	3668	3683	3700	3715	3730	3733	3745	3748	3780	3795	3796
3810	3813	3843	3858	3860	3875	3890	3905	3908	3920	3923	3940
3955	3970	3985	3988	4035	4050	4100					

V. In eine Summe von mindestens *sechs* Biquadraten lassen sich zerlegen die Zahlen:

6	21	36	51	66	86	96	101	116	131	146	161
166	181	196	211	226	246	261	276	291	306	321	326
336	341	356	371	386	401	406	421	436	451	466	486
501	516	531	546	561	576	581	596	611	630	645	660
661	676	691	705	710	725	740	756	771	786	790	801
805	816	820	835	836	851	866	870	885	900	915	931
945	946	950	965	980	995	1010	1011	1026	1030	1041	1045
1056	1060	1075	1106	1121	1125	1140	1155	1170	1185	1186	1205
1220	1235	1254	1269	1281	1284	1301	1316	1334	1346	1349	1361
1364	1376	1381	1396	1411	1414	1426	1429	1441	1444	1461	1476
1491	1494	1509	1524	1536	1541	1556	1571	1574	1586	1589	1601
1604	1616	1619	1621	1636	1651	1666	1669	1681	1684	1701	1716
1731	1746	1749	1764	1779	1794	1796	1811	1826	1841	1844	1856
1859	1878	1893	1906	1908	1925	1940	1955	1958	1971	1973	1985
1986	1988	2005	2020	2035	2038	2050	2051	2053	2066	2081	2085
2096	2100	2115	2118	2133	2146	2148	2161	2163	2165	2180	2195
2210	2213	2225	2226	2228	2245	2260	2275	2290	2293	2321	2336
2340	2355	2388	2406	2421	2436	2451	2466	2468	2481	2486	2502

2517	2531	2532	2549	2566	2576	2582	2596	2597	2611	2626	2629
2641	2646	2656	2661	2662	2676	2691	2706	2709	2721	2724	2726
2741	2757	2771	2772	2786	2789	2804	2806	2821	2834	2836	2837
2851	2866	2881	2884	2896	2899	2901	2916	2931	2946	2961	2964
2981	2996	3011	3012	3030	3045	3060	3076	3090	3091	3106	3110
3121	3126	3136	3140	3141	3155	3156	3173	3186	3190	3201	3203
3205	3206	3220	3235	3251	3253	3265	3266	3268	3270	3285	3300
3315	3330	3331	3333	3350	3361	3365	3376	3380	3381	3395	3426
3428	3441	3443	3445	3460	3475	3490	3505	3506	3508	3525	3540
3555	3570	3616	3620	3635	3654	3669	3681	3684	3701	3716	3731
3734	3746	3749	3750	3761	3764	3781	3797	3811	3812	3814	3826
3829	3844	3861	3874	3876	3877	3891	3894	3906	3909	3921	3924
3936	3939	3941	3956	3971	3986	3989	4001	4004	4021	4036	4051
4052	4066	4069									

VI. In eine Summe von mindestens *sieben* Biquadraten können zerlegt werden die Zahlen:

7	22	37	52	67	87	102	112	117	132	147	167
177	182	197	212	227	242	247	262	277	292	307	322
327	342	352	357	372	387	402	407	417	422	437	452
467	482	487	502	517	532	547	562	567	577	582	592
597	612	631	646	662	677	692	711	721	726	741	742
757	772	791	802	806	817	821	832	837	852	867	871
886	901	916	917	932	947	951	961	966	981	996	1012
1027	1031	1042	1046	1057	1061	1072	1076	1091	1092	1107	1111
1122	1126	1141	1156	1171	1187	1201	1202	1206	1221	1236	1255
1270	1285	1286	1302	1317	1335	1350	1362	1365	1382	1392	1397
1415	1427	1430	1442	1445	1457	1462	1477	1492	1495	1510	1525
1537	1542	1557	1572	1575	1590	1602	1605	1617	1622	1632	1637
1652	1655	1667	1670	1682	1685	1697	1700	1702	1717	1732	1747
1750	1765	1780	1782	1792	1797	1812	1827	1830	1842	1845	1857
1860	1872	1879	1894	1909	1926	1941	1959	1974	1987	1989	2001
2006	2021	2036	2039	2052	2054	2067	2069	2082	2086	2097	2101
2112	2116	2119	2134	2149	2162	2166	2181	2196	2199	2211	2214
2227	2229	2241	2242	2244	2246	2261	2276	2291	2294	2306	2307
2309	2322	2326	2337	2341	2352	2356	2371	2374	2389	2407	2422
2437	2452	2467	2469	2487	2497	2503	2518	2533	2550	2567	2577
2583	2598	2612	2613	2630	2642	2647	2663	2672	2677	2678	2692
2707	2710	2722	2727	2737	2742	2743	2758	2773	2787	2788	2790
2805	2807	2822	2832	2838	2852	2853	2867	2870	2882	2885	2887
2897	2902	2912	2917	2918	2932	2947	2962	2965	2977	2980	2982
2997	3013	3031	3046	3061	3062	3077	3092	3093	3111	3122	3127

3137	3142	3152	3157	3174	3191	3202	3207	3221	3222	3236	3237
3254	3267	3271	3281	3286	3287	3301	3316	3332	3334	3346	3347
3349	3351	3362	3366	3377	3382	3392	3396	3397	3411	3412	3414
3429	3431	3442	3446	3457	3459	3461	3462	3476	3491	3507	3509
3521	3522	3424	3526	3541	3566	3571	3586	3587	3489	3606	3617
3621	3632	3636	3637	3655	3670	3682	3685	3702	3717	3735	3747
3751	3762	3765	3766	3777	3782	3798	3815	3827	3828	3830	3831
3845	3862	3872	3878	3892	3893	3895	3910	3922	3925	3937	3942
3952	3957	3958	3972	3975	3987	3990	4002	4005	4006	4017	4020
4022	4037	4053	4067	4068	4070	4082	4085				

VII. In eine Summe von nicht weniger als *acht* Biquadraten können zerfällt werden die Zahlen:

8	23	38	53	68	88	103	118	128	133	148	168
183	193	198	213	288	248	263	278	293	308	323	328
343	358	368	373	388	403	408	423	433	438	453	468
483	488	498	503	518	533	548	563	568	578	583	598
608	613	632	647	648	663	678	693	712	727	737	743
758	773	792	807	818	822	823	833	838	848	853	872
887	902	918	933	948	952	967	977	982	997	998	1013
1028	1032	1047	1058	1062	1073	1077	1088	1093	1108	1112	1123
1127	1142	1157	1172	1173	1188	1192	1203	1207	1217	1222	1237
1256	1271	1287	1303	1318	1336	1351	1366	1367	1383	1398	1408
1416	1431	1443	1446	1463	1473	1478	1496	1511	1526	1543	1558
1573	1576	1591	1606	1618	1623	1638	1648	1653	1656	1671	1683
1686	1698	1703	1713	1718	1733	1736	1748	1751	1766	1781	1783
1793	1798	1813	1828	1831	1846	1858	1861	1863	1873	1880	1888
1895	1910	1911	1927	1942	1960	1975	1990	2007	3017	2022	2040
2048	2055	2068	2070	2087	2098	2102	2113	2117	2120	2128	2135
2150	2167	2182	2197	2200	2215	2230	2243	2247	2257	2262	2277
2280	2292	2295	2308	2310	2323	2325	2327	2338	2342	2353	2357
2368	2372	2375	2390	2408	2423	2438	2453	2455	2470	2488	2504
2513	2519	2534	2551	2568	2584	2599	2614	2631	2648	2664	2679
2688	2593	2694	2711	2723	2728	2744	2753	2759	2774	2791	2808
2823	2824	2833	2839	2854	2868	2869	2871	2886	2888	2898	2903
2919	2928	2933	2934	2948	2951	2963	2966	2968	2978	2983	2993
2998	2999	3014	3032	3047	3063	3078	3088	3094	3112	3124	3138
3143	3153	3158	3168	3175	3192	3208	3223	3238	3255	3272	3288
3297	3302	3303	3317	3318	3335	3348	3352	3267	3368	3378	3383
3393	3398	3408	3413	3415	3430	3432	3447	3458	3463	3477	3478
3492	3493	3495	3510	3512	3523	3527	3537	3542	3543	3557	3572

3588 3590 3602 3603 3605 3607 3618 3622 3633 3638 3648 3656
3671 3686 3687 3703 3718 3736 3752 3763 3767 3783 3793 3799
3816 3832 3746 3847 3863 3873 3879 3896 3911 3912 3926 3938
3943 3959 3968 3973 3974 3976 3991 4003 4007 4018 4023 4033
4038 4039 4054 4056 4071 4083 4084 4086 4087

VIII. In eine Summe von nicht weniger als *neun* Biquadraten können zerfällt werden die Zahlen:

9 24 39 54 69 89 104 119 134 144 149 169
184 199 209 214 229 249 264 279 294 309 329 344
358 374 384 389 404 409 424 439 449 454 469 484
489 504 419 534 549 564 569 579 584 599 614 624
633 649 664 679 694 713 728 729 744 753 759 774
793 808 824 834 839 854 864 873 888 903 904 919
934 953 968 983 993 999 1014 1029 1033 1048 1063 1074
1078 1079 1089 1094 1104 1109 1113 1128 1143 1158 1174 1189
1193 1204 1208 1223 1233 1238 1257 1272 1273 1288 1304 1319
1337 1352 1368 1384 1399 1417 1424 1432 1447 1448 1464 1479
1489 1497 1512 1527 1544 1559 1577 1592 1607 1624 1639 1654
1657 1664 1672 1687 1699 1704 1719 1729 1734 1737 1752 1767
1784 1799 1814 1817 1829 1832 1847 1862 1864 1874 1881 1896
1904 1912 1928 1943 1944 1961 1976 1991 1992 2008 2023 2033
2041 2049 2056 2071 2088 2103 2114 2121 2129 2136 2144 2151
2168 2183 2198 2201 2216 2231 2248 2263 2273 2278 2281 2296
2304 2311 2324 2328 2343 2354 2358 2361 2369 2373 2376 2384
2391 2409 2424 2439 2454 2456 2471 2489 2505 2520 2529 2535
2536 2552 2569 2585 2600 2615 2632 2649 2665 2680 2695 2704
2712 2729 2745 2760 2769 2775 2792 2809 2825 2840 2855 2872
2889 2904 2905 2920 2935 2944 2949 2950 2952 2067 2969 2979
2984 3000 3009 3015 3033 3048 3049 3064 3079 3080 3089 3095
3113 3129 3144 3154 3159 3176 3184 3193 3209 3224 3239 3256
3273 3289 3304 3313 3319 3336 3344 3353 3369 3384 3394 3399
3409 3416 3424 3433 3448 3449 3464 3479 3494 3496 3511 3513
3528 3544 3553 3558 3559 3573 3574 3576 3591 3593 3604 3608
3623 3624 3534 3639 3649 3657 3664 3672 3688 3704 3719 3737
3753 3768 3784 3800 3609 3817 3833 3848 3864 3880 3897 3913
3927 3928 3944 3960 3977 3984 3992 3993 4008 4019 4204 4040
4049 4055 4057 4072 4088

IX. In eine Summe von nicht weniger als *zehn* Biquadraten können zerlegt werden die Zahlen:

10 25 40 55 70 90 105 120 135 150 160 170
185 200 215 225 230 250 265 280 295 310 330 345

360	375	390	400	410	425	440	455	465	470	485	490
505	520	535	550	565	570	585	600	615	634	640	650
665	680	695	714	730	745	760	775	794	809	810	825
840	855	874	880	889	905	920	935	954	969	984	985
1000	1009	1015	1034	1049	1064	1080	1090	1095	1110	1114	1120
1129	1144	1159	1160	1175	1190	1194	1209	1224	1239	1249	1258
1274	1289	1305	1320	1338	1353	1354	1369	1385	1400	1418	1433
1440	1449	1465	1480	1498	1505	1513	1528	1529	1545	1560	1578
1593	1608	1625	1640	1658	1673	1680	1688	1705	1720	1735	1738
1745	1753	1768	1785	1800	1815	1818	1833	1848	1865	1882	1897
1898	1913	1920	1939	1945	1962	1977	1993	2009	2024	2025	2042
2057	2072	2073	2089	2104	2122	2130	2137	2152	2160	2169	2184
2202	2217	2232	2249	2264	2279	2282	2289	2297	2305	2312	2329
2344	2359	2362	2370	2377	2385	2392	2400	2410	2425	2440	2442
2457	2472	2490	2506	2521	2537	2545	2553	2560	2570	2586	2601
2616	2617	2633	2650	2666	2681	2696	2713	2720	2730	2746	2761
2776	2785	2793	2810	2826	2841	2856	2873	2890	2906	2921	2936
2953	2960	2970	2985	2986	3001	3016	3025	3034	3050	3065	3081
3096	3114	3130	3145	3160	3161	3177	3194	3200	3210	3225	3240
3257	3274	3290	3305	3320	3329	3337	3345	3354	3370	3385	3400
3410	3417	3434	3440	3450	3465	3480	3497	3514	3529	3530	3545
3560	3569	3575	3577	3592	3594	3600	3609	3625	3640	3650	3658
3665	3673	3674	3680	3689	3705	3720	3738	3754	3769	3785	3801
3818	3825	3834	3849	3865	3881	3898	3914	3929	3945	3961	3978
3995	4000	4009	4025	4041	4058	4065	4073	4074	4089		

X. In eine Summe von nicht weniger als *elf* Biquadraten lassen sich zerlegen die Zahlen:

11	26	41	56	71	91	106	121	136	151	171	176
186	201	216	231	241	251	266	281	296	311	331	346
361	376	391	411	416	426	441	456	471	481	491	506
521	536	551	566	571	586	601	616	635	651	656	666
681	696	715	731	746	761	776	795	811	826	841	856
875	890	891	896	906	921	936	955	970	986	1001	1016
1035	1050	1065	1066	1081	1096	1115	1130	1136	1145	1161	1176
1191	1195	1210	1225	1240	1241	1259	1265	1275	1290	1306	1321
1339	1355	1370	1386	1401	1419	1434	1435	1450	1456	1466	1481
1499	1514	1521	1530	1546	1561	1579	1594	1609	1610	1626	1641
1659	1674	1689	1696	1706	1721	1739	1754	1761	1769	1786	1801
1816	1819	1834	1849	1866	1883	1899	1914	1930	1936	1946	1963
1978	1979	1994	2010	2026	2043	2058	2074	2090	2104	2106	2123

2138 2153 2154 2170 2176 2185 2203 2218 2233 2250 2265 2283
2298 2313 2330 2345 2360 2363 2378 2386 2393 2411 2416 2426
2441 2443 2458 2473 2491 2507 2522 2523 2538 2554 2561 2571
2587 2602 2618 2634 2651 2667 2682 2697 2698 2714 2731 2736
2747 2762 2777 2794 2801 2811 2816 2827 2842 2857 2874 2891
2907 2922 2937 2954 2971 2976 2987 3002 3017 3035 3041 3051
3066 3067 3082 3097 3115 3131 3146 3162 3178 3195 3211 3216
3226 3241 3242 3258 3275 3291 3306 3321 3338 3355 3371 3386
3401 3418 3435 3451 3456 3466 3481 3498 3515 3531 3546 3561
3578 3585 3595 3601 3610 3611 3626 3641 3659 3666 3675 3690
3696 3706 3721 3739 3755 3770 3786 3802 3819 3835 3841 3850
3856 3866 3882 3899 3915 3930 3946 3962 3979 3995 4010 4016
4026 4042 4059 4075 4081 4090

XI. In eine Summe von nicht weniger als *zwölf* Biquadraten können zerlegt werden die Zahlen:

14 27 42 57 72 92 107 122 137 152 172 187
192 202 217 232 252 267 282 297 312 332 347 362
377 392 412 427 432 442 457 472 492 497 507 522
537 552 572 587 602 617 636 652 667 672 682 697
716 732 747 762 777 796 812 827 842 857 876 892
907 912 922 937 956 971 972 987 1002 1017 1036 1051
1067 1082 1097 1116 1131 1146 1147 1152 1162 1177 1196 1211
1226 1242 1260 1276 1291 1307 1322 1340 1356 1371 1387 1402
1420 1436 1451 1467 1472 1482 1500 1515 1516 1531 1547 1562
1580 1595 1611 1627 1642 1660 1675 1690 1691 1707 1712 1722
1740 1755 1770 1777 1787 1802 1820 1835 1850 1867 1884 1900
1915 1931 1947 1952 1964 1980 1995 2011 2027 2044 2059 2060
2075 2091 2107 2124 2139 2155 2171 2186 2187 2192 2204 2219
2234 2235 2251 2266 2284 2299 2314 2331 2346 2364 2379 2394
2412 2427 2432 2444 2459 2474 2492 2508 2524 2539 2555 2572
2588 2603 2604 2619 2635 2652 2568 2683 2699 2715 2732 2748
2752 2763 2778 2779 2795 2812 2817 2828 2843 2858 2875 2892
2908 2923 2938 2955 2972 2988 2992 3003 3018 3036 3052 3057
3068 3072 3083 3098 3116 3132 3147 3148 3163 3179 3196 3212
3227 3332 3243 3259 3276 3292 3307 3322 3323 3339 3356 3372
3387 3402 3419 3436 3452 3467 3472 3482 3499 3516 3532 3547
3562 3579 3596 3612 3627 3642 3660 3676 3691 3692 3707 3712
3722 3740 3756 3771 3787 3803 3820 3836 3851 3857 3867 3883
3900 3916 3931 3947 3963 3980 3996 4011 4027 4032 4043 4060
4076 4091

XII. In eine Summe von nicht weniger als *dreizehn* Biquadraten können zerlegt werden die Zahlen:

13	28	43	58	73	93	108	123	138	153	173	188
203	208	218	233	253	268	283	298	313	333	348	363
378	393	413	428	443	448	458	473	493	508	523	538
553	573	588	603	618	637	653	668	683	688	698	717
733	748	763	778	797	813	828	843	858	877	893	908
923	928	938	957	973	988	1003	1018	1037	1052	1053	1068
1083	1098	1117	1132	1148	1163	1168	1178	1197	1212	1227	1228
1243	1261	1277	1292	1308	1323	1341	1357	1372	1388	1403	1421
1437	1452	1468	1483	1488	1501	1517	1532	1548	1563	1581	1596
1597	1612	1628	1643	1661	1676	1692	1708	1723	1728	1741	1756
1771	1772	1788	1803	1821	1836	1851	1868	1885	1901	1916	1932
1948	1965	1968	1981	1996	2012	2028	2045	2061	2076	2092	2108
2125	2140	2141	2156	2172	2188	2205	2208	2220	2236	2252	2267
2268	2285	2300	2315	2316	2332	2347	2365	2380	2395	2413	2428
2445	2448	2460	2475	2493	2509	2525	2540	2556	2573	2589	2605
2620	2636	2653	2669	2684	2685	2700	2716	2733	2749	2764	2768
2780	2796	2813	2829	2844	2859	2860	2876	2893	2909	2924	2939
2956	2973	2989	3004	3008	3019	3037	3053	3069	3073	3084	3099
3117	3133	3149	3164	3180	3197	3213	3228	3229	3244	3248	3260
3277	3293	3308	3324	3328	3340	3357	3373	3388	3403	3404	3420
3437	3453	3468	3483	3488	3500	3517	3533	3548	3563	3580	3597
3613	3628	3643	3661	3677	3693	3708	3723	3728	3741	3757	3772
3773	3788	3804	3821	3837	3852	3868	3884	3901	3917	3932	3948
3964	3981	3997	4012	4028	4044	4048	4061	4077	4092		

XIII. In eine Summe von mindestens *vierzehn* Biquadraten lassen sich zerlegen die Zahlen:

14	29	44	59	74	94	109	124	139	154	174	189
204	219	224	234	254	269	284	299	314	334	349	364
379	394	414	429	444	459	464	474	494	509	524	539
554	574	589	604	619	638	654	669	684	699	704	718
734	749	764	779	798	814	829	844	859	878	894	909
924	939	944	958	974	989	1004	1019	1038	1054	1069	1084
1099	1118	1133	1134	1149	1164	1179	1184	1198	1213	1229	1244
1262	1278	1293	1309	1324	1342	1358	1373	1389	1404	1422	1438
1453	1469	1484	1502	1504	1518	1533	1549	1564	1582	1598	1613
1629	1644	1662	1677	1678	1693	1709	1724	1742	1744	1757	1773
1789	1804	1822	1837	1852	1853	1869	1886	1902	1917	1933	1949

1966	1982	1984	1997	2013	2029	2046	2062	2077	2093	2109	2126
2142	2157	2173	2189	2206	2221	2222	2224	2237	2253	2269	2286
2301	2317	2333	2348	2349	2366	2381	2396	2397	2414	2429	2446
2461	2464	2476	2494	2510	2526	2541	2557	2574	2590	2606	2621
2637	2654	2670	2686	2701	2717	2734	2750	2765	2766	2781	2784
2797	2814	2830	2845	2861	2877	2894	2910	2925	2940	2941	2957
2974	2990	3005	3020	3024	3038	3054	3070	3085	3100	3118	3134
3150	3165	3181	3198	3214	3230	3245	3261	3264	3278	3294	3309
3310	3325	3341	3358	3374	3389	3405	3421	3438	3454	3469	3484
3485	3501	3504	3518	3534	3549	3564	3581	3584	3598	3614	3629
3644	3662	3678	3694	3709	3724	3742	3744	3758	3774	3789	3805
3822	3838	3853	3854	3869	3885	3902	3918	3933	3949	3965	3982
3998	4013	4029	4045	4062	4064	4078	4093				

XIV. In eine Summe von mindestens *funfzehn* Biquadraten lassen sich zerlegen die Zahlen:

15	30	45	60	75	95	110	125	140	155	175	190
205	220	235	240	255	270	285	300	315	335	350	365
380	395	415	430	445	460	475	480	495	510	525	540
555	575	590	605	620	639	655	670	685	700	719	720
735	750	765	780	799	815	830	845	860	879	895	910
925	940	959	960	975	990	1005	1020	1039	1055	1070	1085
1100	1119	1135	1150	1165	1180	1199	1200	1214	1215	1230	1245
1263	1279	1294	1310	1325	1343	1359	1374	1390	1405	1423	1439
1454	1470	1485	1503	1519	1520	1534	1550	1565	1583	1599	1614
1630	1645	1663	1679	1694	1710	1725	1743	1758	1759	1760	1774
1790	1805	1823	1838	1854	1870	1887	1903	1918	1934	1950	1967
1983	1998	2000	2014	2030	2047	2063	2078	2094	2110	2127	2143
2158	2174	2190	2207	2223	2238	2240	2254	2270	2287	2302	2303
2318	2334	2350	2367	2382	2398	2415	2430	2447	2462	2477	2478
2480	2495	2511	2527	2542	2558	2575	2591	2607	2622	2638	2655
2671	2687	2702	2718	2735	2751	2767	2782	2798	2800	2815	2831
2846	2847	2862	2878	2895	2911	2926	2942	2958	2975	2991	3006
3021	3022	3039	3040	3055	3071	3086	3101	3119	3135	3151	3166
3182	3199	3215	3231	3246	3262	3279	3280	3295	3311	3326	3342
3359	3375	3390	3391	3406	3422	3439	3455	3470	3486	3502	3519
3520	3535	3550	3565	3566	3582	3599	3615	3630	3645	3663	3679
3695	3710	3725	3743	3759	3760	3775	3790	3806	3823	3839	3840
3855	3870	3886	3903	3919	3934	3935	3950	3966	3983	3999	4014
4030	4046	4063	4079	4080	4080	4094					

XV. In eine Summe von mindestens *sechszehn* Biquadraten lassen sich zerlegen die Zahlen:

31	46	61	76	111	126	141	156	191	206	221	236
271	286	301	316	351	366	381	396	431	446	461	476
496	511	526	541	556	591	606	621	671	686	701	736
751	766	781	831	846	861	911	926	941	976	991	1006
1021	1071	1086	1101	1151	1166	1181	1216	1231	1246	1261	1295
1311	1326	1375	1391	1406	1455	1471	1486	1535	1551	1566	1615
1631	1646	1695	1711	1726	1775	1776	1791	1806	1839	1855	1871
1919	1935	1951	1999	2015	2016	2031	2079	2095	2111	2159	2175
2191	2239	2255	2256	2271	2286	2319	2335	2351	2383	2399	2431
2463	2479	2496	2512	2526	2543	2559	2623	2639	2703	2719	2783
2799	2863	2879	2927	2943	2959	3007	3023	3056	3087	3102	3103
3167	3183	3247	3263	3296	3312	3327	3343	3407	3423	3471	3487
3503	3536	3551	3567	3583	3631	3646	3647	3711	3726	3776	3791
3807	3824	3871	3887	3951	3967	4015	4031	4047	4095		

XVI. In eine Summe von mindestens *siebenzehn* Biquadraten können zerlegt werden die Zahlen:

47	62	77	127	142	157	207	222	237	287	302	317
367	382	397	447	462	477	527	542	557	607	622	687
702	752	767	782	847	862	927	942	992	1007	1022	1087
1102	1167	1182	1232	1247	1327	1407	1487	1567	1647	1727	1807
2032	2272	2544	3552	3568	3727	3792	3808				

XVII. In eine Summe von nicht weniger als *achtzehn* Biquadraten lassen sich zerlegen die Zahlen:

63	78	143	158	223	238	303	318	383	398	463	478
543	558	623	703	783	863	943	1008	1023	1103	1183	1248

XVIII. In eine Summe von nicht weniger als *neunzehn* Biquadraten lassen sich zerlegen die Zahlen:

79	159	239	319	399	379	559

Demnach können innerhalb der ersten 4100 Zahlen:

28 in eine Summe von 2 Biquadraten zerlegt werden,
75 » » » » 3 »
158 » » » » 4 »
271 » » » » 5 »

375	in	eine	Summe	von	6	Biquadraten
416	»	»	»	»	7	»
393	»	»	»	»	8	»
353	»	»	»	»	9	»
322	»	»	»	»	10	»
306	»	»	»	»	11	»
290	»	»	»	»	12	»
286	»	»	»	»	13	»
284	»	»	»	»	14	»
282	»	»	»	»	15	»
166	»	»	»	»	16	»
56	»	»	»	»	17	»
24	»	»	»	»	18	»
7	»	»	»	»	19	»

Gotha, im Januar 1851.

2.

De la propriété fondamentale du mouvement cycloïdal, et de sa liaison avec le principe de la composition des mouvements de rotation autour d'axes parallèls et d'axes qui se coupent.

(Par Mr. *Steichen*, professeur à l'école militaire de Bruxelles.)

---

§. 1.

Dans la théorie des cycloïdes naturelles, rallongées ou raccourcies, on se borne à démontrer que la ligne droite menée du point de contact du cercle mobile roulant sur une droite fixe, au point générateur de la courbe, est une normale à la courbe en ce point. Mais dans les applications de mécanique ce théorème est insuffisant, et il convient d'y substituer un énoncé plus général et plus complet qui revient à ceci: *Tout mouvement de roulement d'un cercle sur une tangente ou sur un autre cercle fixe n'est autre chose qu'un mouvement de rotation instantené de tous les points du plan mobile autour du point de contact actuel des deux cercles qu'on considère.* Une propriéte analogue subsiste, pour le cas d'une courbe quelconque roulant sur une autre courbe; mais avant que de généraliser, et sans recherber l'analogie de cet énoncé avec le théorème de Mr. *Chasles* et *Bobillier*, concernant les déplacements virtuels des figures planes invariables dans leur plan, il importe avant tout de considérer les quelques cas particuliers du mouvement cycloïdal et epicycloïdal ou hypocycloïdal; car on en verra découler comme simple conséquence toute la théorie de la composition et décomposition des rotations élémentaires et des vitesses angulaires autour d'axes *parallèls* et *concourants.*

§. 2.

Soit (Fig. I.) a' un point décrivant *intérieur* ou *extérieur* à une circonférence de cercle de rayon $oh = R$, h étant le point de contact actuel avec une tangente fixe horizontale. Pendant que cette circonférence roule infiniment peu,



le point a' décrit un chemin de translation horizontal $Rd\varphi$, égal à celui qui est parcouru par le centre (o), et un chemin de circulation $a'c'$, normal au rayon $a'o$, et égal à $a'o.d\varphi = a.d\varphi$. En prenant sur une horizontale en a', à partir de ce point, une longueur $a'b' = R\,d\varphi$, et achevant sur $(a'b', a'c')$ le parallélogramme $a'c'd'b'$, on obtient par la diagonale $a'd'$ le chemin résultant en grandeur et en direction; c'est donc aussi l'élément courbe en ce point, et la tangente à la courbe. Or dans le triangle $a'c'd'$ j'ai:

$$\sin c'\hat{a}'d' : \sin b'\hat{a}'c' = a'b' : a'd' = R\,d\varphi : a'd'.$$

Dans le triangle $oa'h$ on aura:

$$\sin a'\hat{o}z : \sin o\hat{a}'h = a'h : R.$$

En cherchant la valeur de $a'd'^2$, et remarquant que

$$\cos b'\hat{a}'c' = \cos a'\hat{o}z = -\cos a'\hat{o}h, \quad \text{on obtient:}$$

$$a'd'^2 = (a'o^2 + R^2 - 2R.a'o.\cos a'\hat{o}h)\,d\varphi^2 = a'h^2.d\varphi^2.$$

On conclut de là et des deux proportions précédentes:

$$\sin c'\hat{a}'d' : \sin b'\hat{a}'c' = \sin o\hat{a}'h : \sin a'\hat{o}z,$$

et comme dans celle-ci les conséquents sont égaux, il en est de même des antécédents; ce qui donnera:

$$c'\hat{a}'d' = o\hat{a}'h\,.$$

Puisque donc en ajoutant à l'angle $o\hat{a}'h$ l'angle $h\hat{a}'c'$, on obtient un angle droit, il faut qu'on ait aussi:

$$h\hat{a}'c' + c'\hat{a}'d' \text{ ou } h\hat{a}'d' = 90^\circ$$

Il est manifeste ainsi que *non seulement le chemin $a'd'$ est normal à la droite ha'*; mais qu'en outre, à cause de:

$$a'd' = a'h.d\varphi,$$

le point a' se meut pendant chaque instant de la même manière que s'il tournait autour du point de contact h, avec une vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$, égale à celle dont la roue tourne sur elle-même, autour de son centre.

Cette propriété donne lieu à quelques remarques qui sont assez curieuses pour devoir être mentionnées.

Rémarque I. Comme les deux chemins $a'b'$, $a'c'$ sont proportionnels aux rayon $k'a$, on peut également obtenir la direction de la tangente à la courbe au point a', par le moyen d'un parallélogramme fini, ayant les deux côtés respectivement perpendiculaires aux lignes hz, oa', et proportionnels aux distances k, a.

Cette propriété pourrait être énoncée aussi, sous la forme d'un théorème de géométrie élémentaire, indépendamment de toute notion infinitésimale.

Remarque II. En vertu de la propriété énoncée, l'expression de la force vive, d'une roue de voiture par exemple, roulant sur un plan horizontal ou oblique, s'obtient immédiatement et l'on voit que pour une vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$, elle doit avoir une force vive représentée par:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 . \int h a^n . dm ,$$

ce qui équivaut au carré de la vitesse angulaire, multiplié par le moment d'inertie de la roue, pris par rapport à son arête de contact avec le plan d'appui.

En général, un corps solide quelconque étant animé d'une vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$ autour d'un axe (o,o') intérieur ou extérieur, et d'une vitesse de translation rectiligne dirigée dans un plan perpendiculaire à l'axe (o,o'), si dans ce plan et concentriquement à l'axe (o,o') on décrit une circonference de rayon $V:\frac{d\varphi}{dt}=R$, et qu'on lui mène en T une tangente parallèle à V, le corps est dans le même cas que s'il tournait autour du point de contact T, et sa force vive sera $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \times K$, K marquant le moment d'inertie du solide par rapport à un axe en T, parallèle à l'axe de rotation $(o o')$; et ce-ci est vrai pour chaque instant du mouvement, alors même que les quantités V, $\frac{d\varphi}{dt}$, changent de valeurs et de directions, pourvu que la vitesse de transport ne cesse pas de rester à angle droit avec l'axe $(o o')$. On conçoit du reste aisément ce qui aurait lieu pour le cas plus général où V croiserait cet axe sous un angle quelconque.

Remarque III. Avant que de poursuivre l'objet immédiat des recherches que nous avons en vûe, nous croyons devoir exposer quelques considérations géométrico-mécaniques, concernant la roue de voiture, lesquelles fournissent la solution de quelques parties de la question proposée dans le journal de Mr. *Crelle.* (Voir la 4ième livraison du tome 40.) D'ailleurs c'est cette question d'abord, et ensuite la belle expérience de Mr. *Foucault* qui ont ramené notre attention sur la théorie fondamentale de la rotation.

§. 3.

En désignant par x l'abscisse horizontale et par y l'ordonnée verticale d'un point quelconque de la cycloïde rallongée ou raccourcie, l'origine des coordonnées étant au point de contact initial de la roue avec le sol, on obtient;

$$x = R.\varphi - a\sin\varphi \quad , \quad y = R - a.\cos\varphi.$$

Ainsi nommant u la vitesse totale du point décrivant, de masse dm, après un temps t du mouvement, on aura, à cause de $u^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}$,

$$u^2 = (R^2 + a^2 - 2aR\cos\varphi)\frac{d\varphi^2}{dt^2}.$$

La force vive de la roue a parconséquent la valeur

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.\int(R^2+a^2)dm - 2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.\int R.a.\cos\varphi.dm \ldots\ldots (a),$$

et comme $a\cos\varphi = R - y$, on a:

$$\int a\cos\varphi\, dm = M.R - \int y\, dm = 0,$$

M désignant la masse entière de la roue. La force vive se reduit donc simplement à $M.R^2.\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{d\varphi^2}{dt^2}.\int a^2 dm$; et cette expression conduit à un énoncé conforme à un théorème général de la mécanique rationnelle. Mais en reprenant l'expression (a), et considérant que dans hoa' ....(Fig. 1) on a $R^2+a^2-2aR\cos\varphi = a'h^2$, on s'aperçoit aussi qu'elle se réduit à $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.\int a'h^2.dm$, conformement à ce qui a été reconnu immédiatement dans la *Remarque II.* Concevons après cela dans la roue deux points matériels (p', Π') équidistants du centre (o), mais diamètralement opposés; de sorte qu'après un temps t du roulement, le premier point aura décrit un arc rallongé ou raccourci correspondant à un angle au centre φ, tandisque le point Π' correspondra à un angle $\varphi + 180°$; ainsi la vitesse du premier point p' étant:

$$u = \frac{d\varphi}{dt}.\sqrt{(R^2 + a^2 - 2aR\cos\varphi)},$$

la vitesse contemporaine u' de Π' a la valeur

$$u' = \frac{d\varphi}{dt}.\sqrt{(R^2 + a^2 + 2aR\cos\varphi)}.$$

On voit donc que celle u de ces deux vitesses, correspondante à l'angle central $\varphi + 180°$ est toujours plus grande que celle qui correspond à l'angle central aïgu; et que chacune d'elle varie avec le temps, alors même que la vitesse angulaire de la roue est constante. De là résultent parconséquent des réactions d'inertie tangentielles qu'il faudra combiner avec les forces centrifuges ou les réactions d'inertie centrales, afin d'en déduire la réaction élémentaire résultante, et par l'intégration la résultante finie des forces qui pendant un instant quelconque agissent sur les divers points matériels de la roue. En désignant par dR_x, dR_y, les composantes parallèles aux axes coordonnés des réactions d'inertie de la molécule dm, du point p', on trouve, après les réductions faites:

$$dR_x = -\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 .a.dm.\sin\varphi - (R - a\cos\varphi)dm.\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)$$

$$dR_y = -\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 .a.dm.\cos\varphi - a.\sin\varphi.dm\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right).$$

De là on conclut aisément les composantes analogues dR'_x, dR'_y ..... du point Π'; et en nommant X la somme $R_x + R'_x$, et y la somme $R_y + R'_y$, on en deduit:

$$Y = 0 \quad , \quad X = -M.R.\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right).$$

Ainsi, conformément au principe général, démontré dans mon mémoire sur le mouvement naissant des corps, la réaction d'inertie totale se fait de la même manière, que si la masse entière était condensée au centre d'inertie de la roue, et qu'il n'y eût accélération de vitesse que dans le mouvement de transport de ce centre.

Eu égard à la forme analytique de dR_x, dR_y, on trouverait aisément ce qui doit avoir lieu pour le cas d'une roue non-homogène dans la masse. Pour le cas de l'homogénéité de masse, et d'une vitesse angulaire constante on aura $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$, portant $X = 0$, $Y = 0$ à la fois, et la réaction d'inertie centrale est par conséquent nulle.

§. 4.

Si l'on considère que l'élément courbe ds, rallongé ou raccourci, a la valeur: $a'd' = a'h.d\varphi$, on obtient immédiatement:

$$ds = a'h.d\varphi = \sqrt{(R^2 + a^2 - 2aR\cos\varphi.)}d\varphi = 2(R+a)d\varphi.\sqrt{\left(1 - \frac{4Ra}{(R+a)^2}.\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\right)}.$$

Si donc on pose $\varphi = 180° - 2\lambda$, ou $\lambda = 90° - \frac{1}{2}\varphi$, $\frac{4Ra}{(R+a)^2} = c^2$, que l'on fasse commencer l'arc s avec l'angle φ, et que l'on remarque que pour $\varphi = 0$, $\lambda = 90°$, on obtient:

$$s = -2(R+a)\int_{90}^{\lambda} d\lambda.\sqrt{(1-c^2\sin^2\lambda.)} = 2(R+a)\int_0^{90°} .d\lambda\sqrt{(1-c^2\sin^2\lambda} - 2)(R+a)\int_0^{\lambda} d\lambda.\sqrt{(1-c^2\sin^2\lambda)}.$$

Concevons une ellipse (Fig. 4) ayant $R+a$ pour demi-grand axe, $\pm(R-a)$ pour demi-petit axe, selon que $R - a >$ ou < 0, et partant $(R+a)c$, ou $2.\sqrt{(R.a)}$ pour distance du foyer au centre. Sur le grand-axe comme diamètre, décrivons une circonférence de cercle, et tirons sous un angle $\frac{1}{2}\varphi$ avec le grand axe CA, un rayon Cp à cette circonférence. En abaissant de p une perpendiculaire pP sur CA et qui coupe l'ellipse aux deux points μ, μ', on aura un arc d'ellipse $\mu A\mu'$ ou $2\mu A$ qui est égal à l'arc de cycloïde raccourcie ou rallongée

qui correspond à un angle au centre φ. Il est digne de remarque que la rectification de l'une de ces courbes se reduise d'une façon si simple à celle de l'autre.

Concevons deux circonférences de cercle, de rayons R, R', respectivement; et dans le plan de chacune d'elles un point générateur situé à la même distance du centre de son cercle: la longueur s de l'arc courbe décrit par le point générateur p du cercle (R) sera:

$$s = 2(R+a)\ [E(c') - E(c'\lambda)],$$

tandis que l'axe décrit par le point générateur p' de (R') aura la valeur

$$s = 2(R'+a)[E'(c') - E(c', \lambda)],$$

et les deux arcs ayant la même origine et correspondants au même angle variable $\lambda = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$, seront entr'eux comme les distances $R+a$, $R'+a$, pourvu que les constantes c, c' soient égales, ce qui donne la condition:

$$\frac{R}{R'} = \frac{(R+a)^2}{(R'+a)^2}\ ; \quad \text{ou } a = \sqrt{(R.R')}.$$

Ainsi le point générateur p, étant situé à l'extérieur du cercle R, ce qui suppose $R < R'$, il faut que le point p' soit situé à l'intérieur de (R'), et que la distance de chacun au centre de son cercle correspondant, soit une moyenne proportionnelle aux deux rayons: dès lors les arcs courbes décrits dans un même intervalle angulaire φ, sont entr'eux dans le rapport de $R+a$ à $R'+a$ ou de $\sqrt{R}:\sqrt{R'}$.

§. 5.

Un théorème analogue à celui énoncé à la fin du (§. 2) subsiste pour les épicycloïdes planes et les hypocycloïdes rallongées et raccourcies. En effet considérons, pour fixer les idées, le cas d'un cercle (R') de rayon $C'T$, extérieurement tangent à un cercle fixe (R) de rayon $CT = R$, sur lequel il doive rouler. Soit (Fig. 2) $M\pi$ l'élément d'epicycloïde décrit par le point M, placé à une distance du centre C' égal à la longueur constante $C'M = a$. En nommant $d\varphi$ la rotation momentanée du centre C' autour de C, pendant que (R') tourne sur lui-même d'un angle $d\varphi'$, on a d'abord $R'd\varphi' = R d\varphi$; et rien n'empêche de considérer le chemin $M\pi$ comme résultant des deux chemins partiels simultanés ou successifs $Mq = CM.d\varphi$, $Mp = C'M.d\varphi' = a\,.\,d\varphi'$, décrits autour des deux centres C, C' respectivement. Le triangle ΠMq donne en vertu de la relation qui lie $d\varphi'$ à $d\varphi$:

$$\sin \Pi\hat{M}q : \sin(p\hat{M}q - \Pi\hat{M}q) = C'M\,.\,R : CM\,.\,R'.$$

Mais les triangles CMT, $C'MT$ donnent de leur côté:

$$\left.\begin{array}{l} \sin T\hat{M}C : \sin C'\hat{T}M = R : CM \\ \sin C'\hat{T}M : \sin C'\hat{M}T = C'M : R' \end{array}\right\},$$

partant $$\sin T\hat{M}C : \sin T\hat{M}C' = C'M.R : CM.R'$$

ou bien: $\sin T\hat{M}C : \sin(C\hat{M}C' - T\hat{M}C) = \sin \Pi \hat{M}_q : \sin(p\hat{M}q - \Pi\hat{M}q)$,

et comme par suite de la construction les deux angles $p\hat{M}q$, $C\hat{M}C'$ sont égaux, il faut pour que cette proportion subsiste, que l'on ait:

$$TMC = \Pi\hat{M}q:$$

partant $$T\hat{M}\Pi = C\hat{M}\Pi + C\hat{M}T = C\hat{M}\Pi + \Pi\hat{M}q = 90^\circ.$$

Il est donc démontré ainsi que la normale à la courbe raccourcie ou rallongée passe par le point de contact actuel du cercle mobile avec le cercle fixe qui sert de base.

Rémarque. Il nous à paru d'autant plus nécessaire d'exposer cette démonstration, que de certains auteurs commettent une erreur relativement à la direction de la normale à la courbe rallongée et raccourcie. Après avoir démontré le cas pour l'epicycloïde naturelle, ils admettent, en effet par une espèce d'analogie peu fondée, que dans le cas général, la normale passe par le point de rencontre X de la circonférence (a) avec la ligne CC' des centres; ce qui est une erreur provenant d'un défaut d'examen attentif de la question.

§. 6.

Soit μ le point de rencontre de $C'M$ avec la circonférence (R'). Si l'on mène de ce point au point de contact T une droite μT que l'on prolonge jusqu'à sa rencontre avec la circonférence (R) au point S, on obtient un rayon CS, parallèle à $C'M$. En tirant ensuite MT, prolongé jusqu'à sa rencontre avec CS au point O, et par o la droite ok parallèle à CM, on forme le parallèlogramme fini $OCMK$; et cette construction donne:

$$R' : R = TM : TO = C'M : CO,$$

de sorte que CO est une quatrième proportionnelle aux trois lignes R', R, $C'M$. Mais eu égard à la relation de $d\varphi'$ avec $d\varphi$, on déduit du triangle différentiel $M\Pi q$:

$$M\Pi^2 = \left(C'M^2.\frac{R^2}{R'^2} + CM^2 + 2\,CM.C'M.\frac{R}{R'}\cos C\hat{M}C'\right)d\varphi^2;$$

$$= (CO^2 + CM^2 - 2\,CM.CO.\cos O\hat{C}M)\,d\varphi^2 = OM^2.d\varphi^2.$$

partant $M\Pi = OM.d\varphi$.

Mais en désignant pour un instant par dy l'angle $M\hat{T}\Pi$, ou la quantité dont le point M tourne momentanément autour du point de contact T, on doit faire aussi:

$$M\Pi = MT.d\gamma;$$

ce qui donne:

$$d\gamma = \frac{MO}{MT}.d\varphi \quad , \quad d\gamma : d\varphi = MO : MT,$$

et comme la construction établie fournit immédiatement la proportion

$$MO : MT = R + R' : R',$$

il en résulte également: $d\gamma = d\varphi = R + R' : R' = d\varphi + d\varphi' : d\varphi$,

partant $$d\gamma = d\varphi + d\varphi' = \frac{R+R'}{R}\, d\varphi = \frac{R+R'}{R}.\, d\varphi'.$$

Ainsi, quelle que soit la position du point décrivant M sur le plan du cercle mobile, sa rotation résultante est la même, et elle vaut la somme des rotations partielles *simultanées ou successives* autour des deux centres ou pôles C, C'. Pour le cas de l'hypocycloïde rallongée ou raccourcie, on trouverait:

$$d\gamma = d\varphi + d\varphi' = \frac{R'-R}{R'}\, d\varphi = \frac{R-R'}{R'}.\, d\varphi.$$

En effet, quand on fait rouler le cercle (R') sur le cercle (R), (Fig. 3) d'un arc $TT' = R d\varphi$, le résultat du déplacement de chaque point M est le même que si l'on faisait d'abord tourner (R') autour du centre de (R) d'un angle $d\varphi$, ce qui amène le point T de (R') au point T' de (R), et qu'on fît tourner ensuite (R') sur son propre centre d'un angle $d\varphi'$ donné par la condition:

$$R' d\varphi' = R\, d\varphi.$$

Car on doit supposer ici $d\varphi'$, $d\varphi$ de signes contraires, parceque si la rotation $d\varphi$ a lieu par exemple de droite à gauche pour l'observateur fictif ayant l'oeil sur un axe normal en (C) au plan commun, il faut faire tourner le cercle (R') de gauche à droite sur lui-même, et d'un arc $R' d\varphi' = T\vartheta'$ pour amener le point ϑ' de (R') sur T' de (R), c'est-à-dire pour produire le déplacement total qui résulte du roulement instantané de (R') sur (R).

De plus, comme il est déjà démontré généralement que la ligne TM est normale à $M\Pi$, on peut prendre encore

$$M\Pi = MT.d\gamma.$$

Mais en prolongeant TM jusqu'à sa cencontre s avec (R), on peut remarquer encore que les arcs TM, TS, renfermant les mêmes nombres de degrés, les rayons CS, $C'M$ sont parallèles. En prenant donc $Mk = Cs$, on forme encore le parallèlogramme fini $CMKS$; et comme on a maintenant

$$M\Pi^2 = Mp^2 + Mq^2 - 2\,Mp.Mq.\cos C\hat{M}C',$$

pourvu que l'on considère seulement Mp comme quantité absolûe, on trouvera encore:

$$M\Pi = -Ms.d\varphi,$$

et parsuite la nouvelle valeur de dy énoncée ci-dessus. De là il est permis de conclure les propriétés suivantes:

1) Quand un cercle roule infiniment peu sur un cercle fixe, ce mouvement de roulement est l'équivalent de deux mouvements de rotation successif ou simultanés autour des centres des deux cercles, et les valeurs de ces rotations sont inversement proportionnels aux rayons des cercles;
2) Quand un corps invariable de figure, est animé de deux mouvements de rotation autour d'axes parallèles (C, C'), il se meut de la même manière que s'il n'avait qu'un mouvement de rotation unique autour d'un axe parallèle à ceux-là. Pour obtenir la position de cet axe, il faut diviser la distance des axes ou pôles partiels en parties inversement proportionnelles aux viteses angulaires partielles. La vitesse angulaire résultante, ou la rotation résultante, est égale à la somme algébrique des viteses ou rotations partielles.

§. 7.

L'analogie signalée plus haut pour la rectification de l'arc de cycloïde rallongée et raccourcie, se maintient dans le cas actuel pour l'arc courbe décrit par un point extérieur ou intérieur à la circonférence du cercle mobile. En effet, puisque l'on a (Fig. 4) $ds = M\Pi$, ou $ds = MT.dy$, et que le triangle TCM donne

$$TM^2 = a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi', \text{ il vient:}$$

$$ds = \frac{R \pm R'}{R} d\varphi'.\sqrt{(a^2 + R'^2 - 2aR'\cos\varphi)},$$

et si l'on prend $\varphi' = 180° - 2\lambda$, $\frac{4aR'}{(a+R')^2} = c^2$, on aura:

$$ds = -\left(\frac{R \pm R'}{R}\right).2(a+R').d\lambda.\sqrt{(1-c^2\sin^2\lambda)}$$

d'où $$s = \left(\frac{R \pm R'}{R}\right).\text{arc}\,\mu A\mu'. \text{(Fig. 4)}.$$

Les demi-axes de l'ellipse sont encore $a + R'$, et $\pm(a - R')$, selon que $a - R' >$ ou < 0. On peut dire encore que l'axe d'épicycloïde raccourcie ou rallongée, étant reduit au préalable dans le rapport de R à $R \pm R'$, équivaut au double de l'arc d'ellipse commençant au sommet du grand arc, et terminé au point dont les coordonnées sont $a + R'.\cos\frac{1}{2}\varphi'$, $a - R'.\sin\frac{1}{2}\varphi'$.

§. 8.

Epicycloïde sphérique, naturelle, rallongée et raccourcie.

Comme la considération du mouvement cycloïdal dans un plan, combinée avec la loi primordiale de la composition des mouvements, conduit par une voie simple et naturelle à la composition des rotations autour d'axes parallèles, et à sa réciproque, on est nécessairement amené à rechercher l'origine du principe de la composition des mouvements de rotation autour de deux axes qui se coupent, dans le mouvement de roulement d'un cône sur un cône fixe. C'est ce qui nous oblige de reprendre par quelques notions géométriques, à la vérité fort simples et même un peu rebattues; mais la marche que nous croyons devoir suivre, se justifiera par les résultats mêmes auxquels nous parviendrons.

Supposons q'un cercle mobile (R') roule sur la circonférence d'un cercle fixe (R) d'après la condition que l'angle A qui mesure l'inclinaison de leurs plans reste constant. La ligne courbe décrite par un point quelconque du plan mobile sera généralement celle qu'on peut nommer épicycloïde *raccourcie* ou *rallongée*, selon que le point décrivant est à une distance a du centre mobile, plus grande ou plus petite que le rayon R'. Dans tous les cas la courbe ainsi décrite est sphérique, c'est-à-dire qu'elle a tous ses points également éloignés d'un même point fixe de l'espace.

Soient (Fig. 5) C, C' les centres des deux cercles, R, R' leurs rayons; aux centres élevons aux plans des cercles des perpendiculaires CK, $C'K$ qui se couperont en un point K. En nommant en effet T le point de contact actuel de $(R)(R')$, et tirant les diamètres TCB, $TC'B'$, on détermine dans l'espace un plan $B'TB$ normal à $\vartheta\vartheta'$, tangente commune aux deux cercles, et ligne d'intersection de leurs plans; ce qui fait que $CTC' = A$ mesure leur inclinaison mutuelle. Or en élevant dans le plan CTC' ainsi déterminé, une droite pependiculaire à TC, elle croisera $\vartheta\vartheta'$ sous un angle droit, puisque celle-ci est normale au plan CTC'. Cette droite est parconséquent normale en C au plan de (R), et se trouve parsuite identique avec l'axe CK du cône droit ayant (R) pour cercle de base. On verrait de même que la perpendiculaire élevée en (C') à $C'T$ coïncide avec l'axe $C'K$ du cône droit ayant (R') pour cercle de base; ainsi ces deux axes se trouvent dans le même plan $C'TC$ et se coupent par conséquent en un point K, centre du cercle passant par B, T, B'.

Si l'on prend K pour sommet commun de deux cônes droits de bases (R, R') et ayant une tangente commune KT, et qu'on fasse rouler le cône $(C'K)$ sur le cône fixe (CK), chaque point du plan (R') décrit encore la courbe défi-

nie plus haut, puisque dans ce mouvement le plan de (R') ne cessera pas de se mouvoir d'après la condition prèscrite.

§. 9.

Étant donnés les rayons des cercles R, R', et l'angle A de leurs plans: déterminer les hauteurs H, H' des deux cônes correspondants, et la longueur $KT = L$ de leur génératrice commune. On trouve aisément (Fig. 6.):

$$H . \sin A = R' - R \cos A \quad , \quad H' . \sin A = R - R' \cos A \; ;$$
$$L . \sin A = \sqrt{(R^2 + R'^2 - 2RR' . \cos A)}.$$

De la valeur de H' on conclut aisément, dans l'hypothèse de $R' < R$ que cette hauteur est toujours positive quel que soit A; mais que la hauteur H est positive pour les valeurs de A comprises centre 180° et A', A' étant donné par la condition $\cos A' = R' : R$, que $H = 0$ pour $A' = A$, ce qui fait degénérer le cône fixe en un plan; et que H devient négatif pour les valeurs de A comprises entre A' et 0°. Dans l'hypothèse de $R' > R$, la hauteur H est toujours positive; mais celle H' est positive entre les limites 180° et A'' de A, A'' étant donné par la condition $\cos A'' = R : R'$; elle est nulle pour $A = A''$, et négative pour $A < A''$ et > 0. Les limites $A = 0$, et 180° peuvent être exclues, comme présentant des cas déjà examinés.

Dans le cas de H, H' positifs à la fois, les deux cercles ou cônes sont extérieurement tangents l'un à l'autre, et les courbes décrites seront *extérieures* ou *raccourcies*.

Dans celui de H' positif et de H négativ, le sommet K tombe au dessous du plan de (R), et le cône mobile roulera à l'intérieur du cône fixe; ou bien le cercle mobile $(R') < (R)$ tournera à l'intérieur d'un cercle fixe plus grand. Dans le cas de $R' > R$, de H' négatif et de H positif, les deux cercles se touchent aussi intérieurement; mais c'est le cône le plus ouvert qui roulera sur l'autre.

Les cas de $A = A'$ et de $A = A''$, sont aussi très différents l'un de l'autre. Quand $A = A'$ c'est un cône mobile qui roule sur un plan fixe; et quand $A = A''$, c'est au contraire un plan circulaire tangent au cône qui roulera autour de celui-ci.

On peut faire remarquer encore qu'en nommant M le point décrivant, situé dans le plan du cercle mobile (R'), et tirant la droite $KM = D$, on forme un triangle KMC' qui dans son mouvement conserve les deux côtés KC', MC de l'angle droit constants; ce qui fait que la courbe du point M se trouve en effet sur une sphère de centre K et d'un rayon D qui a la valeur

$$D = \sqrt{(a^2 . \sin^2 A + (R - R' \cos A')^2)} : \sin A.$$

Seulement cette sphère est plus grande ou plus petite que celle sur laquelle est tracée l'épicycloïde naturelle, selon que $a >$ ou $< R'$, c'est-à-dire selon que la courbe est *raccourcie* ou *rallongée.*

Pour mieux fixer les idées nous raisonnerons dans ce qui suit, dans la supposition de $a > R$, et d'un angle A obtus, ou du moins de H, H' positifs à la fois.

§. 10.

On suppose que le cône mobile ait roulé sur le cône fixe d'une quantité qui correspond à un angle de rotation φ autour de l'axe fixe CR; ce qui exige que la circonférence (R') ait déroulé sur la circonférence (R) un arc $R'\varphi' = R.\varphi$, ou que le cône mobile ait tourné sur son axe $C'K$ d'un angle φ'. On demande de déterminer la position actuelle du point décrivant et ses distances aux axes CK, $C'K$ et à l'arête de contact TK, dans l'hypothèse qu'à l'origine du mouvement, il se soit trouvé sur le rayon prolongé $C'O$, mené de C' au point d'attouchement de (R') avec (R).

Soit O (Fig. 6) ce dernier point. Par le centre C tirons sous un angle φ avec CO une droite CT, ce qui détermine T; par T menons $TC'B'$ et sur la circonférence (R') prenons dans un sens convenable un arc $R'\varphi'$ ou $T\mu$ égal à l'arc $OT = R\varphi$. En prenant sur le rayon $C'\mu$ prolongé une longueur $C'M = a$, on obtient la position du point M: de plus la distance normale MC' étant constamment la même, il reste à déterminer les perpendiculaires abaissées de M sur les axes CK, TK, savoir MX, MF. Or en tirant dans le plan (R') une droite MV normale à la droite $TC'B'$, on obtient d'abord (Fig. 6.)

$$MV^2 = MV^2 + TV^2 = a^2 \sin^2\varphi' + (R' - a\cos\varphi')^2,$$

et comme le plan $C'KCT$ ne cesse pas d'être à angle droit avec le plan $TC'M$ qui est entraîné avec M autour de $C'K$, on aura aussi:

$$MF = MT.\sin M\hat{T}K = MT.\sqrt{(1 - \cos^2 M\hat{T}C'.\sin^2 C'\hat{K}T)} = MT.\sqrt{\left(1 - \sin^2\tfrac{1}{2}\varphi'.\frac{R'^2}{L^2}\right)},$$

pour $KT = L$; ce qui donne:

$$MF + \sqrt{(a^2 + R'^2 - 2aR'\cos\varphi')}.\sqrt{\left(1 - \frac{R'^2}{L^2}.\sin\tfrac{1}{2}\varphi\right)}.$$

Pour construire la distance MX à l'axe CK, on n'a plus qu'à abaisser du point V une perpendiculaire VX sur CK, et joindre les points MX; et comme on a (Fig. 6):

$MV = a.\sin\varphi'$, $VX = C'L' - VC'.\cos A = R - R'\cos A + a\cos\varphi'.\cos A$, on obtient:

$$MX = \sqrt{(a^2.\sin^2\varphi' + (R + a\cos\varphi' - R'\cos A)^2)}.$$

On trouverait aussi aisément les coordonnées rectangles du point M, rapporté d'abord aux axes TC, CK et à une normale en C au plan KCT; et pour les avoir par rapport à trois axes fixes à la fois, on n'aurait plus qu'à passer de celles-là aux axes CO, CK et à une normale au plan de ceux-ci.

§. 11.

Pendant que le cône mobile roule infiniment peu sur le cône fixe, l'axe $C'K$ avec tout ce qu'il entraîne, tourne autour de CK d'un angle $d\varphi$, tandis que le point mobile M décrit en même temps sur l'axe $C'K$ un angle $d\varphi'$ et un arc $a\,d\varphi'$. Ainsi, en figurant par Mp, Mq les chemins partiels du point M autour des axes $C'K$, CK, et dirigés suivant les tangentes en M aux circonférences $(MC')(MX)$, on aura (Fig. 7.):

$$Mp = a\,.\,d\varphi' \quad , \quad Mq = MX\,.\,d\varphi = MX\,.\,\frac{R'}{R}\,.\,d\varphi\,,$$

Il s'agit de trouver la direction et la grandeur du chemin résultant unique $M\Pi$ diagonale du parallèlogramme élémentaire construit sur (Mp, Mq). On peut faire observer d'abord que la première Mp étant dirigée suivant la tangente à la circonférence (MC'), la droite KM est à angle droit avec Mp, partant que la droite Mp, normale à MK, MC', l'est parconséquent aussi au plan KMC'. De même la droite Mq est normale au plan $KMCX$; de plus les trois points K, M, T déterminent un plan intermédiaire KMT dont la position doit être liée à la direction du chemin résultant $M\Pi$.

D'abord le triangle $Mp\Pi$ donne:

$$Mp : Mq \text{ ou } a : MX\,.\,\frac{R'}{R} = \sin(q\hat{M}p - \Pi\hat{M}p) : \sin \Pi\hat{M}p;$$

ou bien, en remarquant que l'angle $q\hat{M}p$ mesure l'inclinaison η des deux plans KMC, KMC':

$$a : MX\,.\,\frac{R'}{R} = \sin(\eta - \Pi\hat{M}p) : \sin \Pi\hat{M}p\,.$$

Mais en concevant autour du centre K une sphère de rayon 1, on voit que les trois plans dont il s'agit, la coupent suivant des arcs de grand cercle XY, YZ, Yu qui mesurent les angles $M\hat{K}C$, $M\hat{K}C'$, $M\hat{K}T$; et l'arc xz, troisième coté du triangle sphérique xyz, mesure l'angle $C'KC$; de plus l'angle sphérique en y est égal à l'inclination dièdre η. Or la figure sphérique donne:

$$\sin uz : \sin uy = \sin z\hat{y}u : \sin \hat{z}\,,$$
$$\sin uy : \sin ux = \sin \hat{x} : \sin xyu,$$

donc $$\sin uz : \sin ux = \sin x . \sin zyu : \sin z . \sin xyu$$
$$= \sin zy . \sin zyu : \sin xy . \sin xyu$$
$$= \sin M\hat{K}C' . \sin zyu : \sin MKC . \sin xyu$$
$$= a . \sin zyu : MX . \sin(\eta - z\hat{y}u),$$

et puisqu'on a $\sin uz = \frac{R'}{KT}$, $\sin ux = \frac{R}{KT}$, il vient:

$$R' : R = a . \sin zyu : MX . \sin(\eta - z\hat{y}u).$$

En combinant convenablement cette proportion avec la première, on obtient cette autre:

$$\sin(\eta - \Pi\hat{M}p) \sin : \Pi\hat{M}p = \sin(\eta - z\hat{y}u) : \sin z\hat{y}u,$$

et celle-ci démontre que l'angle zyu qui mesure l'inclinaison du plan $K\hat{M}T$ sur le plan KMC, est égal à l'angle de $M\Pi$ avec Mp. Puisque donc cette dernière ligne est normale au plan KMC', il faut que $M\Pi$, déjà perpendiculaire à l'intersection KM' (puisqu'il se trouve dans le plan qMp), soit de son côté normal au plan KMT.

Nous voilà donc parvenu à cette propriété que nous ne sachions pas encore avoir été établie ni démontrée d'une manière générale:

Quand une cône roule sur un autre cône fixe, un point quelconque, invariablement lié au cône mobile, et partant entraîné avec lui, décrit pendant chaque instant un chemin virtuel, normal au plan que déterminent la position actuelle du point mobile et l'arête de contact actuelle des deux cônes.

§. 12.

Puisqu'il est reconnu ainsi, que le mouvement résultant et momentané du point générateur se fait normalement au plan MKT, on peut admettre, du moins pour ce point, qu'il tourne autour de l'axe instantané KT, et faire en conséquence:

$$M\Pi = MF . d\lambda;$$

$d\lambda$ marquant l'angle de rotation correspondant. Mais on a d'un autre coté:

$$M\pi^2 = a^2 . d\varphi'^2 + MX^2 . d\varphi^2 + 2a . MX . \cos y . d\varphi . d\varphi'$$

$$\text{ou } MF^2 . d\lambda^2 = \left(a^2 \frac{R^2}{R'^2} + MX^2 + 2a . \frac{R}{R'} . MX . \cos\eta\right) d\varphi^2 .$$

En posant donc pour abréger les réductions:

$$z\hat{y}x = \eta\ , \quad u\hat{y}x = \eta'\ , \quad u\hat{y}z = \eta''\ , \quad \eta' + \eta'' = \eta\ ,$$
$$CKT = \alpha\ , \quad C'KT = \alpha'\ , \quad CKC' = \alpha + \alpha'\ ,$$

on obtient, eu égard à la proportion du (§. 11):

$$MX = a.\frac{R}{R'}\cdot\frac{\sin\eta''}{\sin\eta'} = a\,.\,\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\eta''}{\sin\eta'}\ ,$$

partant $MF^2.d\lambda^2 = a^2.\frac{\sin\alpha^2}{\sin\alpha^{2\prime}}\left(1+\frac{\sin^2\eta''}{\sin^2\eta'}+2\cos\eta.\frac{\sin\eta''}{\sin\eta'}\right)d\varphi^2\ ,$

et parsuite, en vertu de $\eta'' = \eta - \eta'$:

$$MF.d\lambda = a\,.\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}\right)\frac{\sin\eta}{\sin\eta'}\,.\,d\varphi\ .$$

En substituant pour MF la valeur D sin$.uy$, et pour a celle $D.\sin yz$, on a:

$$\sin uy\,.\sin\eta'.\,d\lambda = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}.\sin yz.\sin\eta.\,d\varphi.$$

La figure sphérique xyz donne d'ailleurs:

$$\sin yz.\sin\eta = \sin x.\sin xz = \sin x.\sin(\alpha+\alpha'),$$

d'où résulte: $\frac{\sin uy.\sin\eta'}{\sin x}.d\lambda = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}.\sin(\alpha+\alpha').d\varphi,$

et comme on a aussi:

$$\sin x : \sin uy = \sin\eta' : \sin ux \quad \text{ou} \quad \sin\alpha = \frac{\sin uy\,.\sin\eta'}{\sin x}\ ,$$

on obtient finalement:

$$d\lambda = \frac{\sin(\alpha+\alpha')}{\sin\alpha'}.d\varphi = \frac{\sin(\alpha+\alpha')}{\sin\alpha}.d\varphi.$$

On voit par là que quelle que soit la position du point décrivant, invariablement lié au cône mobile, sa rotation instantanée autour de l'arête de contact avec le cône fixe, reste la même, et qu'elle dépend uniquement de chaque rotation partielle et des deux ouvertures angulaires des cônes. De plus, la loi de la rotation résultante en fonction des rotations partielles et des angles de leurs axes et de ceux qu'ils forment avec l'axe résultant, est absolument la même que celle de la composition de deux forces à directions concourantes.

L'axe résultant KT divise en effet l'angle total $\alpha+\alpha' = 180^0 - A$ des deux axes KC, KC' en deux parties angulaires dont les sinus sont inversement aux vitesses ou rotations angulaires partielles, censées données; car on a:

$$\sin\alpha : \sin\alpha' = R : R' = \frac{d\varphi'}{dt} : \frac{d\varphi}{dt} = d\varphi' : d\varphi.$$

Ensuite la vitesse angulaire résultante est à la vitesse angulaire autour du premier axe partiel, comme le sinus de l'angle entre les deux axes partiels est au sinus de l'angle de l'axe résultant avec le second axe partiel.

Autrement dit: La diagonale du parallèlogramme construit sur les deux axes partiels sur lesquels on prend des longueurs égales aux vitesses angulaires correspondantes, représente par sa longueur la vitesse angulaire résultante, et par sa direction celle de l'axe résultant.

En concevant d'après cela qu'on fasse tourner un corps solide successivement ou simultanément autour de n axes KC_1, KC_2, KC_3 ..... K_nC, avec de vitesses angulaires Ω_1, Ω_2, Ω_3 ..... Ω_n, tout ce passe de la même manière, quant au résultat du déplacement final produit, que si le solide tournait instantanément autour d'un axe unique en K d'une certaine direction KM, et avec une certaine vitesse angulaire Ω.

Quant à la direction K_1M, on l'obtient en portant sur KC_1 une longueur $KC_1 = \Omega_1$, sur KC_2 une longueur $KC_2 = \Omega_2$, ... sur KC_n une longueur $KC_n = \Omega_n$, et tirant par K au centre M_1 des moyennes distances des n extrêmités C_1, C_2 ..... C_n une droite indéfinie qui marquera la position de l'axe résultant, la vitesse angulaire résultante Ω sera représentée par n fois la distance du point K au centre M_1: $\Omega = n.KM_1$, et la rotation instantanée résultante sera $n.KM_1.dt$, autour de l'axe KM_1.

§. 13.

Quant à la valeur du chemin absolu $ds = M\pi = MF.d\lambda$, il convient de s'y arrêter un instant, eu égard à ce qui a lieu pour le cas des cycloïdes planes. Or les valeurs de MF (§. 10) et de $d\lambda$ (§. 12) donneront immédiatement:

$$ds = \frac{\sin(\alpha+\alpha')}{\sin\alpha} d\varphi'.\sqrt{[(a^2+R'^2-2aR'\cos\varphi')(1-\sin^2\alpha'.\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi')]}\,.$$

ou en prenant: $\quad \dfrac{2aR'}{a^2+R'^2} = p^2 \quad , \quad \tfrac{1}{2}\sin^2\alpha' = q^2$:

$$\frac{ds}{\sqrt{(a^2+R'^2)}}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\alpha')} = d\varphi'.\sqrt{[(1-p^2\cos\varphi')(1-q^2+q^2\cos\varphi')]}\,.$$

Multipliant et divisant le second membre par la quantité radicale, et prenant $\tang\frac{1}{2}\varphi = x$, on voit bien que la recherche de s est réduite aux trois fonctions elliptiques à les fois. Mais il doit y avoir une marche de transformation plus simple, et de certains cas particuliers encore étendus où cette reduction se ramène à l'une seulement de ces fonctious

Dans le cas tout spécial de l'epicycloide naturelle, on a, en prenant $\sin\frac{1}{2}\varphi' = x\sin\alpha' = q'$:

$$\frac{ds}{2R'}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin A} = d\varphi'.\sin\tfrac{1}{2}\varphi'\sqrt{.(1-q'^2.\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi')} = 2x.dx.\sqrt{\left(\frac{1-q'^2x^2}{1-x^2}\right)}$$

et

$$\frac{s}{2R}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\text{Const}-\sqrt{(1-x^2)}.\sqrt{(1-q'^2x^2)}+\tfrac{1}{2}\left(q'-\frac{1}{q'}\right)\text{Log.}\frac{q'\sqrt{((1-x^2)}+\sqrt{(1-q'^2x^2)^2)}}{q'^2-1}\;.$$

Cette rectification se trouve effectuée aussi dans l'ouvrage de Mr. *Eytelwein.* (Statik fester Körper. Tome III).

Pour le cas de $A=180°$, la transformation qui substitue $\sin\alpha$, $\sin\alpha'$, aux quantités R, R', devient illusoire puisqu'alors $\alpha=0$, $\alpha'=0$. Pour le cas de $\frac{4aR'}{(a+R')^2}=\sin^4\alpha'$, on obtient:

$$\frac{ds}{a+R'}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin A}=d\varphi'.\sqrt{(1-\sin^4\alpha'.\sin^4\tfrac{1}{2}\varphi')}.$$

§. 14.

Tout mouvement virtuel de roulement d'une courbe plane sur une autre courbe plane, n'est autre qu'une rotation instantanée des divers points du plan de la première courbe, autour de son point de contact actuel avec la seconde courbe. Tout se passe en effet de la même manière que si les cercles osculateurs des deux courbes, relatifs à ce point de contact, roulaient infiniment peu l'un sur l'autre.

On conçoit aisément ce qui a lieu quand les deux courbes sont dans des plans différents; et ce qui doit arriver quand une courbe à double courbure (C') doit rouler sur une courbe (C) de cette espèce, d'après la condition que l'angle des plans osculateurs, relatifs au point de contact, ne change pas. Tout se passera encore de la même manière pendant un instant, que si le cercle osculateur de (C') roulait sur celui de la courbe (C). Ainsi, en cherchant le point de rencontre K des deux perpendiculaires aux centres des plans de ces cercles, on aura KT pour la direction de l'axe résultant et pour l'arête de contact des deux cônes correspondants.

Nous ferons rémarquer finalement, que le principe de la composition des mouvements de rotation étant une fois établi, on en peut déduire aisément toute la théorie des mouvements infiniment petits des figures planes dans leurs plans, et des corps solides pourvus d'un point fixe ou entièrement libres. A cet effet on n'a qu'à reduire le déplacement dans un plan à un mouvement de transport et à une rotation élémentaire, ce qui d'après le (§. 2) se réduit à une rotation unique. Dans l'espace une réduction analogue a lieu; car quand le solide est pourvu d'un point fixe, tout déplacement possible est effectué par deux rotations successives

ou simultanées; et quand le solide est libre, on peut commencer par opérer la superposition de deux points homologues quelconques (o, o') du solide pris dans deux positions infiniment voisines, en lui imprimant un simple mouvement de transport, égal et parallèle pour tous ses points à la ligne oo'; le reste s'achevera comme pour le cas d'un point fixe dans le solide.

Nota. Des développements plus étendus sur cette matière nous paraissent superflus, d'autant plus qu'elle a été envisagée assez recemment par divers géomètres, et que nous l'avons également touchée déjà dans un mémoire de 1848 destiné au présent journal. Mais à ce qui précède, nous croyons devoir ajouter un dernier paragraphe, où nous exposerons une autre méthode d'envisager la question des rotations concourantes; méthode dûe à Mr. *E. Biver*, notre ami et ancien élève de l'école militaire.

§. 15.

Soit un point P assujetti à tourner à la fois autour de deux axes de rotation AC, AC' (Fig.8.) qui se coupent en A, avec des vitesses angulaires ω, ω'. Si nous abaissons Pp perpendiculairement au plan des axes, pC, pC', et perpendiculairement à ces lignes AC, AC': les plans PCp, $PC'p$ séront perpendiculaires aux axes de rotation, et CP, $C'P$ seront les rayons des arcs infiniment petits, parcourus par P autour de AC, AC', dans un temps dt. Soient PM, PM' ces arcs, se confondant avec leurs tangentes, et perpendiculaires à CP, $C'P$. Daprès la loi de composition des mouvements rectilignes, le point P décrira évidemment dans le temps dt la diagonale PN du parallèlogramme $MPM'N$.

Projetons maintenant les points M, M', N sur le plan des axes en m, m', n: nous formerons un nouveau parallèlogramme $mpm'n$ dont la diagonale pn sera la projection de PN; et si nous menons AO, perpendiculaire à pn dans le plan horizontal des axes, cette ligne sera perpendiculaire au plan projetant vertical $NPpn$. La sphère qui aurait A pour centre et AP pour rayon, serait coupée par les plans PCp, $PC'p$, POp suivant trois petits cercles de centres C, C', O, respectivement. Les éléments PM, PM', faisant partie de deux de ces cercles, déterminent donc un plan tangent à la sphère, et par suite l'élément PN, situé à la fois dans ce plan tangent $MPM'N$ et dans le plan Pop du petit cercle de centre O, fait partie de ce petit cercle. Donc le chemin résultant PN est un arc de cercle décrit autour d'un axe AO avec un rayon OP; désignons par Ω la vitesse angulaire de cette nouvelle rotation.

Les chemins angulaires décrits par P autour des trois axes dans le temps dt étant ωdt, $\omega' dt$, et $\Omega.dt$, les chemins absolus seront:

$$PM = \omega dt.PC \quad ; \quad PM' = \omega' dt.PC' \quad ; \quad PN = \Omega.dt.PO.$$

La projection de PM est évidemment:

$$pm = PM\cos(PM\hat{,}pm) = PM\sin(CP\hat{,}pm) = \omega dt.PC.\sin PCp = \omega dt.Pp.$$

On trouve de même:

$$pm' = \omega' dt.Pp \quad ; \quad pn = \Omega dt.Pp$$

Portons sur AC une longueur $AQ = \omega$, et achevons le parallèlogramme $AQTQ'$. D'après les constructions faites, les triangles AQT, pmn, ont leurs côtés perpendiculaires chacun-à-chacun, et sont semblables; on a ainsi:

$$QT:AT = mn:pn, \quad \text{ou} \quad AQ':AT = \omega':\Omega$$

et $$AQ:AT = pm:pn, \quad \text{ou} \quad AQ:AT = \omega:\Omega,$$

ce qui nous montre que $AT = \Omega$, et $AQ' = \omega'$. On en conclut que l'axe AOT coïncide avec la diagonale du parallèlogramme construit sur les axes AC, AC', avec des longueurs ω, ω'; qu'ensuite la direction de cet axe, étant donc indépendante de la position particulière du point P', ainsi que la vitesse angulaire Ω, cet axe et cette vitesse sont les mêmes pour tous les points mobiles, assujettis au même double mouvement; donc α..... etc.

Bruxelles, ce 1 Juin 1851.

3.

Note sur le §. 6 du mémoire No. 9. inséré dans le tome 43 de ce journal.

(Par Mr. *Steichen*, professeur à l'école milit. à Bruxelles.)

Dans la *rémarque II du §. cité* j'ai admis que les formules qui donnent la direction de l'axe d'ébranlement du solide, conservent la même forme simple qu'elles ont pour les axes permanents du point fixe (O), alors même qu'on passe à d'autres axes rectangles quelconques Ox', Oy', Oz'.

Cette assertion n'est pas exacte. Néanmoins il existe outre le centre de percussion donné par la théorie ordinaire, une autre solution de la question que le §. 6 ne fournit que par le moyen de certaines modifications que je vais indiquer.

C'_1, B'_1, A'_1, étant toujours les angles de l'axe d'ébranlement OK avec des axes rectangles arbitraires (Ox', Oy', Oz'), et $d\xi$ la rotation résultante; $d\psi'$, $d\omega'$, $d\varphi'$ ses composantes autour de ces axes. Posons, pour abréger l'écriture:

$$\frac{2d\xi}{dt^2} = \xi' \ , \ \frac{2d\psi'}{dt^2} = \psi' \ , \ \frac{2d\omega'}{dt^2} = \omega' \ , \ \frac{2d\varphi'}{dt^2} = \varphi' \ ,$$

et nous aurons (page 187) pour les composantes rectangles au point (x', y', z') de la molécule dm, provenant de sa réaction d'inertie, les valeurs suivantes:

$$d.\Pi_{x'} = \omega'.z'dm - \varphi'.y'dm,$$
$$d.\Pi_{y'} = \varphi'.x'dm - \psi'.z'dm,$$
$$d.\Pi_{z'} = \psi'.y'dm - \omega'.x'dm.$$

De là on conclut aisément que le moment $d\Pi_{x'}y' - d\Pi_{y'}x'$ de cette force élementaire a la valeur autour de l'axe Oz':

$$\omega'.y'z'dm - \varphi'(y'^2 + x'^2)dm + \psi'x'z'dm;$$

ce qui donne pour la somme des moments des réactions d'inertie autour de l'axe Oz' la valeur suivante:

$$\mathfrak{M}_{z'} = \psi'\int x'z'dm + \omega'\int y'z'dm - \varphi'\int(y'^2 + x'^2)dm \ .$$

Si donc on désigne par A', B', C' les moments d'inertie du solide, relatifs à Ox', Oy', Oz', et que l'on fasse en outre

$$\int x'y'dm = g \quad , \quad \int y'z'dm = h \quad , \quad \int z'x'dm = k \, ,$$

on obtiendra pour les valeurs des moments des réactions autour des axes Oz', Ox', Oy', les formules:

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{M}_{z'} = k.\psi' + h.\omega' - C'.\varphi' \\ \mathfrak{M}_{x'} = g.\omega' + k.\varphi' - A'.\psi'\end{array}\right\} \mathfrak{M}_{y'} = h.\varphi' + g.\psi' - B'.\omega' \, .$$

Or puisqu'il y a équilibre entre l'action et les réactions d'inertie tangentielles (car les réactions d'inertie normales n'existent pas encore pendant l'instant du mouvement naissant, ou sont du moins insensibles): il faut que la somme des moments de ces forces autour de chaque axe coordonné en (O), soit nulle. Cela donne les équations nécessaires et suffisantes:

$$\mathfrak{M}_{x'} + N' = 0 \quad , \quad \mathfrak{M}_{y'} + M' = 0 \quad , \quad \mathfrak{M}_{z'} + L' = 0 \, ,$$

ou bien

(1.) $A'\psi' - g\omega' - k.\varphi' = N'$, $B'.\omega' - h.\varphi' - g\psi' = M'$, $C'.\varphi' - k\psi' - h.\omega' = L'$,

et l'intégration donne immédiatement pour les composantes totales des forces d'inertie elles-mêmes:

(2.) $\Pi_{x'} = \omega'.\mu.z'_1 - \varphi'.\mu.y'_1$; $\Pi_{y'} = \varphi'.\mu.x'_1 - \psi'.\mu.z'_1$; $\Pi_{z'} = \psi'\mu y'_1 - \omega'\mu x'_1$.

μ exprime la masse du solide, et $x'_1\, y'_1\, z'_1$ sont les coordonnées du centre d'inertie à l'instant de l'ébranlement.

On voit sur le champ par les formules (1) que l'on peut seulement avoir:

$$\frac{2d\psi}{dt^2} = \frac{N}{A} \, , \quad \frac{2d\omega}{dt^2} = \frac{M}{B} \, , \quad \frac{2d\varphi}{dt^2} = \frac{L}{C} \, ,$$

quand les axes coordonnés coïncident avec les axes permanents en (O) pour lesquels les lettres non-accentuèes ont la même signification que les accentuées, par rapport aux trois axes (Ox', Oy', Oz'), et dès lors seulement aussi les formules (2) donneraient:

$$\Pi_x = \frac{M}{B}.\mu z_1 - \frac{L}{C}.\mu y_1 \quad , \quad \Pi_y = \cdots\cdots \quad , \quad \Pi_z = \cdots\cdots$$

Si donc il y a en dehors de la solution de la théorie ordinaire, une autre solution encore, il faut que l'analyse précédente, expimant le tout sous une forme générale, la fournisse. Or en nommant P la force agissante et (α, β, γ) sa direction, il faut d'abord que l'on ait:

$$\Pi_{x'} + P\alpha = 0 \quad , \quad \Pi_{y'} + P.\beta = 0 \quad , \quad \Pi_{z'} + P.\gamma = 0$$

afin d'avoir une percussion nulle sur le point fixe (O); car l'axe d'ébranlement ne saurait souffrir évidemment d'autre effort qu'en ce point. Mais nous voyons

qu'en dirigeant les axes (Ox', Oy', Oz') restés jusqu'ici arbitraires, le premier suivant l'axe OI, qui joint le point fixe au centre I, et les deux autre d'abord dans le plan normal, on obtient $y_1' = 0$, $z_1' = 0$, partant $\Pi_{x'} = 0$: et de là résulte $P\alpha = 0$, ou $\alpha = 0$; ce qui prouve que la force P doit croiser la ligne OI sous un angle droit. Si donc on choisit l'axe Oy' parallèle à la ligne de P, on obtient en outre $\beta = 1$, $\gamma = 0$; partant:

$$P + \Pi_{y'} = 0 \quad , \quad \text{et } \Pi_{z'} = 0 .$$

Substituant dans ces expressions les valeurs de $\Pi_{y'}$, $\Pi_{z'}$ données par les formules (2), dans l'hypothèse de $y_1' = 0$, $z_1' = 0$, on en déduit:

$$(\text{a.}) \qquad P + \varphi'\mu . x_1' = 0 , \text{ et } \omega' = 0 .$$

En outre la même disposition des axes coordonnés, donne, en nommant (a, b, c) ou simplement (a, c) les coordonnées du point d'àpplication de la force P: $L' = P(\alpha.b - \beta.a) = -Pa$, $N' = P(\beta c - \gamma b) = P.c$, $M' = P(\gamma a - \alpha c) = 0$; ainsi aux deux conditions (a) il faut joindre cette troisième:

$$(\text{b.}) \qquad M' = 0 .$$

Par cette dernière (b) et la dernière (a) les équations (1) deviennent:

$$(\text{c.}) \quad A'\psi' - k\varphi' = P.c \quad , \quad h.\varphi' + g\psi' = 0 \quad , \quad C'.\varphi' - k.\psi' = -P.a$$

Les deux dernières donneront les valeurs

$$\varphi' = -\frac{Pag}{C'g + hk} \quad , \quad \psi' = +\frac{P.a.h}{C'g + h.k} \quad , \quad \xi' = \frac{P.a.\sqrt{(g^2 + h^2)}}{C'g + h.k}$$

$$\cos C'_1 = \frac{\psi'}{\xi'} = \frac{h}{\sqrt{(g^2 + h^2)}} \quad , \quad \cos A'_1 = -\frac{g}{\sqrt{(g^2 + h^2)}} \, , \quad \cos B'_1 = \omega' : \xi' = 0 .$$

En substituant les valeurs de φ', ψ' dans la première (C), on obtient entre a et c la condition:

$$(\text{d.}) \qquad (C'g + h.k).c - (A'h + gk)a = 0 .$$

Enfin portant dans la première (a) la valeur de φ', on en tire:

$$(\text{e.}) \qquad a = \frac{C'.g + hk}{\mu.g.OI} \quad , \quad \text{d'où} \quad c = \frac{A'h + gk}{\mu.g.OI} ;$$

car l'abscisse x_1' est évidemment mesurée par la droite OI. Ainsi donc, pour avoir un effort d'action et de réaction nul sur le point fixe donné, il faut faire agir la force suivant une direction qui croise l'axe OI sous un angle droit; ce qui revient à la diriger normalement à un plan quelconque P mené suivant la droite OI. En nommant Oy' la normale en (O) à ce plan P, et Oz' un axe situé dans P et rectangle avec OI, on évaluera les quantités $g = \int x'y'dm'$ $h = \ldots\ldots, k = \ldots$ relatives à ces axes; on calculera ensuite A', C' par la règle connue, et par les formules (e) on obtient enfin les coordonnées (a, c) du centre de percussion dans

le plan P, où il faut faire agir la force pour avoir une secousse absolument nulle sur l'axe et sur le point fixe donné. Ces conditions étant satisfaites, on voit que l'axe d'ébranlement est toujours situé dans le plan P auquel la force est perpendiculaire.

Enfin pour prouver par une simple vérification que la solution nouvelle diffère essentiellement de celle de la théorie ordinaire, quoique dans l'une comme dans l'autre la force doive agir suivant une direction perpendiculaire au plan central mené par l'axe de rotation, il suffit de considérer que dans le cas actuel l'axe OH du moment principal de la force fait avec les axes coordonnés Ox', Oz' des angles de cosinus $c:\sqrt{(a^2+c^2)}$, et $-a:\sqrt{(a^2+c^2)}$, tandis que l'axe OK fait avec ces axes des cosinus d'angle $h:\sqrt{(g^2+h^2)}$, $-g:\sqrt{(g^2+h^2)}$, de sorte que les deux droites OH, OK n'ont en général que le seul point (O) de commun; mais dans la solution ordinaire elle coïncident ensemble, et forment un axe permanent du solide au point fixe.

Si l'on resout les équations (1) par rapport aux quantités ψ', ω', φ', on trouve:

$$\psi' = \frac{n(B'C'-h^2)+m(C'g+hk)+l(B'k+gh)}{A'B'C'-A'h^2-B'k^2-C'g^2-2ghk}\;, \quad \omega' = \dots\dots\;, \quad \varphi' = \dots\dots$$

Mais on peut aussi d'un autre coté obtenir ces mémes quantités à l'aide de celles $\psi = \frac{N}{A}$, $\omega = \frac{M}{B}$, $\varphi = \frac{L}{C}$, et du principe de la composition des rotations rectangulaires. En égalant ainsi ces doubles valeurs de chaque quantité ψ', ω', φ', on obtiendrait trois équations de condition générales entre A, B, C, A', B', C', g, h, k, N, M, L, et neuf coëfficients de direction, lesquelles devraient subsister pour des valeurs quelconques des moments N, M, L; et par là on pourrait être ramené à la théorie des axes permanents de rotation des solides.

Bruxelles ce 27 avril 1852.

4.

Beitrag zur Theorie der Bewegung der Räderfuhrwerke, mit Inbegriff der Dampfwagen.

(Von Herrn *J. P. G. v. Heim*, Königl. würtemb. Oberstlieutenant a. D.)

Vorwort.

Obgleich das Räderfuhrwerk unstreitig zu den ältesten, gemeinnützigsten und im allgemeinsten Gebrauche befindlichen Maschinen gehört, ist die Theorie desselben und seiner Bewegung, wie kaum in Abrede zu stellen sein wird, im Ganzen nur auf einer niedrigen Stufe der Entwickelung geblieben: einerseits vielleicht deshalb, weil den Gelehrten vom Fache der Gegenstand zu geringfügig schien, um ihre Aufmerksamkeit und Thätigkeit in Anspruch zu nehmen: andererseits aber auch, weil die Theorie der Bewegung der Fuhrwerke ihren Untersuchungen, sofern es sich von stetiger Bewegung handelt, die Voraussetzung einer Bahn von gleichförmiger und regelmässiger Beschaffenheit zum Grunde zu legen hat: eine Voraussetzung, welche in der Wirklichkeit nur selten zutrifft und daher einen unmittelbaren Nutzen dieser Untersuchungen weniger anschaulich macht.

Seitdem jedoch das Fuhrwerk im *Dampfwagen* einen mächtigen Berufsgenossen gefunden hat, für welchen eigene Kunststrassen in immer sich erweiternder Ausdehnung gebaut werden, dürften sich diese, der Ausbildung jener Theorie entgegenstehenden Verhältnisse geändert haben. Denn nicht nur ist die genannte Beschaffenheit für diese Bahnen ein unerlässliches Erforderniss, wenn sie ihren Zweck erfüllen sollen, sondern bei der unermesslichen Bedeutsamkeit, welche die neueren Verkehrsmittel für die Interessen der Völker schon gewonnen haben und immer mehr gewinnen, werden gewiss auch die Gesetze der Bewegung des Räderfuhrwerks eine etwas nähere theoretische Beleuchtung wohl verdienen.

Soll die eigenthümliche Natur der Bewegung des Räderfuhrwerks eine befriedigend rationelle Erklärung finden, soll die Wechselwirkung zwischen den Kräften

und Widerständen, von denen die Bewegung abhangt, genügend erläutert und so manche, diese Bewegung betreffende, in der Praxis sich darbietende Frage richtig beantwortet werden; so kann Dies nur dadurch geschehen, dass die allgemeinen Grundsätze der Dynamik auf das im *Zustande der Bewegung* betrachtete Fuhrwerk angewendet und die hieraus sich ergebenden Folgerungen durch einen gründlichen Calcul entwickelt werden.

Neben dem rühmlichen Streben nach nützlichen Erfindungen und ihrer Anwendung auf das Leben bleibt für die höheren Interessen der Völker noch ein Anderes zu wünschen, nämlich der Fortbau der Wissenschaft, ein unablässig tieferes Eindringen in die Heiligthümer der unumstösslichen Grundwahrheiten und die fortschreitende Erkenntniss Dessen, was aus dem Gegebenen und Erforschten mit Nothwendigkeit weiter folgt.

Inhalts-Uebersicht.

Erste Abtheilung.

Die dynamischen Verhältnisse der Räderfuhrwerke.

Einleitende Betrachtungen.

§. 1.

Die gemeinschaftliche Bestimmung der Schleifen und der Fuhrwerke mit Rädern ist, Lasten auf der Erde fortzuschaffen.

Die Bewegung der *Schleifen* ist einfach fortschreitend Die beiden sich berührenden Flächen, der Schleife und des Bodens, gleiten über einander hin, so dass alle Theile der Schleife und der Last, nach Länge und Richtung, den gleichen Weg zurücklegen. Eine nähere Erörterung dieser Art von Bewegung ist nicht Gegenstand der vorliegenden Aufgabe.

Die Bewegung eines *Fuhrwerks* ist aus der fortschreitenden Bewegung, welche allen seinen Theilen und der Last gemein ist, und der umdrehenden der Räder zusammengesetzt. Sie ist insbesondere *rollend*, wenn die lineare Umdrehungsgeschwindigkeit des Punct für Punct mit dem Boden in Berührung tretenden Kreis-Umfanges der Räder eben so gross ist, als die fortschreitende Geschwindigkeit des Fuhrwerks; d. h. wenn das Fuhrwerk während jedes Umlaufs der Räder einen Weg zurücklegt, der dem abgewickelten äussern Kreis-Umfange derselben an Länge gleich ist. Sie ist dagegen *theilweise gleitend*, wenn die Umdrehungsgeschwindigkeit des Räder-Umfanges kleiner oder grösser ist, als die fortschreitende Geschwindigkeit des Fuhrwerks; und *ganz gleitend*, wenn entweder die umdrehende, oder die fortschreitende Geschwindigkeit Null ist.

Bei der *rollenden* Bewegung beschreibt jeder Punct des Kreis-Umfanges eines Rades, von einer Berührung des Bodens zur andern, eine *Radlinie* (*Cycloïde*). Die mit der Bahn parallele Geschwindigkeit des Puncts ist im Augenblicke der Berührung gleich Null, nämlich die fortschreitende Geschwindigkeit desselben ist seiner linearen Umdrehungsgeschwindigkeit gleich und gerade entgegengesetzt, und die Richtung seiner absoluten Bewegung steht in demselben Augenblicke, in welchem er vom Niedergehen zum Aufsteigen übergeht, senkrecht auf der Bahn des Fuhrwerks.

§. 2.

Wird der Druck, den das Rad auf den Boden ausübt, mit N bezeichnet, und ist f der Coefficient der Reibung zwischen den Flächen des Rad-Umfanges und des Bodens, so drückt das Product fN den Widerstand aus, den die Reibung des Bodens der gleitenden Bewegung des Rades entgegensetzt: eine Kraft, welche am Umfange des Rades wirkt, und deren Richtung jener der fortschreitenden Bewegung des Puncts, in welchem das Rad den Boden berührt, gerade entgegengesetzt ist.

Zur Hervorbringung der rollenden Umdrehung des Rades ist aber eine (im Folgenden näher zu ermittelnde) bestimmte Kraft R nöthig, welche man ebenfalls an dem Puncte des Rad-Umfanges, in welchem derselbe den Boden berührt, und nach derselben Richtung wie der Widerstand fN angebracht, sich vorzustellen hat.

Ist nun $fN < R$, so muss die Bewegung, wenigstens theilweise, gleitend sein, und fN tritt ganz in Wirksamkeit. Ist dagegen $fN \geqq R$, so kann nur eine rollende Bewegung entstehen, und nur R in Thätigkeit kommen. Denn gesetzt es wäre möglich, dass ein grösserer Theil von fN als R zur Umdrehung des Rades angewendet oder eine schnellere Umdrehung desselben als die rollende hervorgebracht würde, so müsste ebenfalls ein Gleiten des Rades entstehen; aber so, dass der Widerstand fN, nach der Richtung der fortschreitenden Bewegung, dem der Kraft R entgegen wirksam würde; wodurch augenblicklich die Umdrehung des Rades verzögert, die fortschreitende Bewegung dagegen beschleunigt und die rollende Bewegung wieder hergestellt werden würde.

Es folgt hieraus, dass die rollende Bewegung des Fuhrwerks, wenn sie möglich ist, sich von selbst erhält, dass aber zu dieser Möglichkeit ein gewisses Maas der Reibung, oder von fN, nothwendig ist.

§. 3.

Die Fuhrwerke sind theils *zweirädrig*, theils *vierrädrig*. Je zwei Räder haben gewöhnlich eine gemeinschaftliche Achse.

Da beim *zweirädrigen* Fuhrwerk der Schwerpunct nicht dauernd von der Achse allein getragen werden kann, so bedarf es noch einer weitern Unterstützung, welche es meistens an der vordern Seite erhält, wo die Zugkraft angebracht wird.

Ein *vierrädriges* Fuhrwerk besteht aus zwei Gestellen mit je einem Räderpaare: dem Vordergestell und dem Hintergestell. Die beiden Gestelle sind entweder fest unter sich verbunden, so dass der Körper des Fuhrwerks nur ein einziges, von den Rädern getragenes System bildet, oder sie hangen durch eine Art von Gelenk unter sich zusammen, so dass dass Vordergestell, wie ein zweirädriges Fuhrwerk, auf der vordern Seite der Räder noch eine weitere Unterstützung nöthig hat. Man wird hiernach vierrädrige Fuhrwerke *erster* und *zweiter Art* zu unterscheiden haben.

§. 4.

Nach Maasgabe des vorgesteckten Zieles, die Gesetze der Bewegung der Fuhrwerke auf regelmässiger Bahn, wie sie aus der Einrichtung und Zusammensetzung derselben folgen, aus den allgemeinen Grundsätzen der Dynamik abzuleiten, wird man als wirkende Kräfte die Zugkraft, die Schwerkraft und den Widerstand der Reibung zwischen den Achsen und ihren Lagern, so wie jenen zwischen den Rädern und dem Boden, in Betracht zu ziehen haben, und um die Lösung der Aufgabe zu vereinfachen und überhaupt möglich zu machen, von andern, zufällig, wenn auch häufig eintretenden Einwirkungen hier absehen und voraussetzen müssen, die Kräfte und Widerstände, von denen die Bewegung abhangt, befinden sich in einer und derselben, das Ganze des Fuhrwerks in zwei symmetrische Hälften theilenden, verticalen Ebene, für welche die verticale Ebene, die, senkrecht auf den Achsen, deren Länge in zwei gleiche Theile theilt, genommen werden kann. Es wird ferner vorausgesetzt werden müssen, die Bahn, auf der das Fuhrwerk sich bewegt, sei vollkommen fest und eben, so dass weder Eindrücke noch Erschütterungen Statt finden, und dass sie von jener verticalen Ebene in einer geraden Linie geschnitten wird. Die Richtung der Bewegung wird unter diesen Voraussetzungen nur *geradlinig* sein.

§. 5.

Ist ein fester Körper oder ein System von festen Körpern der Einwirkung mehrerer Kräfte unterworfen, deren Richtungen in einer und derselben Ebene liegen, so werden nach den Grundlehren der Mechanik die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen den Kräften durch drei Gleichungen ausgedrückt. Wird nämlich jede dieser Kräfte nach den Richtungen irgend zweier in der Ebene unter rechten Winkeln sich schneidender Axen in zwei Theilkräfte zerlegt, so

muss, wenn Gleichgewicht Statt finden soll, sowohl die *Summe der Theilkräfte* in Bezug auf jede der beiden Axen, als auch die *Summe der Momente* der Kräfte in Bezug auf den Durchschnittspunct derselben, oder, was auf Eins hinauskommt, in Bezug auf irgend einen Punct der Ebene, gleich Null sein.

Und eben diese Gleichungen sind nach dem Princip von *D'Alembert*, wenn die Beschleunigungen der Quantitäten der Bewegung der Körper ebenfalls als Kräfte, jedoch mit dem Vorzeichen, welches dem der Richtung der Bewegung entsprechenden entgegengesetzt ist, mit den andern Kräften in die Rechnung eingeführt werden, sowohl für den Zustand der Bewegung, als für den der Ruhe gültig, und können daher zugleich zur Bestimmung der entsprechenden Bewegung dienen.

Da die Räder eine ihnen eigenthümliche, nemlich die *umdrehende* Bewegung haben, so machen sie nicht nur mit den übrigen Theilen des Fuhrwerks zusammen ein System aus, sondern bilden zugleich für sich besondere Systeme, deren Verbindung mit dem Körper des Fuhrwerks durch die in die Gleichungen der bezüglichen Systeme zugleich eingehenden Grössen vertreten ist. Jedem solchen Systeme fester Körper gehören nämlich, wie oben bemerkt, *drei Gleichungen* an, und die verschiedenen Systeme liefern die Zahl der Gleichungen, welche nöthig ist, um die gesuchten Grössen durch die gegebenen auszudrücken. So erhält man für das zweirädrige Fuhrwerk *sechs*, für das vierrädrige erster Art *neun*, für das vierrädrige zweiter Art *zwölf* Gleichungen.

§. 6.

Bei der Bildung dieser Gleichungen kommen aus der Lehre von der Umdrehung fester Körper ein Paar Sätze zur Anwendung, welche hier angeführt werden müssen.

Wird die *Masse* eines um eine feste Axe mit der Winkelgeschwindigkeit u sich drehenden Körpers durch M, und das *Trägheitsmoment* der Masse in Bezug auf eine durch den Schwerpunct des Körpers mit jener parallel gehende Axe durch MK^2 bezeichnet: zerlegt man die Quantitäten der Bewegung der Elemente dM, als Kräfte, nach zwei, sich und die Umdrehungs-Axe unter rechten Winkeln schneidenden Axen, in Bezug auf welche die von dem Durchschnittspuncte dieser drei Axen an gerechneten Coordinaten x und y der Elemente genommen werden, und sind x_1 und y_1 die Coordinaten des *Schwerpuncts*, so ist

Die Summe der mit der Axe der x parallelen Theilkräfte $= -uy_1M$,

Die Summe der mit der Axe der y parallelen Theilkräfte $= +ux_1M$.

Werden dann die Momente der Quantitäten der Bewegung der Elemente dM (als Kräften-Momente) in Bezug auf eine andere, mit der Umdrehungs-Axe parallele Axe genommen, und sind $x_{,,}$ und $y_{,,}$ die vom Durchschnittspuncte dieser Axe mit der Ebene der x und y an gerechneten, mit den Axen der x und y parallelen Coordinaten des Schwerpuncts, so ist

$$\text{Die Summe dieser Momente} = u(k^2 + x_{,}x'' + y_{,}y_{,,})M.$$

Wenn nämlich die Ebene der (Figur 1), welche als winkelrecht auf der Umdrehungs-Axe des Körpers vorausgesetzt wird, von dieser Axe im Punct $O_{,,}$ und von der parallel mit ihr durch den Schwerpunct gehenden Axe im Puncte M geschnitten wird; wenn $O_{,}x$ die Richtung der Axe der x, $O_{,}y$ der Axe der y vorstellt, $My_{,} = x_{,}$, $Mx_{,} = y_{,}$ ist, $my = x$ und $mx = y$ die Coordinaten des im Punct m gelegenen oder projicirten Elements dM sind, der Abstand $O_1 m = r$ und der Winkel $m O_1 x = \gamma$ ist: so wird die Quantität der Bewegung des Elements dM durh $urdM$, der mit der Axe der x parallele Theil derselben, den die Zerlegung gilt, durch $urdM.\sin\gamma = uydM$, und der mit der Axe der y parallele Theil durch $urdM.\cos\gamma = uxdM$ ausgedrückt, während $\sin\gamma = \frac{y}{r}$ und $\cos\gamma = \frac{x}{r}$ ist. Findet die Umdrehung in der (durch den Pfeil angedeuteten) Richtung vom positiven Theil der Axe der x zunächst gegen den positiven Theil der Axe der y, oder die Bewegung des Elements dM in der Richtung von m gegen q Statt, so hat die mit der Axe der x parallele Theilkraft die Richtung von m gegen y, die andere Theilkraft die Richtung von m gegen t, und es ist daher dem Ausdruck der ersteren Theilkraft, wenn diese Kräfte nach den Seiten genommen werden, nach welchen die positiven Coordinaten sich erstrecken, das negative Vorzeichen zu geben.

Im ganzen Umfange des Körpers genommen, ist demnach, wenn unter u die Winkelgeschwindigkeit der Umdrehung nach der angegebenen Richtung verstanden wird:

$$\text{Die Summe der mit der Axe der } x \text{ parallelen Theilkräfte} = -u\int ydM = -uy_1 M,$$
$$\text{Die Summe der mit der Axe der } y \text{ parallelen Theilkräfte} = +u\int xdM = +ux_1 M;$$

welche Kräfte (wenn positiv) als nach den positiven Seiten der Coordinatenaxen gerichtet angenommen sind.

Wird ferner die Ebene der (Fig. 1) von der andern, mit der Umdrehungs-Axe parallelen Axe in $O_{,,}$ geschnitten, ist $My_{,,} = x_{,,}$ $Mx_{,,} = y_{,,}$, $O_{,,}n$ senkrecht auf $O_{,}m$ und $O_{,}n = s$, so ist $ur(r-s)dM$ das Moment der Quanti-

tät der Bewegung des Elements dM, dessen Coordinaten x und y sind, in Bezug auf diese andere Axe und

$$s = (x_{,} - x_{,,})\cos\gamma + (y_{,} - y_{,,})\sin\gamma$$
$$= (x_{,} - x_{,,})\frac{x}{r} + (y_{,} - y_{,,})\frac{y}{r},$$

daher $r(r-s)$ oder $r^2 - rs = x^2 + y^2 - x(x_{,} - x_{,,}) - y(y_{,} - y_{,,})$
$= (x - x_{,})^2 + (y - y_{,})^2 + (x - x_{,})(x_{,} + x_{,,}) + (y - y_{,})(y_{,} + y_{,,}) + x_{,}x_{,,} + y_{,}y_{,,}$,
und wenn diese Momente im ganzen Umfange des Körpers genommen werden:

$$u\int r(r-s)\,dM = u(k^2 + x_{,}x_{,,} + y_{,}y_{,,})M,$$

indem $\int((x-x_{,})^2 + (y-y_{,})^2)dM = Mk^2$ und $\int(x - x_{,})dM = \int x\,dM - Mx_1 = 0$
$= \int(y - y_{,})\,dM = \int y\,dM - y_{,}M$ ist.

Fällt diese andere Axe mit der Umdrehungs-Axe zusammen, so wird die Summe der Momente zu $u(k^2 + d^2)M$, wenn d den Abstand des Schwerpuncts von der letzteren Axe bedeutet; und geht entweder die Umdrehungs-Axe, oder die Axe der Momente durch den Schwerpunct, so beschränkt sich die Summe der Momente auf uMk^2, wo immer im ersten Falle die Axe der Momente, im zweiten die Umdrehungs-Axe sich befinden mag.

Dieser erstere Fall findet bei den Rädern der Fuhrwerke Statt, und es ist in Bezug auf die Umdrehung derselben nicht nur die Summe der Momente $= uMk^2$, wo auch die mit der Umdrehungs-Axe parallele Axe der Momente angenommen werden mag, sondern auch die Summe jeder der beiderlei Theilkräfte, nämlich sowohl $-uy_{,}M$ als $ux_{,}M$, ist gleich Null.

Erstes Capitel.

Das zweirädrige Fuhrwerk.

Bezeichnungen.

§. 7.

Der Weg x, den das Fuhrwerk durch die fortschreitende Bewegung zurücklegt, wird auf der Bahnlinie gl (Fig. 2) gemessen und von dem Puncte an gerechnet, in welchem das Rad *im Anfange der Bewegung*, für welchen die Zeit $t = 0$ ist, die Bahn berührt.

Die Winkelgeschwindigkeit u der Umdrehung des Rades (für den der Längen-Einheit gleichen Halbmesser) wird in der Richtung genommen, bei welcher der vordere Theil des Rades sich abwärts bewegt.

Der Winkel α ist der spitze Winkel lgk, der die Bahnlinie gl, wenn sie geneigt ist, mit der Horizontalen gk macht; er wird beim Ansteigen als *positiv* betrachtet.

Die Richtungslinie eK der Zugkraft K schneidet die Richtung der fortschreitenden Bewegung eC unter dem spitzen Winkel $KeC = \beta$, und die auf der Bahnlinie Senkrechte cd im Abstande n vor c, so dass dieser Punct c, in welchem das Rad und die Bahn sich berühren, um $n\cos\beta$ von ihr entfernt ist. Der Winkel β ist, unabhängig von der Seite, nach welcher die Zugkraft wirkt, positiv, wenn die Richtungslinie derselben, von ihrem Durchschnitte mit der Richtungslinie der Bewegung an, auf derjenigen Seite, nach welcher die Bewegung Statt findet, sich über die letztere Linie erhebt.

P ist das Gesammtgewicht des Fuhrwerks und der Last, mit Ausschluss der Räder; h der Abstand Gh des Schwerpuncts G dieses Gewichts von der Bahnlinie, i der Abstand ch des Berührungspuncts c von der Senkrechten Gh, und $c = i\cos\alpha - h\sin\alpha$ der Abstand dieses Puncts von der Verticalen durch G.

D ist der in verticaler Richtung genommene Druck auf den Unterstüzzungspunct A vor den Rädern (§. 3); l der Abstand Al dieses Puncts von der Bahnlinie; m der Abstand cl des Berührungspuncts c von der Senkrechten Al, und $a = m\cos\alpha - l\sin\alpha$ der Abstand des letztern Puncts von der Verticalen durch A; ferner $b = a - c$ der Abstand zwischen den beiden Verticalen Gb und Aa.

N ist der Druck eines Rades auf den Boden, in senkrechter Richtung auf die Bahnlinie genommen.

R das Reibungs-Erforderniss zur rollenden Umdrehung eines Rades (§. 2).

Der Quotient $\frac{R}{N}$ wird im Folgendem der *Reibungsquotient* für rollende Bewegung genannt werden.

E ist der auf der Bahnlinie senkrechte und F der mit der Bahnlinie parallele Theil des Drucks, welchen die Achse und ihr Lager an dem Berührungspuncte beider Theile auf einander ausüben. Dieser Druck ist $= \sqrt{(E^2 + F^2)}$ $= E\sqrt{(1 + G^2)}$, wenn man $\frac{F}{E} = G$ setzt, und es wird senkrecht auf die sich berührenden Oberflächen der Theildruck F des Fuhrwerks auf das Rad (wenn positiv) als nach vorn gekehrt angenommen.

r ist der Halbmesser des äusseren Umfanges, ϱ der Halbmesser der Achse, wenn sie cylindrisch, oder der entsprechende mittlere Halbmesser derselben, wenn sie conisch ist.

Zum Unterschiede vom Körper der Rad-Achse wird die Umdrehungs-Axe, nämlich die, deren Länge nach durch die Axe gehende gerade Linie, um welche das Rad sich dreht, die *Axenlinie* genannt werden.

f ist der Coefficient der Reibung zwischen dem Rad-Umfange und dem Boden, φ der Coefficient der Reibung zwischen der Achse und ihrem Lager.

g die Beschleunigung der Schwere, nämlich die Geschwindigkeit des Falles im leeren Raume, nach Verlauf der ersten Zeit-Einheit.

Q das Gewicht eines Rades, $\frac{Q}{g}\cdot k^2$ das Trägheitsmoment eines Rades in Bezug auf die Axenlinie.

Anmerk. Wenn die Achse an den Rädern fest ist, so ist das Gewicht derselben in $2Q$, statt in P, und das Trägheitsmoment derselben in $\frac{2Q}{g}\cdot k^2$ mitbegriffen.

Rollende Bewegung.

§. 8.

Das zweirädrige Fuhrwerk begreift zwei verschiedene Systeme von festen Körpern in sich, nämlich das Räderpaar und den aus den übrigen Theilen bestehenden Körper des Fuhrwerks (§. 5.). Für das eine oder das andere dieser Systeme kann man auch beide verbunden annehmen. Man wird hier das ganze Fuhrwerk, mit der Last und den Rädern, als erstes und die Räder für sich als zweites System betrachten und, um Gleichungen der Bewegung (§. 5.) aufzustellen, die Zerlegung der Kräfte und Widerstände für beide Systeme nach den Richtungen der zur Axe der Weg-Abscissen x genommenen Bahnlinie (§. 7.) und einer sie rechtwinklig schneidenden Axe ausführen und zu dem Puncte, in Bezug auf welchen die Momente der Kräfte und Widerstände genommen werden, für das erste System den Berührungspunct zwischen dem Rade und der Bahnlinie, und für das zweite den Mittelpunct des Rad-Umfanges, durch welchen die Axenlinie geht, wählen.

Auf das erste System wirken die Zugkraft K, die Gewichte P und $2Q$, die zur rollenden Umdrehung der Räder erforderlichen Kräfte $2R$, der dem Drucke $2N$ gleiche Gegendruck des Bodens, und der dem Drucke D gleiche Gegendruck des Unterstützungspuncts A.

In irgend einem der Zeit t entsprechenden Augenblicke der Bewegung sind die Quantitäten der fortschreitenden Bewegung des Systems $= \frac{P}{g}\cdot\frac{dx}{dt}$ und

$\frac{2Q}{g} \cdot \frac{dx}{dt}$, indem $\frac{dx}{dt}$ die fortschreitende Geschwindigkeit ist und $\frac{P}{g}$ und $\frac{2Q}{g}$ die Maasse der Gewichte P und $2Q$ sind, daher die Beschleunigung dieser Quantitäten $= \frac{P}{g} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$ und $\frac{2Q}{g} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$; und da die mittleren Richtungen der Quantitäten der Bewegung durch die Schwerpuncte der Gewichte P und $2Q$ gehen, so sind $\frac{hP}{g} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$ und $\frac{2rQ}{g} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$ die Momente derselben Beschleunigungen in Bezug auf den Punct, in welchem das Rad die Bahn berührt.

Die Summen der mit den coordinirten Axen parallelen Theile der Quantitäten der umdrehenden Bewegung der Räder sind gleich Null; die Summen der Momente dieser Quantitäten in Bezug auf den Punct der Berührung zwischen dem Rade und der Bahnlinie oder irgend einem andern Punct der Ebene, in welcher die Kräfte wirken, sind $= \frac{2Q}{g} k^2 . u$ (§. 6), und die Summe der Momente der Beschleunigungen derselben Quantitäten ist $= \frac{2Q}{g} k^2 . \frac{du}{dt}$.

Auf das zweite System wirken die Gewichte $2Q$, die Kräfte $2R$, der Gegendruck $2N$ des Bodens, der Druck der Achse gegen das Lager, oder des Lagers gegen die Achse, wenn sie an den Rädern fest ist, und die Reibung, welche zwischen diesen beiden Theilen Statt findet.

Die Beschleunigungen der Quantitäten der fortschreitenden und der umdrehenden Bewegung der Räder sind, wie auch die Momente der Beschleunigungen der Quantitäten der umdrehenden Bewegung, beim zweiten System dieselben, wie beim ersten; dagegen sind die Momente der Beschleunigungen der Quantitäten der fortschreitenden Bewegung beim zweiten System gleich Null.

Der Widerstand der Reibung an der Rad-Achse wird, da der Druck des Fuhrwerks gegen das Rad senkrecht auf die sich berührenden Oberflächen genommen ist, nach den Bezeichnungen (§. 7) durch $\varphi E \sqrt{(1+G^2)}$ ausgedrückt, und es ist seine Richtung der der Umdrehung des Berührungspuncts gerade entgegengesetzt.

Ist die Rad-Achse am Körper des Fuhrwerks fest, so findet die Berührung an der untern Seite der Achse Statt. Es fällt, wenn F positiv ist, der Berührungspunct e (Fig. 3) um den Kreisbogen, welcher G zur Tangente hat (für den der Längen-Einheit gleichen Halbmesser), *vor* den senkrecht auf der Bahnlinie stehenden Radhalbmesser Cc, und es ist der Reibungswiderstand von e gegen f gerichtet. Wird derselbe nach den beiden coordinirten Axen zerlegt, so ergiebt sich Folgendes:

Die Summe der mit der Bahnlinie parallelen Theile des Drucks und des Reibungswiderstandes $= F + \varphi E = E(G + \varphi)$, mit der Richtung nach vorn, im Sinne der fortschreitenden Bewegung;

Die Summe der auf der Bahnlinie senkrechten Theile des Drucks und des Reibungswiderstandes $= E - \varphi F = E(1 - \varphi G)$, mit der Richtung nach unten;

und eben diese Ausdrücke gelten auch noch, wenn F negativ ist; in welchem Falle die Tangente G ebenfalls negativ ist und der Berührungspunct e_1 *hinter* den senkrecht auf der Bahnlinie stehenden Halbmesser fällt.

Dreht sich die am Rade feste Achse mit demselben, so findet (Fig. 4) die Berührung an der obern Seite der Achse Statt; der Berührungspunct fällt bei positivem F *hinter*, bei negativem F *vor* den auf der Bahnlinie senkrechten Raddurchmesser, und es findet sich:

Die Summe der mit der Bahnlinie parallelen Theile des Drucks und des Reibungswiderstandes $= F - \varphi E = E(G - \varphi)$, mit der Richtung nach *vorn*, im Sinne der fortschreitenden Bewegung;

Die Summe der auf der Bahnlinie senkrechten Theile des Drucks und des Reibungswiderstandes $= E + \varphi F = E(1 + \varphi G)$, mit der Richtung nach *unten*;

welche Ausdrücke auch bei negativem F in derselben Bedeutung, mit Rücksicht auf das Vorzeichen, gelten.

§. 9.

Bei *rollender* Bewegung ist (§. 1) für jeden Augenblick derselben:

$$ru = \frac{dx}{dt}, \quad \text{daher } \frac{du}{dt} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \text{ und } r\frac{d^2x}{dt^2} + k^2\frac{du}{dt} \cdot \frac{r^2+k^2}{r} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Wird nun zur Abkürzung X statt $\frac{1}{g} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$ und s statt $\frac{r^2+k^2}{r}$ gesetzt, und werden die Richtungen der Kräfte und ihrer Momente durch die vorgesetzten Zeichen gehörig berücksichtigt, so ergeben sich für irgend einen Augenblick der Bewegung, und zuvörderst für den Fall, dass die Rad-Achse am Körper des Fuhrwerks fest ist, folgende

(A.) *Gleichungen der rollenden Bewegung*

des zweirädrigen Fuhrwerks:

1) $K\cos\beta - (P + 2Q - D)\sin\alpha - 2R - (P + 2Q)X = 0,$

2) $K\sin\beta - (P + 2Q - D)\cos\alpha + 2N = 0,$

$$3)\quad n\cos\beta.K+cP-r\sin\alpha.2Q-aD-(hP+2sQ)X=0,$$
$$4)\quad 2E(G+\varphi)-2R-2Q(\sin\alpha+X)=0,$$
$$5)\quad -2E(1-\varphi G)+2N-2Q\cos\alpha=0,$$
$$6)\quad 2rR-\varphi\varrho.2E\sqrt{(1+G^2)}-2Q(s-r)X=0.$$

§. 10.

Soll die rollende Bewegung *gleichförmig* sein, so ist dazu ein bestimmter Werth der Zugkraft K nöthig. Ein grösserer Werth von K würde die Bewegung beschleunigen, ein kleinerer verzögern. Bei gleichförmiger Bewegung ist die Beschleunigung $\frac{d^2x}{dt^2}$, also X gleich Null, von welcher Grösse auch die Geschwindigkeit derselben sei, und es sind die zu suchenden Grössen K, D, R, N E und G. Bei *beschleunigter* Bewegung ist K gegeben, und X statt K zu suchen, so dass die Zahl der Gleichungen, die Bewegung mag gleichförmig sein, oder nicht, zur Bestimmung der unbekannten Grössen in beiden Fällen nöthig ist, und ausreicht.

Beginnt man mit der Auflösung der Gleichungen für die gleichförmige Bewegung, so geben die Gleichungen (4 und 6), indem $X=0$ gesetzt wird:

$$7)\qquad E(G+\varphi-\frac{\varphi\varrho}{r}\sqrt{(1+G^2)}=2P\sin\alpha,$$

und wird nun zuerst α gleich Null angenommen, so hat man zur Bestimmung der Grösse G die Gleichung

$$G+\varphi=\frac{\varphi\varrho}{r}\sqrt{(1+G^2)},$$

aus welcher für $G+\varphi$ die zwei Werthe $\frac{\varphi\varrho(1+\varphi^2)}{\varphi^2\varrho\pm r\sqrt{\left(1+\varphi^2-\left(\frac{\varphi\varrho}{r}\right)^2\right)}}$ folgen, von denen, wegen der gegenseitigen Werthverhältnisse der Grössen r, ϱ und φ nur der mit dem obern Zeichen, wie es eben die Bestimmungsgleichung fordert, *positiv* ist und daher der Aufgabe wirklich entspricht.

Für eine *horizontale* Bahn hat demnach die Auflösung der Gleichungen der *gleichförmigen rollenden* Bewegung keine weitere Schwierigkeit, indem mittels des gefundenen Werthes von G alle übrigen unbekannten Grössen sich durch bekannte ausdrücken lassen.

§. 11.

Wenn dagegen der Winkel α *nicht* gleich Null ist, so würde durch die Gleichung (6), welche die einzige quadratische der Gleichungen (A) ist, die weitere Ausführung der Rechnung ziemlich umständlich und unbequem werden, wenn man dieser Gleichung nicht ebenfalls die lineare Form geben könnte. Dieses ist indessen, ohne dass die Auflösung in dieser Form die Genauigkeit der Rechnung *erheblich* vermindert, dadurch möglich, dass $G+\varphi$ im Verhältniss zu φ, für $\alpha=0$, wie der eben gefundene Ausdruck zeigt, und vermöge der Gleichung (7) auch für Werthe von α, wie sie bei geneigten Bahnen wohl vorkommen, ein *ziemlich kleiner, echter Bruch ist.*

Da nämlich nach *Taylor's* Satze, für irgend eine Function fx von x, $f(x+\delta)=fx+\frac{dfx}{dx}\delta+\frac{1}{2}\frac{d^2fx}{dx^2}\delta^2 \ldots\ldots$ ist, so können, indem man $\sqrt{(1+G^2)} = \sqrt{[1+(\varphi-(G+\varphi))^2]}$ nach $G+\varphi$ entwickelt, die Quadrate von $G+\varphi$ vernachlässigt und es kann $\sqrt{(1+\varphi^2)}-\frac{\varphi}{\sqrt{(1+\varphi^2)}}(G+\varphi)$ oder $\frac{1-\varphi G}{\sqrt{(1+\varphi^2)}}$ statt $\sqrt{(1+G^2)}$ gesetzt werden.

So findet man für $\alpha=0$ aus der Gleichung $G+\varphi=\frac{\varphi\varrho}{r}\cdot\frac{1-\varphi G}{\sqrt{(1+\varphi)^2}}$ die Grösse $G+\varphi=\frac{\varphi\varrho(1+\varphi^2)}{r\sqrt{(1+\varphi^2)}+\varphi^2\varrho}$ nur sehr wenig zu klein, da $\left(\frac{\varphi\varrho}{r}\right)^2$ im Verhältniss zu $1+\varphi^2$ jedenfalls eine sehr kleine Zahl ist.

Auch bei *beschleunigter* Bewegung wird es, wenn X nicht verhältnissmässig sehr gross, d. h. wenn die Zugkraft K nicht um vieles grösser ist als der zur gleichförmigen Bewegung erforderliche Werth derselben, gestattet sein, in der Gleichung (6) die Wurzelgrösse $\sqrt{(1+G^2)}$ durch den Ausdruck $\frac{1-\varphi G}{\sqrt{(1+\varphi^2)}}$ zu ersetzen; und überhaupt dürfte diese Annäherung, bei welcher überdiess, wie im Folgenden gezeigt werden wird, das Fehlende sich ohne Schwierigkeit ergänzen lässt, nur in ganz ungewöhnlichen Fällen nicht völlig genügen.

§. 12.

Wird zur weitern Entwickelung, nachdem die Gleichung (6) wie angegeben auf die lineare Form gebracht ist, zur Abkürzung

$$\frac{\varphi\varrho}{r\sqrt{(1+\varphi^2)}}=\mu \quad , \quad 2E(G+\varphi)=Y \quad , \quad 2E(1-\varphi G)=Z$$

gesetzt, so findet sich für die *gleichförmige Bewegung*, aus den Gleichungen

(A.) 1) u. 4) $+Y = K\cos\beta - (P-D)\sin\alpha$,

2) u. 5) $-Z = K\sin\beta - (P-D)\cos\alpha$,

3) $a(P-D) = bP + r\sin\alpha.2Q - n\cos\beta.K$,

4) u. 6) $Y - \mu Z = 2Q\sin\alpha$;

und durch Auflösung dieser vier Gleichungen, indem der der gleichförmigen Bewegung angehörige besondere Werth von K durch V bezeichnet wird:

$$V = \frac{(bP + r\sin\alpha\cdot 2Q)(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + a\sin\alpha\cdot 2Q}{a(\cos\beta + \mu\sin\beta) + n\cos\beta(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)},$$

$$D = P - \frac{(bP + r\sin\alpha\cdot 2Q)(\cos\beta + \mu\sin\beta) - n\cos\beta\cdot 2Q\sin\alpha}{a(\cos\beta + \mu\sin\beta) + n\cos\beta(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)},$$

$$Y = \frac{\mu(bP + r\sin\alpha\cdot 2Q)\cos(\alpha+\beta) + (a + n\sin\alpha)\cos\beta\cdot 2Q\sin\alpha}{a(\cos\beta + \mu\sin\beta) + n\cos\beta(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)},$$

$$Z = \frac{(bP + r\sin\alpha\cdot 2Q)\cos(\alpha+\beta) - (a\sin\beta + n\cos\beta\cos\alpha)2Q\sin\alpha}{a(\cos\beta + \mu\sin\beta) + n\cos\beta(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)};$$

sodann

$$2E = \frac{Z + \varphi Y}{1 + \varphi^2}, \quad 2F = 2EG = \frac{Y - \varphi Z}{1 + \varphi^2}, \quad G = \frac{Y - \varphi Z}{Z + \varphi Y};$$

und aus (4 u. 6) wird weiter

$$2R = Y - 2Q\sin\alpha = \mu Z,$$

und aus (5)

$$2N = Z + 2Q\cos\alpha$$

$$= \frac{(bP + r\sin\alpha\cdot 2Q)\cos(\alpha+\beta) + 2Q(a\cos(\alpha+\beta) + \mu\cos\alpha(a\sin\beta + n\cos\beta\cos\alpha))}{a(\cos\beta + \mu\sin\beta) + n\cos\beta(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$$

gefunden.

§. 13.

Für eine *horizontale* Bahn hat man nun, indem man $\alpha = 0$ setzt:

$$V = \frac{m - i}{m(\cos\beta + \mu\sin\beta) + \mu n\cos\beta}\mu P,$$

$$D = \left(1 - \frac{(m-i)(\cos\beta + \mu\sin\beta)}{m(\cos\beta + \mu\sin\beta) + \mu n\cos\mu}\right)P = \frac{i(\cos\beta + \mu\sin\beta) + \mu n\cos\beta}{m(\cos\beta + \mu\sin\beta) + \mu n\cos\beta},$$

$$2R = \frac{(m-i)\cos\beta}{m(\cos + \mu\sin\beta) + \mu n\cos\beta}\mu P = V\cos\beta,$$

$$2N = \frac{(m-i)\cos\beta}{m(\cos\beta + \mu\sin\beta) + \mu n\cos\beta}P + 2Q,$$

$$2E = \frac{1 + \varphi\mu}{1 + \varphi^2}\cdot\frac{(m-i)\cos\beta}{m(\cos\beta + \mu\sin\beta) + \mu n\cos\beta}P,$$

$$2F = -\frac{\varphi - \beta}{1 + \varphi^2}\cdot\frac{(m-i)\cos\beta}{m(\cos\beta + \mu\sin\beta) + \mu n\cos\beta}P,$$

und diese Ausdrücke sind *genau* (§. 10), wenn in der Grösse $\mu = \frac{\varphi\varrho}{r\sqrt{(1+\varphi^2)}}$ die Wurzelgrösse $\sqrt{\left(1+\varphi^2-\left(\frac{\varphi\varrho}{r}\right)^2\right)}$ an die Stelle von $\sqrt{(1+\varphi^2)}$ tritt.

Aber auch wenn die Neigung α der Bahn *nicht* gleich Null ist, lässt sich nunmehr, nachdem die Ausdrücke der gesuchten Grössen unter der Annahme $\sqrt{(1+G^2)} = \frac{1-\varphi G}{\sqrt{(1+\varphi^2)}}$ entwickelt sind, die Verhältnisszahl μ so ändern, dass die Ausdrücke den Gleichungen (A) vollkommen genügen.

Wird nämlich statt $\sqrt{(1+\varphi^2)}$, welche die einzige Wurzelgrösse in den gefundenen Ausdrücken ist und allein in μ vorkommt, die Unbekaunte y gesetzt, so muss, wenn der Bedingungs-Gleichung (6) volles Genüge geschehen soll, $1+G^2 = \left(\frac{1-\varphi G}{y}\right)^2$, d. h. $(Y^2+Z^2)y^2 = (1+\varphi^2)Z^2$ oder $\left(1+\left(\frac{Y}{Z}\right)^2\right)y^2 = 1+\varphi^2$ sein; woraus, wenn $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ Grössen sind, die kein μ enthalten,

$$(8.)\qquad (\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2)y^2 + 2\frac{\varphi\varrho}{r}\mathfrak{B}.y = (1+\varphi^2)\mathfrak{C}^2 - \left(\frac{\varphi\varrho}{r}\right)^2$$

folgt, da der Zähler von Y die Form $\left(\frac{\varphi\varrho}{ry}+\mathfrak{B}\right)\mathfrak{A}$, der Zähler von Z die Form $\mathfrak{C}.\mathfrak{A}$ annimmt.

Die hierher gehörige Wurzel y, durch welche, wenn sie in μ an die Stelle von $\sqrt{(1+\varphi^2)}$ tritt, die Auflösung der Gleichungen (A) für jeden Werth des Winkels α *vollständig* und *genau* wird, ergiebt sich

$$= \frac{-\frac{\varphi\varrho}{r}\mathfrak{B} + \mathfrak{C}\sqrt{\left((1+\varphi^2)(\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2) - \left(\frac{\varphi\varrho}{r}\right)^2\right)}}{\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2},$$

und es ist im vorliegenden Falle:

$$\mathfrak{A} = (bP + r\sin\alpha.2Q)\cos(\alpha+\beta),$$

$$\mathfrak{B} = \frac{2Q}{\mathfrak{A}}\sin\alpha\cos\beta\,(a+n\sin\alpha),$$

$$\mathfrak{C} = 1 - \frac{2Q}{\mathfrak{A}}\sin\alpha\,(a\sin\beta + n\cos\beta\cos\alpha);$$

wonach der Grad der Genauigkeit der obigen Ausdrücke auch für $\alpha \gtrless 0$, wenn man deren Verhältnisszahl μ in der Bedeutung von $\frac{\varphi\varrho}{r\sqrt{(1+\varphi^2)}}$ beibehält, sich ermessen lässt.

Werden die im Verhältniss zur Einheit jedenfalls kleinen Gliedes $\frac{\varphi\varrho}{r}\mathfrak{B}$ und $\left(\frac{\varphi\varrho}{r}\right)^2$ in dem angegebenen Ausdruck von y ausser Acht gelassen, so ist

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{1+\varphi^2}{1+\left(\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}\right)^2}\right)},$$

kleiner als $\sqrt{(1+\varphi^2)}$, aber um so weniger davon verschieden, je kleiner $\mathfrak{B}$ gegen $\mathfrak{C}$ ist, und das ergänzte μ ist daher etwas grösser als $\frac{\varphi\varrho}{r\sqrt{(1+\varphi^2)}}$, jedoch ist für gewöhnliche Fälle der Unterschied als unerheblich zu betrachten.

Im Folgenden wird unter dem Zeichen μ, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt ist, immer die Grösse $\frac{\varphi\varrho}{r\sqrt{(1+\varphi^2)}}$ verstanden werden, und eben so, mit Beistrichen, $\frac{\varphi_{,}\varrho_{,}}{r_{,}\sqrt{(1+\varphi_{,}^2)}}$ uuter $\mu_{,}$, u. s. w.

§. 14.

Für die *beschleunigte Bewegung* erhält man, indem wieder die Zeichen Y, Z und μ wie im (§. 12) angewendet werden, aus den Gleichungen

(A.) 1) und 4). $\quad +Y = K\cos\beta - (P-D)\sin\alpha - PX$,

1) und 5). $\quad -Z = K\sin\beta - (P-D)\cos\alpha$,

3) $\quad a(P-D) = C + (hP + 2sQ)X$,

wo C statt $bP + r\sin\alpha . 2Q - n\cos\beta . K$ steht,

4) und 6). $\quad Y - \mu Z = 2Q\left(\sin\alpha + \frac{s}{r}X\right)$.

Durch Auflösung dieser vier abgeleiteten Gleichungen ergiebt sich:

$$X = \frac{a(K(\cos\beta + u\sin\beta) - 2Q\sin\alpha) - C(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{a\left(P + 2\frac{s}{r}Q\right) + (hP + 2sQ)(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)},$$

$$D = P - \frac{\left(P + 2\frac{s}{r}Q\right)C + (hP + 2sQ)(K(\cos\beta + \beta\sin\beta) - 2Q\sin\alpha)}{a\left(P + 2\frac{s}{r}Q\right) + (hP + 2sQ)(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)},$$

$$Y = \frac{\mu P(C\cos\alpha - aK\sin\beta) + \mu(hP + 2sQ)K\cos(\alpha+\beta) + 2Q\sin\alpha(aP + (hP + 2sQ)\sin\alpha) + 2\frac{s}{r}Q(aK\cos\beta - C\sin\alpha)}{a\left(P + 2\frac{s}{r}Q\right) + (hP + s2Q)(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)},$$

$$Z = \frac{\left(P + 2\frac{s}{r}Q\right)(C\cos\alpha - aK\sin\beta) + (hP + 2sQ)(K\cos(\alpha+\beta) - 2Q\sin\alpha\cos\alpha)}{a\left(P + 2\frac{s}{r}Q\right) + (hP + 2sQ)(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)},$$

und dann

$$2E = \frac{Z + \varphi Y}{1 + \varphi^2}, \quad 2F = \frac{Y - \varphi Z}{1 + \varphi^2}, \quad G = \frac{Y - \varphi Z}{Z + \varphi Y};$$

so wie ferner aus (4 u. 6):

$$2R = Y - 2Q(\sin\alpha + X) = \mu Z + 2Q\left(\frac{s}{r} - r\right)X\,,$$

und aus (5)

$$2N = Z + 2Q\cos\alpha\,.$$

Die Ergänzung der Verhältnisszahl μ lässt sich endlich eben so wie für die gleichförmige Bewegung (§. 13) bewerkstelligen; so dass die Auflösung für jeden Werth des Winkels a und der Kraft K genau ist. Indem man von den Zeichen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in dem Sinne wie in (§. 13) wieder Gebrauch macht, ist hier:

$$\mathfrak{A} = P(C\cos\alpha - aK\sin\beta) + (hP + 2sQ)K\cos(\alpha+\beta)\,,$$

$$\mathfrak{B} = \frac{2Q}{\mathfrak{A}}\Big(\sin\alpha\big(aP + (hP + 2sQ)\sin\alpha\big) + \frac{s}{r}(aK\cos\beta - C\sin\alpha)\Big)\,,$$

$$\mathfrak{C} = -\frac{2Q}{\mathfrak{A}}\Big(\sin\alpha\cos\alpha(hP + 2sQ) - \frac{s}{r}(C\cos\alpha - aK\sin\beta)\Big)$$

zu setzen.

§. 15.

Wird in den für die beschleunigte Bewegung entwickelten Ausdrücken $K = V$ gesetzt, so wird $X = 0$, und es gehen, wie es sein muss, die übrigen Ausdrücke in die entsprechenden für die gleichförmige Bewegung (§. 12) über.

Sollen, indem man $K = V + v$ setzt, die diesen beiden Theilen von K angehörigen Theile der gesuchten Grössen von einander abgesondert dargestellt werden, so erhält man, wenn die dem Theile V oder der gleichförmigen Bewegung zukommenden Theile zur Unterscheidung in eckige Klammern eingeschlossen werden, und wenn H irgend einen der Ausdrücke, welche K nur im Zähler enthalten, vorstellt:

$$H = [H] + \frac{dH}{dH}\cdot v.$$

Dann ist

$$X = \frac{dH}{dH}\cdot v = \frac{a(\cos\beta + \mu\sin\beta) + n\cos\beta(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{a\left(P + 2\frac{s}{r}Q\right) + (hP + 2sQ)(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}\cdot v,$$

$$D = [D] + \frac{n\cos\beta\left(P + 2\frac{s}{r}Q\right) - (hP + 2sQ)(\cos\beta + \mu\sin\beta)}{a\left(P + 2\frac{s}{r}Q\right) + (hP + 2sQ)(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}\cdot v,$$

$$2E = [2E] + \frac{\begin{array}{c}1 + \varphi\mu)\left[(hP + 2sQ)\cos(\alpha+\beta) - (a\sin\beta + n\cos\beta\cos\alpha)P\right] \\ - 2\frac{s}{r}Q\left[a(\sin\beta - \varphi\cos\beta) + n\cos\beta(\cos\alpha - \varphi\sin\alpha)\right]\end{array}}{(1 + \varphi^2)\left[a\left(P + 2\frac{s}{r}Q\right) + (hP + 2sQ)(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\right]}\cdot v,$$

$$2F=[2F]+\frac{\begin{array}{c}(\mu-\varphi)((hP+2sQ)\cos(\alpha+\beta)-(a\sin\beta+n\cos\beta\cos\alpha)P)\\ +2\frac{s}{r}Q[a(\cos\beta+\varphi\sin\beta)+n\cos\beta(\sin\alpha+\varphi\cos\alpha)]\end{array}}{(1+\varphi^2)\left[a\left(P+2\frac{s}{r}Q\right)+(hP+2sQ)(\sin\alpha+\mu\cos\alpha\right]}v,$$

u. s. w.

Und wenn K sowohl im Nenner als im Zähler eines gebrochenen Ausdrucks vorkommt, wie in $G=\frac{F}{E}$, ergiebt sich

$$G=\frac{[F]+\frac{dF}{dK}v}{[E]+\frac{dE}{dK}v}=G+\frac{[E]\frac{dF}{dK}-[F]\frac{dE}{dK}}{[E]\left([E]+\frac{dE}{dK}v\right)}.v,$$

oder, wenn die Glieder, welche v^2 als Factor enthalten, weggelassen werden:

$$G=[G]+\frac{[E]\frac{dF}{dK}-[F]\frac{dE}{dK}}{[E]^2}v.$$

Für den Quotienten $\frac{R}{N}$ findet man auf solche Art, wenn $[\mathfrak{Z}]$ den Zähler, ε den Nenner der Grösse Z (§. 12) und $\mathfrak{Z}$ den Zähler der Grösse Z (§. 14) bedeutet:

$$\left[\frac{R}{N}\right]+2Q.v\frac{(\frac{s}{r}-1)([\mathfrak{Z}]+2Q.\varepsilon\cos\alpha)+\mu\cos\alpha\frac{d\mathfrak{Z}}{dK}}{(a(P+2\frac{s}{r}Q)+(hP+2sQ)(\sin\alpha+\mu\cos\alpha))[2N]^2},$$

$$=\left[\frac{R}{N}\right]+2Q.v\frac{\begin{array}{c}(\frac{s}{r}-1)(bP+(a+r\sin\alpha)2Q)\cos(\alpha+\beta)+\mu\cos\alpha[(hP+2sQ)\cos(\alpha+\beta)\\ -(a\sin\beta+n\cos\beta\cos\alpha)(P+2Q)]\end{array}}{\left[a(P+2\frac{s}{r}Q)+(hP+2sQ)(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)\right][2N]^2}.$$

Bei stetiger Abnahme von v geht die beschleunigte rollende Bewegung nach und nach in die gleichförmig rollende über, bei welcher $\frac{d^2x}{dt^2}$ und $\frac{du}{dt}$ gleich Null sind; und da die Gleichungen (A) für jede unbekannte Grösse nur einen einzigen gültigen Werth geben, so ergeben sich für $v=0$ oder für $K=V$ alle unbekannten Grössen ganz eben so, wie wenn zur Bestimmung der gleichförmigen rollenden Bewegung ursprünglich $\frac{d^2x}{dt^2}$ und $\frac{du}{dt}$ in den Gleichungen gleich Null angenommen würden (§. 12). Der Fall, in welchem diese beiden Beschleunigungen zugleich Null sind, gehört daher eigenthümlich der *gleichförmigen rollenden Bewegung* an, obgleich die Gleichungen für diese Bewegung eigentlich nichts enthalten, was die Bedingung $\frac{dx}{dt}=ru$ ausdrückt, und es kann hieraus der Schluss gezogen werden, dass nur beim Rollen des Fuhrwerks die

beiderlei Bewegungen, die fortschreitende und die drehende der Räder, *zugleich gleichförmig* sein können (§. 24).

§. 16.

Wenn die Achse an den Rädern, statt am Körper des Fuhrwerks, wie es die Gleichungen (A) voraussetzen, fest ist, so tritt (§. 8) in der Gleichung (4) $G-\varphi$ an die Stelle von $G+\varphi$, und in der Gleichung (5) $1+\varphi G$ an die Stelle von $1-\varphi G$; oder es ändert der Coefficient φ in diesen beiden Gleichungen sein Vorzeichen, während das Vorzeichen in der Gleichung (6) ungeändert bleibt.

Die für $\alpha = 0$ aus (4 und 6) hervorgehende Gleichung

$$G-\varphi = \frac{\varphi\varrho}{r}\sqrt{(1+G^2)}$$

giebt dann $G-\varphi = \dfrac{\varphi\varrho(1+\varphi^2)}{r\sqrt{\left(1+\varphi^2-\left(\frac{\varphi\varrho}{r}\right)^2\right)}-\varphi^2\varrho}$; welcher Bruch im Verhältniss zu φ jedenfalls klein ist, so dass bei der Entwicklung von $\sqrt{(1+G^2)}=\sqrt{[1+(\varphi+G-\varphi)^2]}$ nach $G-\varphi$ die Quadrate von $G-\varphi$ ausser Acht gelassen werden können, und in der Gleichung (6) $\sqrt{(1+\varphi^2)}+\frac{\varphi}{\sqrt{(1+\varphi^2)}}(G-\varphi) = \frac{1+\varphi G}{\sqrt{(1+\varphi^2)}}$ als angenäherter Werth an die Stelle von $\sqrt{(1+G^2)}$ gesetzt werden kann.

Wird hierauf ferner

$$\frac{\varphi\varrho}{r\sqrt{(1+\varphi^2)}} \text{ wieder} = \mu \quad , \quad 2E(G-\varphi) = Y \quad , \quad 2E(1+\varphi G) = Z$$

gesetzt; so findet die Entwicklung der Gleichungen (A), sowohl für die beschleunigte als für die gleichförmige Bewegung, wie auch die nachträgliche Ergänzung der Wurzelgrösse $\sqrt{(1+\varphi^2)}$, durch welche die Ergebnisse der Rechnung genau werden (§. 13 u. 14), ganz eben so Statt, wie im Vorigen gezeigt ist. Diese Ergebnisse werden daher auch zu den nemlichen, wie in dem zuerst vorausgesetzten Falle; nur mit dem Unterschiede, dass der Coefficient φ, welcher in μ ungeändert bleibt, so weit er in die entwickelten Ausdrücke für sich eingeht, das entgegengesetzte Vorzeichen bekommt. Das in der Gleichung (8) vorkommende φ behält, weil es von μ herrührt, ebenfalls sein Vorzeichen ungeändert bei.

Da unter diesen Ausdrücken nur die von $2E$ und von $2F$ oder G den Coefficienten φ anders als in μ enthalten, so folgt, dass die Grössen V, X, D, R, N nicht davon abhangen, ob die Achse an den Rädern, oder am Körper des Fuhrwerks fest ist, (diese Unabhängigkeit ist nur insofern nicht vollständig, als die

Grössen P, Q und k oder s nicht in beiden Fällen ganz die gleiche Bedeutung haben (§. 7).): dass dagegen diese Verschiedenheit in der Verbindung der Theile auf die Grössen E, F und G einigen, auf E jedoch nur einen unbedeutenden Einfluss hat.

Die Tangente G und der Theildruck F sind, wenn die Achse an den Rädern fest ist, als positiv, im andern Falle als wesentlich negativ zu betrachten, und die Berührung zwischen der Achse und ihrem Lager wird daher bei rollender Bewegung in beiden Fällen gewöhnlich *hinter* dem auf der Bahnlinie senkrechten Raddurchmesser Statt finden (§. 8).

§. 17.

Die Kraft, welche nöthig ist, um das Fuhrwerk im Zustande der *Ruhe*, in welchem die Widerstände der Bewegung nicht thätig sind, zu erhalten, ist eine andere als die Kraft V, welche zur Erhaltung desselben im Zustande der gleichförmigen *Bewegung* erfordert wird.

Die Gleichungen (A), welche für $X = 0$ die Bedingungen der gleichförmigen Bewegung oder des Gleichgewichts der Bewegung ausdrücken, gehen in die Gleichungen des *Gleichgewichts der Ruhe* über, wenn man in ihnen den Reibungs-Coefficienten $\varphi = 0$ setzt, wodurch auch $R = 0$ wird; und eben so ergeben sich die Unbekannten des Gleichgewichts der Ruhe, wenn man in den aus den Gleichungen (A) für $X = 0$ abgeleiteten Ausdrücken (§. 12 u. 13) φ und μ gleich Null annimmt.

So erhält man; indem man die Unbekannten für den Zustand der Ruhe mit V^0, D^0, u. s. w. bezeichnet:

$$V^0 = \frac{bP + (a + r\sin\alpha)2Q}{(a + n\sin\alpha)\cos\beta} \sin\alpha\,,$$

$$D^0 = \frac{(a - b + n\sin\alpha) + (n - r)\sin\alpha . 2Q}{a + n\sin\alpha}\,,$$

$$2N^0 = \frac{bP + (a + r\sin\alpha)2Q}{(a + n\sin\alpha)\cos\alpha} . \cos(\alpha + \beta),$$

$$2E^0 = \frac{(bP + r\sin\alpha . 2Q)\cos(\alpha + \beta) - (a\sin\beta + \cos\beta\cos\alpha)\sin\alpha . 2Q}{(a + n\sin\alpha)\cos\beta}\,,$$

$$2F^0 = 2Q\sin\alpha.$$

§. 18.

Um das Fuhrwerk aus dem Zustande der Ruhe in Bewegung zu setzen, muss die Kraft K grösser sein, als die zur gleichförmigen Bewegung erforderliche

Kraft V, und eine solche grössere Kraft-Anwendung muss so lange fortdauern, bis das Fuhrwerk diejenige Geschwindigkeit erlangt hat, mit der es gleichförmig sich bewegen soll.

Die Beziehungen zwischen der vom Anfange der Bewegung an verflossenen Zeit t, der Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ und dem zurückgelegten Wege x, ergeben sich, bei beschleunigter Bewegung, für jeden Augenblick derselben, die Kraft K mag beständig sein, oder, wie es bei thierischen Zugkräften der Fall ist, von der Geschwindigkeit abhangen, durch doppelte Integration der Gleichung $\frac{d^2x}{dt^2} = gX$, in welcher für X der entsprechende, im Vorigen entwickelte Ausdruck und für K der gegebene Werth der Zugkraft oder die bekannte Function der Geschwindigkeit zu setzen ist. Bei gleichförmiger Bewegung ist der zurückgelegte Weg gleich dem Product der beständigen Geschwindigkeit in die Dauerzeit der Bewegung. Die Winkelgeschwindigkeit u der Räder folgt aus der Gleichung $\frac{dx}{dt} = ru$.

Ist X negativ, oder K kleiner als V, so erfolgt eine Abnahme der vorhandenen Geschwindigkeit, bei deren Fortdauer die Bewegung zuletzt aufhört.

Aus dem Zustande der Ruhe kann das Fuhrwerk, nach Massgabe der Grösse und Richtung der Zugkraft K, in die *Bewegung rückwärts* übergehen, bei welcher nämlich die der Einrichtung des Fuhrwerks gemäss zum Vorausgehen bestimmten Theile desselben nachfolgen, und die Gleichungen (A), so wie sämmtliche aus ihnen abgeleiteten Ausdrücke, finden ebenfalls auf die Bewegung rückwärts Anwendung; nur ist dabei zu beachten, dass, indem die Richtung des Weges nun in dem Sinne genommen wird, welcher dem der zuvor angenommenen Bewegung vorwärts entgegengesetzt ist, die Vorzeichen der Abstände i, m und c, a, b, welche sich auf diese Richtung beziehen, so wie den Bestimmungen des (§. 7) gemäss, die Vorzeichen der gleichfalls auf diese Richtung bezogenen Winkel α und β, zu ändern sind. So entspricht der ansteigenden Bewegung vorwärts die absteigende rückwärts, und der absteigenden Bewegung vorwärts die ansteigende rückwärts.

§. 19.

In Bezug auf die Ergebnisse der Auflösung der Gleichungen (A) mögen noch folgende weitere, zunächst sich darbietende Bemerkungen hier ihre Stelle finden.

Da der Coefficient f der Reibung zwischen dem Boden und den Rädern in die Gleichungen der rollenden Bewegung und in die daraus entwickelten Ausdrücke nicht eingeht, so hat die absolute Grösse dieses Coefficienten, oder die Gattung des Stoffs, aus welchem die Bahn besteht, und die besondere Beschaffenheit der letztern, an sich keinen Einfluss auf diese Bewegung; wenn nur überhaupt die Reibung stark genug ist, um eine rollende Bewegung möglich zu machen (§. 2), und übrigens die Beschaffenheit der Bahn den der Rechnung (§. 4) zum Grunde gelegten Voraussetzungen entspricht.

Die gegebene Grösse $s = r + \frac{k^2}{r}$ ist nur in den Ausdrücken, welche der beschleunigten Bewegung angehören, enthalten und kommt in jenen für die gleichförmige Bewegung, so wie auch der Abstand h in den Ausdrücken für die gleichförmige Bewegung auf horizontaler Bahn, nicht vor. Daher ist die gleichförmige Bewegung vom Trägheitsmomente der Räder, und eben diese Bewegung auf horizontaler Bahn, vom Abstande zwischen dem Schwerpuncte G und der Bahnlinie unabhängig.

Wie die Ausdrücke (§. 13) zeigen, ist das Gewicht $2Q$ der Räder bei horizontaler Bahn nur insofern von einigem Einfluss auf die gleichförmige Bewegung, als es durch Vermehrung des Drucks des Fuhrwerks auf den Boden die rollende Bewegung leichter möglich macht, und es hangt der Druck D auf die Unterstützung vor der Achse, welcher weder zu gross noch auch negativ werden darf, hauptsächlich von dem Gewichte P und von dem Abstande i oder c zwischen dem Puncte, in welchen das Rad die Bahn berührt, und der Verticallinie durch den Schwerpunct G ab.

Für den Winkel β, welcher die Kraft V zu einem kleinsten macht, findet sich

$$\operatorname{tg}\beta = \mu.\frac{a}{a + n(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} \quad \text{nahe} = \mu.$$

Der Neigungswinkel α, unter welchem ein mit irgend einer Geschwindigkeit sich abwärts bewegendes Fuhrwerk diese seine Bewegung von sich selbst, ohne der Beihülfe einer äussern Kraft zu bedürfen, gleichförmig beibehält, ergiebt sich aus der Gleichung $V = 0$, d. h.

$$(bP + r\sin\alpha.2Q)(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + a\sin\alpha.2Q = 0.$$

Sie giebt, in der Voraussetzung, dass bei einer Aenderung des Winkels α jede der übrigen als gegeben angenommenen Grössen beständig den gleichen Werth behalte:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{H}}\left[1 - \sqrt{\left(1 - \frac{\mathfrak{H}\mathfrak{K}}{\mathfrak{J}^2}\right)}\right] = -\frac{\mathfrak{K}}{2\mathfrak{J}}\left(1 + \frac{\mathfrak{H}\mathfrak{K}}{(2\mathfrak{J})^2} + \ldots\right), \text{ nahe} = -\frac{\mathfrak{K}}{2\mathfrak{J}},$$

wo $\mathfrak{H}$ statt $(h-l)P-(l-r)2Q$,

$\mathfrak{Z}$ statt $(m-i+\mu(h-l))P+(m+\mu r)2Q$ und
$\mathfrak{K}$ statt $\mu(m-i)P$

steht. Ist die Bahn stärker geneigt, so muss das Fuhrwerk auch aus dem Zustande der Ruhe von selbst in beschleunigter Bewegung abwärts rollen und einer bestimmten Beschleunigung ebenfalls ein gewisser Werth des Neigungswinkels α entsprechen, den man mittels entwickelten Ausdrucks von X findet, wenn in ihm die Kraft K gleich Null gesetzt wird.

Die Grösse $\mu = \frac{\varphi \varrho}{r\sqrt{(1+\varphi^2)}}$, welche je nach dem Werthe des Coefficienten φ und dem Verhältnisse, in welchem die Halbmesser der Räder und der Achse zu einander stehen, ein kleiner ächter Bruch ist, kann im Wesentlichen als dem mechanischen Effecte, den die Räder der Fuhrwerke leisten, umgekehrt proportional betrachtet werden, und sie wird im Folgenden der *Rad-Effect-Exponent* heissen.

Gleitende Bewegung.

§. 20.

Wenn der Coefficient f kleiner als $\frac{R}{N}$ ist, die rollende Bewegung, auf welche R und N sich beziehen, mag je nach dem Werthe der Zugkraft K beschleunigt oder gleichförmig sein, so kann die Bewegung nicht rollend, sondern nur gleitend, oder theilweise gleitend sein (§.2), und die Gleichungen (A) können auf dieselbe keine Anwendung finden.

(B.) Die *Gleichungen der theilweise gleitenden Bewegung* des zweirädrigen Fuhrwerks ergeben sich, indem man die Voraussetzungen und Folgerungen (§. 8), so wie die Bezeichnungen (§§. 7 u. 9) hier wieder anwendet und zur Abkürzung U statt $\frac{k^2}{g}\cdot\frac{du}{dt}$ schreibt, wenn die Rad-Achse zuvörderst als am Körper des Fuhrwerks fest angenommen wird. Für jeden Augenblick der Bewegung ist:

1) $K\cos\beta-(P+2Q-D)\sin\alpha-f.2N-(P+2Q)X=0,$
2) $K\sin\beta-(P+2Q-D)\cos\alpha+2N=0,$
3) $n\cos\beta.K+cP-r\sin\alpha.2Q-aD-(hP+2rQ)X-2Q.U=0,$
4) $2E(G+\varphi)-f2N-2Q(\sin\alpha+X)=0,$
5) $-2E(1-\varphi G)+2N-2Q\cos\alpha=0,$
6) $fr.2N-\varphi\varrho.2E\sqrt{(1+G^2)}-2Q.U=0.$

§. 21.

Nach Analogie der rollenden Bewegung werde in der Gleichung (6), um sie linear zu machen, $\frac{1-\varphi G}{\sqrt{(1+\varphi^2)}}$ statt $\sqrt{(1+G^2)}$ und $\frac{\varphi\varrho}{r\sqrt{(1+\varphi^2)}} = \mu$, so wie in den Gleichungen (4, 5, 6) $2E(G+\varphi) = Y$ und $2E(1+\varphi G) = Z$ gesetzt.

Wird dann die *fortschreitende Bewegung* wieder zuerst als *gleichförmig* vorausgesetzt, was $X = 0$ giebt, so sind die sechs Unbekannten K, D, N, E, G und U zu suchen und man erhält

aus (1 u. 4) $\quad Y = K\cos\beta - (P-D)\sin\alpha$,

aus (2 u. 5) $\quad -Z = K\sin\beta - (P-D)\cos\alpha$,

aus (3, 5 u. 6) $\quad a(P-D) = bP + 2rQ(\sin\alpha + f\cos\alpha) - n\cos\beta K + (f-\mu)rZ$,

aus (4 u. 5) $\quad Y - fZ = 2Q(\sin\alpha + f\cos\alpha)$.

Hieraus ergiebt sich, wenn V den der gleichförmigen, fortschreitenden Bewegung entsprechenden Werth von K bedeutet:

$$V = (\sin\alpha + f\cos\alpha)\frac{bP + (a + r(\sin\alpha + \mu\cos\alpha))2Q}{a(\cos\beta + f\sin\beta) + n\cos\beta(\sin\alpha + f\cos\alpha) - (f-\mu)r\cos(\alpha+\beta)},$$

$$D = P - \frac{bP(\cos\beta + f\sin\beta) + 2Q(\sin\alpha + f\cos\alpha)[r(\cos\beta + \mu\sin\beta) - n\cos\beta]}{a(\cos\beta + f\sin\beta) + n\cos\beta(\sin\alpha + f\cos\alpha) - (f-\mu)r\cos(\alpha+\beta)},$$

$$Y = \frac{fbP\cos(\alpha+\beta) + 2Q(\sin\alpha + f\cos\alpha)[r(a + n\sin\alpha)\cos\beta + \mu[r\cos(\alpha+\beta)]]}{a(\cos\beta + f\sin\beta) + n\cos\beta(\sin\alpha + f\cos\alpha) - (f-\mu)r\cos(\alpha+\beta)},$$

$$Z = \frac{bP\cos(\alpha+\beta) - 2Q(\sin\alpha + f\cos\alpha)[a\sin\beta + n\cos\beta\cos\alpha - r\cos(\alpha+\beta)]}{a(\cos\beta + f\sin\beta) + n\cos\beta(\sin\alpha + f\cos\alpha) - (f-\mu)r\cos(\alpha+\beta)},$$

und ferner

$$2E = \frac{Z+\varphi Y}{1+\varphi^2}, \quad 2F = \frac{Y-\varphi Z}{1+\varphi^2}, \quad 2G = \frac{Y-\varphi Z}{Z+\varphi Y},$$

wie auch aus (5),

$$2N = Z + 2Q\cos\alpha,$$

und aus (5 u. 6)

$$2Q.U = r((f-\mu)Z + f\cos\alpha.2Q).$$

Diese, vorerst angenäherten Ausdrücke werden genau, wenn man die Wurzelgrösse $\sqrt{(1+\varphi^2)}$ im Exponenten $\mu = \frac{\varrho\varphi}{r\sqrt{(1+\varphi^2)}}$ durch die aus der Gleichung $(Y^2+Z^2)y^2 = (1+\varphi^2)Z^2$ entwickelte Wurzel y, wie bei der rollenden Bewegung (§. 13) ersetzt; so jedoch, dass

$\mathfrak{A} = 2Q(\sin\alpha + f\cos\alpha)r\cos(\alpha+\beta)$,

$\mathfrak{B} = f\frac{bP\cos(\alpha+\beta)}{\mathfrak{A}} + \frac{2Q}{\mathfrak{A}}(\sin\alpha + f\cos\alpha)(a + n\sin\alpha)\cos\beta$,

$$\mathfrak{G} = \frac{bP\cos(\alpha+\beta)}{\mathfrak{A}} - \frac{2Q}{\mathfrak{A}}(\sin\alpha + f\cos\alpha)\,(a\sin\beta + n\cos\beta\cos\alpha - r\cos(\alpha+\beta))$$

gesetzt wird.

§. 22.

Wird allgemeiner die theilweise gleitende *Bewegung* als eine *beschleunigte* und K als gegeben betrachtet, so geben die Gleichungen

(B.)(1 u. 4) $\quad Y = K\cos\beta - (P-D)\sin\alpha - PX,$

(2 u. 5) $\quad -Z = K\sin\beta - (P-D)\cos\alpha,$

(2, 3, 5 u. 6) $\quad (a-(f-\mu)r\cos\alpha)(P-D) = C-(f-\mu)rK\sin\beta + (hP+2rQ)X,$

(wo C statt $bP+2rQ(\sin\alpha+f\cos\alpha) - n\cos\beta\,.\,K$ steht),

(4 u. 5) $\quad Y - fZ = 2Q(\sin\alpha + f\cos\alpha + X),$

Hieraus findet sich

$$X = \frac{[a(\cos\beta+f\sin\beta)-(f-\mu)r\cos(\alpha+\beta)]K-(\sin\alpha+f\cos\alpha)[C+(a-(f-\mu)r\cos\alpha)2Q]}{[a-(f-\mu)r\cos\alpha](P+2Q)+(hP+2rQ)(\sin\alpha+f\cos\alpha)},$$

$$D = P - \frac{(P+2Q)[C-(f-\mu)rK\sin\beta]+(hP+2rQ)[K(\cos\beta+f\sin\beta)-2Q(\sin\alpha+f\cos\alpha)]}{[a-(f-\mu)r\cos\alpha](P+2Q)+(hP+2rQ)(\sin\alpha+f\cos\alpha)},$$

$$Y = \frac{\left\{\begin{array}{l} fP(C\cos\alpha - aK\sin\beta)+f(hP+2rQ)K\cos(\alpha+\beta) \\ \quad +2Q(aK\cos\beta)-C\sin\alpha-(f-\mu)rK\cos(\alpha+\beta)+(\sin\alpha+f\cos\alpha) \\ \qquad \times[(a-(f-\mu)r\cos\alpha)P-(hP+{}^2rQ)\sin\alpha)] \end{array}\right.}{(a-(f-\mu)r\cos\alpha)(P+2Q)+(hP+2rQ)(\sin\alpha+f\cos\alpha)},$$

$$Z = \frac{(P+2Q)(C\cos\alpha-aK\sin\beta)+(hP+2rQ)[K\cos(\alpha+\beta)-2Q\cos\alpha(\sin\alpha+f\cos\alpha)]}{(a-(f-\mu)r\cos\alpha)(P+2Q)+(hP+2rQ)(\sin\alpha+f\cos\alpha)}$$

Auch ist wieder

$$2E = \frac{Z+\varphi Y}{1+\varphi^2}, \quad 2F = \frac{Y-\varphi Z}{1+\varphi^2}, \quad G = \frac{Y-\varphi Z}{Z+\varphi Y},$$

und vermöge (5)

$$2N = Z + 2Q\cos\alpha,$$

so wie aus (5 u. 6)

$$2Q.U = r(f-\mu)Z + f\cos\alpha.2Q).$$

Um die gefundenen Ausdrücke *genau* zu machen und die Auflösung der Gleichungen (B) zu vervollständigen, hat man die Wurzelgrösse $\sqrt{(1+\varphi^2)}$ im Exponenten μ auf gleiche Weise wie bei der rollenden Bewegung (§. 13) zu ergänzen; und zwar ist hier

$$\mathfrak{A} = 2rQ(K\cos(\alpha+\beta) + P\cos\alpha(\sin\alpha + f\cos\alpha)),$$

$$\mathfrak{B} = f\frac{P}{\mathfrak{A}}(C\cos\alpha - aK\sin\beta) + f\frac{hP+2rQ}{\mathfrak{A}}K\cos(\alpha+\beta)$$

$$+\frac{2Q}{\mathfrak{A}}(aK\cos\beta - C\sin\alpha - frK\cos(\alpha+\beta)$$
$$+(\sin\alpha + f\cos\alpha)[(a - fr\cos\alpha)P - (hP + 2rQ)\sin\alpha],$$
$$\mathfrak{G} = \frac{P+2Q}{\mathfrak{A}}(C\cos\alpha - aK\sin\beta) + \frac{hP+2rQ}{\mathfrak{A}}[K\cos(\alpha+\beta) - 2Q\cos\alpha(\sin\alpha + f\cos\alpha)]$$

zu setzen.

§. 23.

Wird in den Ausdrücken der Zugkraft K (§. 22) der Werth V für gleichförmig fortschreitende Bewegung (§. 21) gegeben, so wird $X = 0$, und es müssen sämmtliche Ausdrücke des ersteren Paragraphen in die entsprechenden des letzteren übergehen.

Wenn die Achse an den Rädern fest ist, so ändert der Coefficient φ sein Vorzeichen in den Gleichungen (B, 4 u. 5), und behält es in der Gleichung (6 §. 16) bei; was zur Folge hat, dass auch in den Ergebnissen dieser Gleichungen das Vorzeichen des Coefficienten φ, soweit er für sich vorkommt, nicht aber im Exponenten μ, selbst nicht im ergänzten μ, zu ändern ist.

Von allen aus den Gleichungen (B) abgeleiteten Ausdrücken, sowohl für beschleunigte, als für gleichförmig fortschreitende Bewegung, enthalten aber nur die Ausdrücke von E, F und G das φ anders als in μ, und es folgt daraus, dass nur auf diese letzteren, nicht aber auf die übrigen Ausdrücke und die Grössen, welche sie vorstellen, der Umstand, ob die Achse an den Rädern oder am Körper des Fuhrwerks fest ist, einigen Einfluss hat. (Man vergleiche die Anmerk. zu §. 16.)

Für das *Gleichgewicht der Ruhe* ergeben sich die Ausdrücke aus denen (§. 21), indem man f und φ, also auch μ, gleich Null setzt: eben so wie sie aus den Ausdrücken für die gleichförmig rollende Bewegung (§. 17) hervorgegangen sind.

Die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ der fortschreitenden Bewegung des Fuhrwerks, und die Winkelgeschwindigkeit u der Räder in irgend einem Augenblicke der Bewegung finden sich durch Integration der Gleichungen $\frac{d^2x}{dt^2} = gX$ und $\frac{du}{dt} = \frac{g}{k^2}U$, in welchen für X und U die diesen Grössen entsprechenden Ausdrücke, und zwar für U, je nachdem die fortschreitende Bewegung gleichförmig oder beschleunigt ist, der Ausdruck (§. 21) oder der (§. 22) zu setzen sind. Den zurückgelegten Weg x giebt dann eine zweite Integration der ersten dieser bei-

den Gleichungen. Die bei der Integration hinzukommenden Constanten hangen davon ab, ob das Fuhrwerk aus der rollenden Bewegung, oder aus dem Zustand der Ruhe in die gleitende Bewegung übergeht.

Wenn $\sin\alpha + f\cos\alpha = 0$ oder $tg\alpha = -f$ ist, so erhält man $V = 0$; woraus folgt, dass, wenn f kleiner als der Quotient $\frac{R}{N}$ der gleichförmigen rollenden Bewegung und die Bahn stärker geneigt ist, als unter dem der Gleichung $tg\,\alpha = -f$ entsprechenden Winkel α, beim Bergabfahren die theilweise gleitende Bewegung des Fuhrwerks ohne Mitwirkung einer äussern Zugkraft von selbst sich beschleunigt.

§. 24.

Werden in der Gleichung $U = (s - r)X$, welche aus der Bedingungsgleichung der rollenden Bewegung $ru = \frac{dx}{dt}$ (§. 9 u. 20) folgt, für U und X die entsprechenden Ausdrücke (§. 22) gesetzt, so findet sich daraus $f = \frac{R}{N}$ gleich dem Reibungsquotienten für beschleunigte rollende Bewegung; und eben so ergiebt sich aus der Gleichung $U = 0$, wenn U den bezüglichen Ausdruck (§. 21) bedeutet, f gleich dem Reibungsquotienten $\frac{R}{N}$ für gleichförmige rollende Bewegung. Umgekehrt müssen die abgeleiteten Ausdrücke (§. 22), wenn man in ihnen statt f den Reibungsquotienten $\frac{R}{N}$ für beschleunigte rollende Bewegung, und eben so die Ausdrücke (§. 21), wenn man in denselben statt f den Quotienten $\frac{R}{N}$ für gleichförmige rollende Bewegung setzt, in die entsprechenden Ausdrücke der beschleunigten oder gleichförmigen rollenden Bewegung übergehen; so dass die Gleichungen (B) von allgemeinerer Bedeutung sind, als die Gleichungen (A), und die rollende Bewegung zugleich als einen besondern Fall in sich begreifen.

Die beiden Gleichungen $X = 0$ und $U = 0$, X und U in Bezug auf die theilweise gleitende Bewegung genommen, führen daher, in Verbindung mit den Gleichungen (B), nothwendig nur auf die Ausdrücke der gleichförmigen rollenden Bewegung, und dadurch zu dem Schlusse, dass bei theilweise gleitender Bewegung die fortschreitende des Fuhrwerks und die drehende der Räder nicht zugleich gleichförmig sein können.

Werden die Ausdrücke für beschleunigte, theilweise gleitende Bewegung (§. 22) (indem man $\mu = \frac{\varphi\varrho}{r\sqrt{(1+\varphi^2)}}$ oder unabhängig von f annimmt), nach f differentiirt, so findet sich:

$$\frac{dX}{df} = -[a + r(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)]\frac{\Pi}{M^2},\quad \frac{d(2N)}{df} = \frac{d(P-D)}{df}\cos\alpha = -(h-r)P\cos\alpha\frac{\Pi}{M^2},$$

$$\frac{2Q}{r}\cdot\frac{dU}{df} = [a(P+2Q) + (hP+2rQ)(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)]\frac{\Pi}{M^2},\ \text{u. s. f.};$$

wo M den Nenner dieser Ausdrücke bedeutet oder

$$= [a - (f-\mu)r\cos\alpha](P+2Q) + (hP+2rQ)(\sin\alpha + f\cos\alpha),$$

und

$$\Pi = (P+2Q)[(bP + (a+r(\sin\alpha+\mu\cos\alpha))2Q)\cos\alpha - (a\sin\beta + n\cos\beta\cos\alpha)K] + (hP+2rQ)K\cos(\alpha+\beta),$$

also

$$= \frac{M\cos(\alpha+\beta)[bP + (a + r(\sin\alpha + \mu\cos\alpha))2Q]}{a(\cos\beta + f\sin\beta) + n\cos\beta(\sin\alpha + f\cos\alpha) - (f-\mu)r\cos(\alpha+\beta)}\ \text{für}\ K = V$$

ist. Man kann hiernach $\frac{dX}{df}$ als wesentlich *negativ*, $\frac{dU}{df}$ als wesentlich *positiv* betrachten, so dass bei abnehmendem f die Grösse X zunimmt, U dagegen ebenfalls abnimmt. Es ist

$$\frac{dV}{df} = \frac{[bP + (a + r(\sin\alpha + \mu\cos\alpha))2Q]\cos(\alpha+\beta)[a + r(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)]}{[a(\cos\beta + f\sin\beta) + n\cos\beta(\sin\alpha + f\cos\alpha) - (f-\mu)r\cos(\alpha+\beta)]^2},$$

wesentlich positiv, und V nimmt mit f zugleich ab und zu.

§. 25.

Werden ferner die Verhältnisse, welche das Entstehen der rollenden und der gleitenden Bewegung im Allgemeinen bedingen, in nähere Erwägung gezogen (§. 2), so ergeben sich in Bezug auf die theilweise gleitende Bewegung folgende weiteren Schlüsse.

Da der Coefficient von v in dem Ausdrucke des Quotienten $\frac{R}{N}$ (§. 15) als positiv zu betrachten oder $\frac{R}{N}$ (bei positivem v) $> \left[\frac{R}{N}\right]$ ist, so kann bei beschleunigter rollender Bewegung leichter als bei gleichförmiger ein Gleiten der Räder vorkommen.

Bezeichnet K_f denjenigen Werth der Kraft K, welcher den Reibungsquotienten $\frac{R}{N}$ für beschleunigte rollende Bewegung dem Coefficienten f gleich

macht, so drückt, da $\frac{R}{N}$ mit K zugleich wächst und abnimmt, $K_f \geqq K$ oder $K \leqq K_f$, eben so wie $f \geqq \frac{R}{N}$, die Bedingung für das Entstehen der *rollenden* Bewegung, und $K_f < K$ oder $K > K_f$, eben so wie $f < \frac{R}{N}$, die Bedingung für das Entstehen der theilweise *gleitenden* Bewegung aus.

$$K_f \text{ findet sich } = V + \frac{\Re(f[2N] - [2R])}{(\frac{s}{r}-1)\varepsilon \cdot 2Q + (\mu - f)\frac{d\mathfrak{Z}}{dK}},$$

wenn $\Re$ den Nenner $a\left(P + 2\frac{s}{r}Q\right) + (hP + 2sQ)(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ der Ausdrücke (§. 14) bedeutet, und die Zeichen V, $[2N]$, $[2R]$, ε und $\mathfrak{Z}$ in gleicher Bedeutung wie in (§. 15) genommen werden.

Wenn, während das zweirädrige Fuhrwerk durch die Wirkung einer beständigen Kraft K, welche grösser ist als der Werth von V (§. 12), sich in beschleunigter rollender Bewegung befindet, der Coefficient f kleiner wird als der Quotient $\frac{R}{N}$ der rollenden Bewegung, ohne dass K sich ändert, so muss dadurch die Beschleunigung der *fortschreitenden* Bewegung stärker, die der umdrehenden Bewegung aber schwächer, oder die Bewegung *theilweise gleitend* werden. Nimmt f weiter ab, bei einem solchen Werthe von K, so wird U gleich Null, für einen Werth von f, der sich aus den Gleichungen (B) ergiebt, wenn man in ihnen $U = 0$ setzt, und welcher dem aus den Gleichungen (A) hervorgehenden Quotienten $\frac{R}{N}$ gleich ist, wenn man in ihm $s = r$ setzt. Die umdrehende Bewegung der Räder ist dann gleichförmig, während die fortschreitende an Geschwindigkeit fortwährend zunimmt; wodurch die Bewegung des Fuhrwerks immer mehr gleitend wird. Durch weitere Abnahme von f wird U negativ, oder die umdrehende Bewegung wird zu einer verzögerten, so dass sie zuletzt ganz aufhört und die Bewegung ganz gleitend wird.

Eben so muss, wenn bei gleichförmiger rollender Bewegung der Coefficient f kleiner wird als der Quotient $\frac{R}{N}$ dieser Bewegung, wodurch U einen negativen Werth erhält, die umdrehende Bewegung langsamer werden und die Bewegung des Fuhrwerks nach und nach in eine *ganz gleitende* übergehen. Die fortschreitende Bewegung wird in Folge dieses Herabsinkens von f unter $\frac{R}{N}$ beschleunigt und kann nur gleichförmig bleiben, wenn auch die Zugkraft K verhältnissmässig abnimmt.

Auch wenn die rollende Bewegung des Fuhrwerks nach Massgabe des Werths von K eine verzögerte ist oder X und U negativ sind, muss, wenn f kleiner wird als $\frac{R}{N}$, die Bewegung theilweise, und zuletzt *ganz gleitend* werden.

Bei theilweise gleitender Bewegung und beständiger Zugkraft ist demnach, wenn die Räder sich gleichförmig drehen, die fortschreitende Bewegung eine *beschleunigte*, oder wenn die letztere gleichförmig ist, die umdrehende Bewegung eine *verzögerte*.

Ein negativer Werth von U kann nur dazu dienen, eine vorhandene Umdrehungsgeschwindigkeit zu vermindern und nach und nach ganz zu vernichten. Die hiezu erforderliche Zeitdauer ergiebt sich aus dem Integral der Gleichung $\frac{du}{dt} = \frac{g}{k^2}.U$. Er kann aber nie die Wirkung haben, dass die Umdrehung der Räder die der rollenden entgegengesetzte Richtung annimmt, und nur wenn U einen positiven Werth hat, kann eine umdrehende Bewegung, sei es aus dem Zustande der Ruhe, oder aus dem der ganz gleitenden Bewegung, wirklich entstehen.

Von dem Augenblicke an, in welchem die Umdrehung der Räder ganz aufhört und die Bewegung nur noch fortschreitend ist, treten wieder andere Verhältnisse ein, und es beginnt ein neuer Zeit-Abschnitt der Bewegung. Der Coefficient φ, welcher nicht mehr mit seinem vollen Werthe zur Anwendung kommt, tritt nämlich nun, wie bei der rollenden Bewegung der Coefficient f, von welchem nur ein, dem zu bestimmenden Quotienten $\frac{R}{N}$ gleicher Theil erforderlich ist und thätig wird, als unbekannt auf, und erhält seine Bestimmung durch die Gleichung (B, 6), in welcher U beständig gleich Null ist, d. h. durch die Gleichung

$$(f-\mu)Z + f\cos\alpha.2Q = 0,$$

welche, da der hier anzuwendende Ausdruck von Z (§. 22) im Zähler weder μ noch φ enthält, nur den zweiten Grad erreicht, selbst wenn das ergänzte μ in Rechnung gebracht wird. Und der so bestimmte Werth des Coefficienten φ wäre auch bei der Bewegung von der Stelle aus in Anwendung zu bringen wenn durch den vollen Werth desselben die Grösse U negativ sich ergeben sollte.

Wenn $f = 0$ ist und die Bewegung aus dem Zustande der Ruhe anfängt, so ist sie ebenfalls *ganz gleitend*, oder die Winkelgeschwindigkeit u beständig gleich Null, und in den Gleichungen (B) und deren Ergebnissen ist in diesem Falle, ausser f, auch φ und μ gleich Null zu setzen; nicht aber, wenn $f = 0$ wird, nachdem die Räder bereits in drehender Bewegung sich befinden.

§. 26.

Die Bewegung *mit gesperrten Rädern*, welche sowohl beschleunigt als gleichförmig sein kann, macht endlich noch einen weitern Fall der ganz gleitenden Bewegung aus. Dieser Fall, in welchem das ganze Fuhrwerk nur ein einziges System fester Körper bildet, und für welches die Gleichungen (B 4, 5 und 6) wegfallen und die Zahl der zu bestimmenden Unbekannten auf drei, nämlich X, D, N oder K, D, N sich beschränkt, erfordert eine besondere Auflösung der Gleichungen (B, 1, 2 u. 3), in welchen $U = 0$ ist. Man findet für die *beschleunigte* Bewegung:

$$X = \frac{[a(\cos\beta + f\sin\beta) + n\cos\beta(\sin\alpha + f\cos\alpha)]K - (\sin\alpha + f\cos\alpha)[bP + (a + r\sin\alpha)2Q]}{a(P + 2Q) + (\sin\alpha + f\cos\alpha)(hP + 2rQ)},$$

$$D = P - \frac{(P+2Q)(bP + r\sin\alpha.2Q - n\cos\beta.K) + (hP + 2rQ)[K(\cos\beta + f\sin\beta) - 2Q(\sin\alpha + f\cos\alpha)]}{a(P + 2Q) + (\sin\alpha + f\cos\alpha)(hP + 2rQ)},$$

$$2N = \frac{(P+2Q+)[(bP + (a + r\sin\alpha)2Q)\cos\alpha - (a\sin\beta + n\cos\beta\cos\alpha)K] + (hP + 2rQ)K\cos(\alpha + \beta)}{a(P + 2Q) + (\sin\alpha + f\cos\alpha)(hP + 2rQ)},$$

und für die gleichförmige Bewegung:

$$K = \frac{(\sin\alpha + f\cos\alpha)[bP + (a + r\sin\alpha)2Q]}{a(\cos\beta + f\sin\beta) + n\cos\beta(\sin\alpha + f\cos\alpha)},$$

$$D = P - \frac{(bP + r\sin\alpha.2Q)(\cos\beta + f\sin\beta) - (\sin\alpha + f\cos\alpha)n\cos\beta.2Q}{a(\cos\beta + f\sin\beta) + n\cos\beta(\sin\alpha + f\cos\alpha)},$$

$$2N = \frac{\cos(\alpha + \beta)[bP + (a + r\sin\alpha)2Q]}{a(\cos\beta + f\sin\beta) + n\cos\beta(\sin\alpha + f\cos\alpha)}.$$

Auch in dem Falle, wenn *nur ein Rad* gesperrt ist, wird man, sofern anders dadurch die Voraussetzung (§. 4), dass sämmtliche auf das Fuhrwerk einwirkenden Kräfte und Widerstände als in einer und derselben Ebene liegend betrachtet werden können, nicht zu sehr gestört wird, zur Lösung aller, das Gleichgewicht und die Bewegung des Fuhrwerks betreffenden Fragen, auf welche hier nicht näher eingegangen werden mag, auf dem im Vorigen betretenen Wege gelangen können.

Zweites Capitel.

Das vierrädrige Fuhrwerk erster Art (mit fester Verbindung der Gestelle).

Bezeichnungen.

§. 27.

Der Punct, von welchem ab der Weg x der fortschreitenden Bewegung des Fuhrwerks gerechnet wird, ist der Punct, in welchem *beim Anfange der Bewegung das Hinterrad* die Bahnlinie berührt.

Die Buchstaben α, β, P, K, g haben die gleiche Bedeutung, wie beim zweirädrigen Fuhrwerk (§. 7); eben so die Buchstaben n, h, i, c; und die Abstände n, i, c werden von dem Puncte an gerechnet, in welchem das Hinterrad und die Bahnlinie sich berühren.

Die Buchstaben N, R, E, F, G Q, u, r, ϱ, f, φ, k sind ebenfalls in derselben Bedeutung genommen, wie beim zweirädrigen Fuhrwerk, und beziehen sich auf die *Hinterräder*. Die Buchstaben mit Beistrich N_1, R_1, E_1, F_1, G_1, Q_1, u_1, r_1, ϱ_1, f_1, φ_1, k_1 beziehen sich dagegen mit der gleichen Bedeutung auf die *Vorderräder*, wie die ohne Beistrich auf die Hinterräder.

e ist der in seiner Projection auf die Bahnlinie genommene Abstand zwischen den unter sich parallelen beiden Axenlinien.

Als Abkürzungen werden die Bezeichnungen X für $\frac{1}{g}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}$, s für $r+\frac{k^2}{r}$, s_1 für $r_1+\frac{k_1^2}{r_1}$, U für $\frac{k^2}{g}\cdot\frac{du}{dt}$ und U_1 für $\frac{k_1^2}{g}\cdot\frac{du_1}{dt}$ stehen.

Rollende Bewegung.

§. 28.

Das vierrädrige Fuhrwerk erster Art besteht aus drei verschiedenen Systemen fester Körper. Das ganze Fuhrwerk, mit Inbegriff der Last und der Räder, wird als das erste, das hintere Räderpaar als das zweite, und das vordere Räderpaar als das dritte System betrachtet werden.

Um die Bedingungen des dynamischen Gleichgewichts durch Gleichungen darzustellen, werden die Kräfte und Widerstände, wie beim zweirädrigen Fuhrwerk (§. 8), für jedes System nach der Axe der x und einer darauf senkrechten Richtung zerlegt, und es wird zum Mittelpunct ihrer Momente für das erste System der Berührungspunct zwischen dem Hinterrade und der Bahnlinie, und für jedes der beiden andern Systeme der Mittelpunct des Rad-Umfanges, durch welchen die Axenlinie des Systems geht, genommen werden.

Werden demgemäss die Beschleunigungen der fortschreitenden und umdrehenden Bewegung, der Widerstand der Reibung an den Rad-Achsen und die Momente der Beschleunigungen und dieses Widerstandes, so wie die übrigen einwirkenden Kräfte und Widerstände und deren Momente, in Uebereinstimmung mit den Grundsätzen, welche beim zweirädrigen Fuhrwerk (§. 8, 9) Anwendung fanden, in Rechnung gebracht, so ergeben sich

(C.) *Folgende Gleichungen der rollenden Bewegung,*

bei welcher $\frac{dx}{dt} = ru = r_1 u_1$ ist, unter der Voraussetzung, dass die Achsen am Körper des Fuhrwerks fest sind, und zwar für jeden Augenblick der Bewegung

1) $K \cos\beta - 2R - 2R_1 - (P + 2Q + 2Q_1)(\sin\alpha + X) = 0,$

2) $K \sin\beta + 2N + 2N_1 - (P + 2Q + 2Q_1)\cos\alpha = 0,$

3) $n\cos\beta . K + cP - r\sin\alpha . 2Q + e(\cos\alpha - r_1 \sin\alpha) 2Q_1 - \varrho . 2N_1 - (hP + 2sQ + 2s_1 Q_1) X = 0,$

4) $2E(G + \varphi) - 2R - 2Q(\sin\alpha + X) = 0,$

5) $-2E(1 - \varphi G) + 2N - 2Q\cos\alpha = 0,$

6) $r . 2R - \varphi\varrho\, 2E\sqrt{(1 + G^2)} - 2Q(s - r)X = 0,$

7) $2E_1(G_1 + \varphi_1) - 2R_1 - 2Q_1(\sin\alpha + X) = 0,$

8) $-2E_1(1 - \varphi_1 G_1) + 2N_1 - 2Q_1\cos\alpha = 0,$

9) $r_1 . 2R_1 - \varphi_1\varrho_1 . 2E_1\sqrt{(1 + G_1^2)} - 2Q_1(s_1 - r_1)X = 0.$

§. 29.

Bei *beschleunigter* Bewegung sind $X, R, R_1, N, N_1, E, E_1, G, G_1$ die durch diese Gleichungen zu bestimmenden Grössen, und bei *gleichförmiger* Bewegung ist statt X, welches als verschwindend wegfällt, K zu suchen. Die Zahl der Gleichungen ist daher für beiderlei Bewegungen zur Bestimmung der Unbekannten ausreichend und nothwendig.

Nach dem Vorgange des beim zweirädrigen Fuhrwerk (§. 11) angewendeten Verfahrens setze man nun, um die Gleichungen (6 u. 9) *linear* zu machen, wieder $\frac{1 - \varphi G}{\sqrt{(1 + \varphi^2)}}$ statt $\sqrt{(1 + G^2)}$; eben so $\frac{1 - \varphi_1 G_1}{\sqrt{(1 + \varphi_1^2)}}$ statt $\sqrt{(1 + G_1^2)}$, und zur Abkürzung:

$$\frac{\varphi\varrho}{r\sqrt{(1+\varphi^2)}} = \mu \;, \qquad \frac{\varphi_1\varrho_1}{r_1\sqrt{(1+\varphi_1^2)}} = \beta_1,$$

$$2E(G + \varphi) = Y \;, \quad 2E(1 - \varphi G) = Z,$$

$$2E_1(G_1 + \varphi_1) = Y_1 \;, \quad 2E_1(1 - \varphi_1 G_1) = Z_1,$$

wodurch sich

$$2E = \frac{Z + \varphi Y}{1 + \varphi^2} \;, \quad 2F = \frac{Y - \varphi Z}{1 + \varphi^2} \;, \quad G = \frac{Y - \varphi Z}{Z + \varphi Y},$$

$$2E_1 = \frac{Z_1 + \varphi_1 Y_1}{1 + \varphi_1^2} \;, \quad 2F_1 = \frac{Y_1 - \varphi_1 Z_1}{1 + \varphi_1^2}, \quad G_1 = \frac{Y_1 - \varphi_1 Z_1}{Z_1 + \varphi_1 Y_1},$$

ergiebt und Y, Y_1, Z, Z_1 an die Stelle von E, E_1, G, G_1 als Unbekannte treten.

§. 30.

Unter diesen Annahmen hat man zunächst für *gleichförmige Bewegung*

nach (1, 4 und 7) $Y + Y_1 = K\cos\beta - P\sin\alpha$,

nach (2, 5 und 8) $Z + Z_1 = P\cos\alpha - K\sin\beta$,

nach (3 und 8) $eZ_1 = B + 11\cos\beta . K$, wo $B = cP - 2(rQ + r_1Q_1)\sin\alpha$ ist,

nach (4 und 6) $Y - \mu Z = 2Q\sin\alpha$,

nach (7 und 9) $Y_1 - \mu_1 Z_1 = 2Q_1\sin\alpha$,

und findet hieraus

$$V = \frac{eP(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + 2(Q + Q_1)e\sin\alpha - (\mu - \mu_1)B}{e(\cos\beta + \mu\sin\beta) + (\mu - \mu_1)n\cos\beta},$$

wenn V den Werth von K bezeichnet, welchen die gleichförmige Bewegung erfordert; ferner

$$Y = \frac{\mu[eP\cos(\alpha+\beta) - n\cos\beta . P(\sin\alpha + \mu_1\cos\alpha) - B(\cos\beta + \mu_1\sin\beta)] + 2Q\sin\alpha\cos\beta(e - \mu_1 n) - 2Q_1\sin\alpha . \mu(n\cos\beta + e\sin\beta)}{e(\cos\beta + \mu\sin\beta) + (\mu - \mu_1)n\cos\beta}$$

$$Z = \frac{eP\cos(\alpha+\beta) - n\cos\beta . P(\sin\alpha + \mu_1\cos\alpha) - B\cos\beta + \mu_1\sin\beta) - 2(Q + Q_1)\sin\alpha(n\cos\beta + e\sin\beta)}{c\cos\beta + \mu\sin\beta) + (\mu - \mu_1)n\cos\beta},$$

$$Y_1 = \frac{\mu_1[B(\cos\beta + \mu\sin\beta) + n\cos\beta . P(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)] + 2Q\sin\alpha . \mu_1 n\cos\beta + 2Q_1\sin\alpha[e(\cos\beta + \mu\sin\beta) + \mu n\cos\beta]}{e(\cos\beta + \mu\sin\beta) + (\mu - \mu_1)n\cos\beta},$$

$$Z_1 = \frac{B(\cos\beta + \mu\sin\beta) + n\cos\beta . P(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + 2(Q + Q_1)\sin\alpha . n\cos\beta}{e(\cos\beta + \mu\sin\beta) + (\mu - \mu_1)n\cos\beta},$$

wozu noch weiter

nach (4 und 6) $2R = Y - 2Q\sin\alpha = \mu Z$, nach (5) $2N = Z + 2Q\cos\alpha$,

nach (7 und 9) $2R_1 = Y_1 - 2Q_1\sin\alpha = \mu_1 Z_1$, nach (8) $2N_1 = Z_1 + 2Q_1\cos\alpha$

kommen.

§. 31.

Für eine *horizontale* Bahn oder für $\alpha = 0$ ist insbesondere, wenn der Kürze wegen

A statt $[(e - i)\cos\beta - \mu_1(n\cos\beta + i\sin\beta)]P$,

A_1 statt $[i\cos\beta + \mu(n\cos\beta + i\sin\beta)]P$ und

ε statt des Nenners $e(\cos\beta + \mu\sin\beta) + (\mu - \mu_1)n\cos\beta$

gesetzt wird:

$$V = \frac{\mu(e - i) + \mu_1 i}{\varepsilon}P,$$



$$2R = \mu.\frac{A}{\varepsilon}, \qquad 2R_1 = \mu_1.\frac{A_1}{\varepsilon},$$
$$2N = \frac{A}{\varepsilon} + 2Q, \qquad 2N_1 = \frac{A_1}{\varepsilon} + 2Q_1,$$
$$2E = \frac{1+\varphi\mu}{1+\varphi^2}.\frac{A}{\varepsilon}, \qquad 2E_1 = \frac{1+\varphi_1\mu_1}{1+\varphi_1^2}.\frac{A_1}{\varepsilon},$$
$$2F = -\frac{\varphi-\mu}{1+\varphi^2}.\frac{A}{\varepsilon}, \qquad 2F_1 = -\frac{\varphi_1-\mu_1}{1+\varphi_1^2}.\frac{A_1}{\varepsilon},$$

und diese Ausdrücke werden, wie aus (§. 10) erhellet, *genau*, wenn man im Exponenten μ die Wurzelgrösse $\sqrt{\left(1+\varphi^2-\left(\frac{\varphi\varrho}{r}\right)^2\right)}$, und eben so in μ_1 die Grösse $\sqrt{(1+\varphi_1^2)}$ durch $\sqrt{\left(1+\varphi_1^2-\left(\frac{\varphi_1\varrho_1}{r_1}\right)^2\right)}$ ersetzt.

Für *geneigte* Bahnen hätte man dagegen, um die Auflösung vollständig und die gefundenen Ausdrücke *genau* zu machen, wie aus den Erörterungen (§. 13) hervorgeht, aus den beiden Gleichungen

$$1+G^2 = \left(\frac{1-\varphi G}{y}\right)^2 \quad \text{und} \quad 1+G_1^2 = \left(\frac{1-\varphi_1 G_1}{y_1}\right)^2,$$

oder aus den Gleichungen

$$(\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2)y^2 + 2\frac{\varphi\varrho}{r}\mathfrak{B}y = (1+\varphi^2)\mathfrak{C}^2 - \left(\frac{\varphi\varrho}{r}\right)^2,$$
$$(\mathfrak{B}_1^2+\mathfrak{C}_1^2)y_1^2 + 2\frac{\varphi_1\varrho_1}{r_1}\mathfrak{B}_1 y_1 = (1+\varphi_1^2)\mathfrak{C}_1^2 - \left(\frac{\varphi_1\varrho_1}{r_1}\right)^2,$$

in welchen die Zeichen $y, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ auf die Hinterräder, die Zeichen $y_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1$ auf die Vorderräder in der (§. 13) angegebenen Bedeutung sich beziehen, die Wurzeln y und y_1 zu entwickeln und in μ und μ_1 an die Stelle von $\sqrt{(1+\varphi^2)}$ und $\sqrt{(1+\varphi_1^2)}$ zu setzen. Da jedoch die Grössen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ den Exponenten μ_1, die Grössen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{C}_1$ den Exponenten μ enthalten, so wird man zu Vermeidung der durch die höheren Gleichungen, zu welchen diese Operation führt, entstehenden Schwierigkeiten, und da $\sqrt{(1+\varphi^2)}$ und $\sqrt{(1+\varphi_1^2)}$ bereits ziemlich genäherte Werthe von y und y_1 sind, bei der numerischen Berechnung besser thun, den Weg der *allmähligen* Annäherung einzuschlagen; nämlich jede der beiden letzteren Gleichungen nach (§. 13) für sich aufzulösen, die Werthe $\sqrt{(1+\varphi_1^2)}$ und $\sqrt{(1+\varphi^2)}$ in μ_1 und μ bei der ersten Berechnung von y und y_1 beizubehalten, und sie, soweit es angemessen scheint, nach und nach zu verbessern. Für diesen Zweck ist hier:

$$\mathfrak{A} = eP\cos(\alpha+\beta) - n\cos\beta.P(\sin\alpha+\mu_1\cos\alpha) - B(\cos\beta+\mu_1\sin\beta) - 2Q_1\sin\alpha(n\cos\beta+e\sin\beta),$$
$$\mathfrak{B} = \frac{2Q}{\mathfrak{A}}\sin\alpha\cos\beta(e-\mu_1 n),$$

$$\mathfrak{C} = 1 - \frac{2Q}{\mathfrak{A}} \sin\alpha(n\cos\beta + e\sin\beta)\,,$$

$$\mathfrak{A}_1 = B(\cos\beta + \mu\sin\beta) + n\cos\beta\,.\,P(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + 2\,Q\sin\alpha\,.\,n\cos\beta\,,$$

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{2Q_1}{\mathfrak{A}_1}\sin\alpha[e(\cos\beta + \mu\sin\beta) + \mu n\cos\beta]\,,$$

$$\mathfrak{C}_1 = 1 + \frac{2Q_1}{\mathfrak{A}_1}\sin\alpha\,.\cos\beta$$

zu nehmen.

In dem besondern Falle jedoch, wenn $\varphi = \varphi_1$, $\frac{\varrho}{r} = \frac{\varrho_1}{r_1}$ ist und zugleich $F:F_1 = E:E_1$ oder $G = G_1$ angenommen werden kann, wodurch $\frac{Y}{Z} = \frac{Y_1}{Z_1} = \frac{Y + Y_1}{Z + Z_1}$ wird, kann man zur Ergänzung von $\mu = \mu_1$, wozu man die Grössen Y, Y_1, Z, Z_1 nicht einzeln, sondern nur die Summe $Y + Y_1$, $Z + Z_1$ zu wissen nöthig hat (§. 13),

$$\mathfrak{A} = P\cos(\alpha + \beta)\,,$$

$$\mathfrak{B} = 2.\frac{Q + Q_1}{\mathfrak{A}}\sin\alpha\cos\beta\,,$$

$$\mathfrak{C} = 1 - 2.\frac{Q + Q_1}{\mathfrak{A}}\sin\alpha\sin\beta\,,$$

setzen.

§. 32.

In Bezug auf *beschleunigte* rollende *Bewegung* ergiebt sich aus den Gleichungen

(C) (1, 4 u. 7) $\quad Y + Y_1 = K\cos\beta - P(\sin\alpha + X)\,,$

(2, 5 u. 8) $\quad Z + Z_1 = P\cos\alpha - K\sin\beta\,,$

(3 u. 8) $\quad eZ_1 = C - (hP + 2sQ + 2s_1Q_1)X\,,$

wo C statt $cP - 2(rQ + r_1Q_1)\sin\alpha + n\cos\beta K$ gesetzt ist,

(4 u. 6) $\quad Y - \mu Z = 2Q\left(\sin\alpha + \frac{s}{r}X\right),$

(7 u. 9) $\quad Y_1 - \mu Z_1 = 2Q_1\left(\sin\alpha + \frac{s_1}{r_1}X\right),$

und hieraus

$$X = \frac{eK(\cos\beta + \mu\sin\beta) - eP(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) - e\sin\alpha\cdot 2(Q + Q_1) + (\mu - \mu_1)C}{e\left(P + 2\frac{s}{r}Q + 2\frac{s_1}{r_1}Q_1\right) + (\mu - \mu_1)(hP + 2sQ + 2s_1Q_1)}\,,$$

$$Y = \frac{\begin{cases} \mu\left(P+2\frac{s_1}{r_1}Q_1\right)[e(P\cos\alpha - K\sin\beta) - C] + \mu(hP+2sQ+2s_1Q_1)[K(\cos\beta+\mu_1\sin\beta) \\ -P(\sin\alpha+\mu_1\cos\alpha)-2Q_1\sin\alpha]+2Q\sin\alpha\left[e\left(P+2\frac{s_1}{r_1}Q_1\right)-\mu_1(hP+2sQ+2s_1Q_1)\right] \\ +2\frac{s}{r}Q[e(K\cos\beta-(P+2Q_1)\sin\alpha)-\mu C] \end{cases}}{e\left(P+2\frac{s}{r}Q+2\frac{s_1}{r_1}Q_1\right)+(\mu-\mu_1)(hP+2sQ+2s_1Q_1)},$$

$$Z = \frac{\begin{matrix}\left(P+2\frac{s}{r}Q+2\frac{s_1}{r_1}Q_1\right)[e(P\cos\alpha-K\sin\beta)-C]+(hP+2sQ+2s_1Q_1)[K(\cos\beta+\mu_1\sin\beta) \\ -P(\sin\alpha+\mu_1\cos\alpha)-2(Q+Q_1)\sin\alpha]\end{matrix}}{e\left(P+2\frac{s}{r}Q+2\frac{s_1}{r_1}Q_1\right)+(\mu-\mu_1)(hP+2sQ+2s_1Q_1)},$$

$$Y_1 = \frac{\begin{matrix}\mu_1\left(P+2\frac{s}{r}Q\right)C-\mu_1(hP+2sQ+2s_1Q_1)[K(\cos\beta+\mu\sin\beta)-P(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)-2Q\sin\alpha \\ +2Q_1\sin\alpha\left[e\left(P+2\frac{s}{r}Q\right)+\mu(hP+2sQ+2s_1Q_1)\right]+2\frac{s_1}{r_1}Q_1[e(K(\cos\beta+\mu\sin\beta) \\ -P(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)-2Q\sin\alpha)+\mu C]\end{matrix}}{e\left(P+2\frac{s}{r}Q+2\frac{s_1}{r_1}Q_1\right)+(\mu-\mu_1)(hP+2sQ+2s_1Q_1)},$$

$$Z_1 = \frac{\left(P+2\frac{s}{r}Q+2\frac{s_1}{r_1}Q_1\right)C-(hP+2sQ+2s_1Q_1)[K(\cos\beta+\mu\sin\beta)-P(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)-2(Q+Q_1)\sin\alpha]}{e\left(P+2\frac{s}{r}Q+2\frac{s_1}{r_1}Q_1\right)+(\mu-\mu_1)(hP+2sQ+2s_1Q_1)},$$

womit vermöge der Gleichungen (4 ....9) zugleich auch die gesuchten

$$\begin{aligned} 2R &= Y-2Q(\sin\alpha+X) = \mu Z+2Q\left(\frac{s}{r}-1\right)X, \\ 2N &= Z+2Q\cos\alpha, \\ 2R_1 &= Y_1-2Q_1(\sin\alpha+X) = \mu_1 Z_1+2Q_1\left(\frac{s_1}{r_1}-1\right)X, \\ 2N_1 &= Z_1+2Q_1\cos\alpha \end{aligned}$$

entwickelt sind.

Die Ergänzung der Exponenten μ und μ_1 kann ebenfalls durch das im vorigen Paragraphen für die gleichförmige Bewegung angegebene Verfahren geschehen, und zwar ist

$$\mathfrak{A} = \left(P+2\frac{s_1}{r_1}Q_1\right)[e(P\cos\alpha-K\sin\beta)-C]+(hP+2sQ+2s_1Q_1)[K(\cos\beta+\mu_1\sin\beta) \\ -P(\sin\alpha+\mu_1\cos\alpha)-2Q_1\sin\alpha],$$

$$\mathfrak{B} = \frac{2Q}{\mathfrak{A}}\left[\sin\alpha\left(e\left(P+2\frac{s_1}{r_1}Q_1\right)-\mu_1(hP+2sQ+2s_1Q_1)\right)+\frac{s}{r}[e(K\cos\beta-(P+2Q_1)\sin\alpha)-\mu_1 C]\right],$$

$$\mathfrak{C} = 1-\frac{2Q}{\mathfrak{A}}\left[\sin\alpha(hP+2sQ+2s_1Q_1)-\frac{s}{r}[e(P\cos\alpha-K\sin\beta)-C]\right],$$

$$\mathfrak{A}_1 = \left(P+2\frac{s}{r}Q\right)C-(hP+2sQ+2s_1Q_1)[K(\cos\beta+\mu\sin\beta)-P(\sin\alpha+\mu\cos\alpha) \\ -2Q\sin\alpha],$$

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{2Q_1}{\mathfrak{A}_1}\Big[\sin\alpha\Big(e\Big(P+2\frac{s}{r}Q\Big)+\mu(hP+2sQ+2s_1Q_1)\Big)+\frac{s_1}{r_1}[e(K(\cos\beta+\mu\sin\beta)$$
$$-P(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)-2Q\sin\alpha)+\mu C]\Big],$$

$$\mathfrak{C}_1 = 1+\frac{2Q_1}{\mathfrak{A}_1}\Big[\sin\alpha(hP+2sQ+2s_1Q_1)+\frac{s_1}{r_1}C\Big]$$

zu setzen.

In dem besondern Falle jedoch, wenn $\varphi = \varphi_1$, $\frac{\varrho}{r} = \frac{\varrho_1}{r_1}$ und $F{:}F_1 = E{:}E_1$ oder $G = G_1$ ist, wodurch $\frac{Y}{Z} = \frac{Y_1}{Z_1} = \frac{Y+Y_1}{Z+Z_1}$ wird, kann zur Ergänzung von $\mu = \mu_1$,

$$\mathfrak{A} = P(P\cos\alpha - K\sin\beta),$$

$$\mathfrak{B} = 2.\frac{Q+Q_1}{\mathfrak{A}}P\sin\alpha + 2.\frac{\frac{s}{r}Q+\frac{s_1}{r_1}Q_1}{\mathfrak{A}}(K\cos\beta - P\sin\alpha),$$

$$\mathfrak{C} = 1+2.\frac{\frac{s}{r}Q+\frac{s_1}{r_1}Q_1}{P}$$

gesetzt werden.

§. 33.

Die aus den Gleichungen (C) für *beschleunigte* Bewegung abgeleiteten Ausdrücke der gesuchten Grössen müssen, wenn man in ihnen $K = V$ setzt, wodurch X zu 0 wird, in die entsprechenden Ausdrücke für gleichförmige Bewegung (§. 30) übergehen. Und für $K = V + o$ kann, wie beim zweirädrigen Fuhrwerk (§. 15), jenen Ausdrücken eine Form gegeben werden, durch welche unmittelbar ersichtlich wird, wie gross der dem Theile o von K zukommende Theil irgend einer der gesuchten Grössen ist. So findet sich

$$\frac{R}{N} = \Big[\frac{R}{N}\Big] + 2Qo.\frac{(\frac{s}{r}-1)([\mathfrak{Z}]+2Q\cdot\varepsilon\cos\alpha)+\mu\cos\alpha\frac{d\mathfrak{Z}}{dK}}{\Big[e\Big(P+2\frac{s}{r}Q+2\frac{s_1}{r_1}Q_1\Big)+(\mu-\mu_1)(hP+2sQ+2s_1Q_1)\Big][2N]^2},$$

$$\frac{R_1}{N_1} = \Big[\frac{R_1}{N_1}\Big] + 2Q_1o.\frac{(\frac{s_1}{r_1}-1)([\mathfrak{Z}_1]+2Q_1\cdot\varepsilon\cos\alpha)+\mu_1\cos\alpha\frac{d\mathfrak{Z}_1}{dK}}{\Big[e\Big(P+2\frac{s}{r}Q+2\frac{s_1}{r_1}Q_1\Big)+(\mu-\mu_1)(hP+2sQ+2s_1Q_1)\Big][2N_1]^2},$$

wo die Zeichen $[\mathfrak{Z}]$ und $[\mathfrak{Z}_1]$ die Zähler, ε den Nenner der Grössen Z und Z_1 (§. 30), $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}_1$ die Zähler der Grössen Z und Z_1 (§. 32) bedeuten.

Auch ist, wie beim zweirädrigen Fuhrwerk, zu bemerken, dass diejenige Beschaffenheit der Bewegung, bei welcher die Beschleunigung, sowohl der fortschreitenden Bewegung des Fuhrwerks, als der umdrehenden der Räder, gleich Null ist, oder diese beiderlei Bewegungen zugleich gleichförmig sind, eigenthümlich der rollenden Bewegung angehört.

Die Gleichungen (C) setzen voraus, dass die Rad-Achsen mit dem *Körper* des Fuhrwerks fest verbunden seien. Sind sie dagegen an den *Rädern* fest, so hat dieser Umstand, wie in (§. 16) gezeigt, nur die Folge, dass die Vorzeichen der Reibungscoefficienten φ, φ_1, soweit sie für sich (nicht in den Exponenten μ, μ_1) vorkommen, sich ändern, und dass demnach von den aus den Gleichungen (C) abgeleiteten Ausdrücken (§. 30—32) nur die von E, E_1, F, F_1, nicht aber die übrigen, dadurch eine Aenderung erfahren. Wegen der Bedeutung von P, Q, Q_1, s und s_1 ist hier Aehnliches wie zu (§. 16) zu bemerken.

Für das *Gleichgewicht der Ruhe* hat man nach (§. 30), indem man $\varphi, \varphi_1, \mu, \mu_1$ gleich Null setzt, wodurch R und R_1 verschwinden, unter Anwendung der Bezeichnungsart (§. 17):

$$V^0 = \frac{P+2Q+2Q_1}{\cos\beta}\sin\alpha\,,$$

$$2E^0 = \frac{eP\cos(\alpha+\beta)-[cP-2(rQ+r_1Q_1)\sin\alpha]\cos\beta-n\cos\beta\sin\alpha\cdot P-2(Q+Q_1)\sin\alpha(e\sin\beta+n\cos\beta)}{e\cos\beta},$$

$$2F^0 = 2Q\sin\alpha,\quad 2N^0 = 2E^0+2Q\cos\alpha\,,$$

$$2E_1^0 = \frac{cP-2(rQ+r_1Q_1)\sin\alpha+n\sin\alpha\,(P+2Q+2Q_1)}{e}$$

$$2F_1^0 = 2Q_1\sin\alpha,\quad 2N_1^0 = 2E_1^0+2Q_1\cos\alpha\,.$$

§. 34.

Nach Auflösung der Gleichungen (C) bleibt zur Bestimmung der Bewegung des Fuhrwerks, wenn sie beschleunigt ist, noch die nach den bekannten Regeln auszuführende Integration der Gleichung $\frac{d^2x}{dt^2} = gX$ übrig, in welcher für X der gefundene Ausdruck (§. 32) und in diesem für K der gegebene Werth der Zugkraft, wenn sie beständig ist, oder die bekannte Function der Geschwindigkeit, wenn sie von dieser abhangt, zu setzen ist.

Sollen die aus den Gleichungen (C) entwickelten Ausdrücke auf die *Bewegung rückwärts* (§. 18) angewendet werden, so sind in denselben die Abstände e, i und c, so wie die Winkel α und β, mit veränderten Vorzeichen zu nehmen. Dadurch wird z. B.

$$X = \frac{e(\cos\beta-\mu\sin\beta)K+e(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)P+(\mu-\mu_1)[cP-2(rQ+r_1Q_1)\sin\alpha-n\cos\beta\cdot K]+e\sin\alpha\cdot 2(Q+Q_1)}{e\left(P+2\frac{s}{r}Q+2\frac{s_1}{r_1}Q_1\right)-(\mu-\mu_1)(hP+2sQ+2s_1Q_1)},$$

$$V = \frac{e(\mu\cos\alpha-\sin\alpha)P-(\mu-\mu_1)[cP-2(rQ+r_1Q_1)\sin\alpha]-e\sin\alpha\cdot 2(Q+Q_1)}{e(\cos\beta-\mu\sin\beta)-(\mu-\mu_1)n\cos\beta}.$$

Die Kräfte K und V haben nun (bei positiven Werthen), wie die Bewegung selbst, die Richtung von der vorderen Achse gegen die hintere Achse, und

in den so veränderten Ausdrücken ist der spitze Winkel α bei absteigender Bewegung positiv, der spitze Winkel β aber, unabhängig von der Seite, nach welcher die Zugkraft wirkt, positiv, wenn sich die Richtungslinie dieser Kraft, von ihrem Durchschnitt mit der Richtungslinie der Bewegung an, auf der rückwärts gekehrten Seite, (nach der die Bewegung Statt hat), unter die letztere Linie senkt.

Was in (§. 19) beim zweirädrigen Fuhrwerk über den Einfluss der absoluten Grösse der Reibung zwischen den Rädern und dem Boden auf die rollende Bewegung, und über den Einfluss des Trägheitsmoments und des Gewichts der Räder auf die gleichförmige rollende Bewegung gesagt ist, gilt auch vom vierrädrigen Fuhrwerk.

Der Ausdruck $V = \frac{\mu(e-i) - \mu_1 i}{e} P$ (§. 31) zeigt, dass auf horizontaler Bahn die zur gleichförmigen rollenden Bewegung erforderliche Zugkraft, wenn die Exponenten μ und μ_1 einander gleich sind, von der Lage des Schwerpuncts unabhängig und gleich $\frac{\mu P}{\cos\beta + \mu \sin\beta}$ ist, und dass dagegen, wenn μ und μ_1 verschiedene Werthe haben, dieses Kraft-Erforderniss um so grösser wird, je weiter der Schwerpunct von der Achse, in Bezug auf welche der Rad-Effects-Exponent den kleineren Werth hat, gegen die andere Achse sich entfernt.

In Bezug auf den Winkel β, welcher die Kraft V zu einem Kleinsten macht, findet sich:

$$\text{tang}\,\beta = \frac{\mu e}{e + (\mu - \mu_1) n}, \text{ daher, wenn } \mu = \mu_1 \text{ ist, } \text{tg}\beta = \mu .$$

Bezieht sich n_1, mit derselben Bedeutung, auf die vorderen Räder, wie n auf die hintern Räder, oder ist $n = n_1 - e\,\text{tg}\beta$, so hat man:

ε oder $e(\cos\beta + \mu\sin\beta) + (\mu - \mu_1) n \cos\beta = e(\cos\beta + \mu_1 \sin\beta) + (\mu - \mu_1) n_1 \cos\beta$, und findet für den kleinsten Werth von V:

$$\text{tg}\beta = \frac{\mu_1 e}{e + (\mu - \mu_1) n_1} .$$

Für den Winkel α, unter welchem ein vierrädriges Fuhrwerk erster Art in der Bewegung abwärts seine Geschwindigkeit von selbst, ohne Zuthun einer äusseren Kraft, gleichförmig beibehält, ergiebt sich aus der Gleichung $V = 0$:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{[\mu e - (\mu - \mu_1) i] P}{e(P + 2Q + 2Q_1) + (\mu - \mu_1)(hP + 2rQ + 2r_1 Q_1)} .$$

(Die Fortsetzung folgt im nächsten Heft.)

5.

Ueber die Verwandlung der Kettenbrüche in Reihen.

(Von dem Herrn Dr. *Heilermann* zu Trier.)

Im 10. und 18. Bande dieses Journals hat Herr Prof. *Stern* die Formeln entwickelt, mittels welcher aus dem Kettenbruch

$$F(a_0, a_n) = 1:[a_0 + x:(a_1 + x:(a_2 + \ldots\ldots + x:a_n]$$

die Reihe
$$\Sigma A_\alpha x^\alpha = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \text{u. s. w.}$$

hergeleitet wird. Ich habe dieselbe Aufgabe behandelt, und bin dabei von den Gleichungen ausgegangen, welche mir (Band 33) zur Ausführung der umgekehrten Umformung dienten und dieselbe sehr leicht machen.

Die Einrichtung des Kettenbruchs giebt bekanntlich, in den Zeichen welche Herr *Stern* einführte:

$$F(a_0, a_n) = \Sigma(a_1, a_n)_{2\alpha}.x^\alpha : \Sigma(a_0, a_n)_{2\alpha}.x^\alpha,$$

und es ist nun

$$\sum_0^\infty A_\alpha.x^\alpha = \Sigma(a_1, a_n)_{2\alpha}.x^\alpha : \Sigma(a_0, a_n)_{2\alpha}.x^\alpha, \text{ oder}$$
$$\Sigma A_\alpha.x^\alpha \Sigma(a_0, a_n)_{2\alpha}.x^\alpha = \Sigma(a_1, a_n)_{2\alpha} x^\alpha$$

zu setzen.

Hier müssen im Producte links und in der einfachen Reihe rechts, die Coefficienten von denselben Potenzen von x einander gleich sein; also muss sein:

$$\text{(1.)} \quad (a_1, a_n)_{2s} = \Sigma A_\alpha (a_0, a_n)_{2\beta} \qquad \text{cond.}\ \alpha + \beta = s.$$

Setzt man hier der Reihe nach $s = 0, 1, 2, 3$, u. s. w., so erhält man folgende Gleichungen, welche zur recurrirenden Berechnung der Coefficienten A dienen können:

$$\text{(2.)} \begin{cases} (a_1, a_n)_0 = A_0(a_0, a_n)_0, \\ (a_1, a_n)_2 = A_0(a_0, a_n)_2 + A_1(a_0, a_n)_0, \\ (a_1, a_n)_4 = A_0(a_0, a_n)_4 + A_1(a_0, a_n)_2 + A_2(a_0, a_n)_0, \\ (a_1, a_n)_6 = A_0(a_0, a_n)_6 + A_1(a_0, a_n)_4 + A_2(a_0, a_n)_2 + A_3(a_0, a_n)_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_1, a_n)_{2s} = A_0(a_0, a_n)_{2s} + A_1(a_0, a_n)_{2s-2} + \ldots\ldots + A(a_0, a_n)_2 + A_s(a_0, a_n)_0. \end{cases}$$

Aus jeder von diesen Gleichungen kann man einen Coefficienten A berechnen, wenn die vorangehenden bekannt sind. Erwägt man, dass die Umformung für alle Werthe der Theilnenner a gelten soll, so darf auch bei der Berechnung von A_s der Theilnenner $a_{s+1} = \infty$ gesetzt, also der Kettenbruch $F(a_0, a_n)$ bei dem Nenner a_s abgebrochen werden. Dadurch ergeben sich statt der Gleichungen (2) die folgenden:

$$
(3.)\quad \begin{cases}
1 = A_0(a_0,a_0)_0 \\
0 = A_0 + A_1(a_0,a_1)_0 \\
0 = A_1(a_0,a_2)_2 + A_2(a_0,a_2)_0 \\
0 = A_1 + A_2(a_0,a_3)_2 + A_3(a_0,a_3)_0 \\
0 = A_2(a_0,a_4)_4 + A_3(a_0,a_4)_2 + A_4(a_0,a_4)_0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
0 = A_{m-1} + A_m(a_0,a_{2m-1})_{2m-2} + A_{m+1}(a_0,a_{2m-1})_{2m-4} + \dots + A_{2m-1}(a_0,a_{2m-1})_0 \\
0 = A_m(a_0,a_{2m})_{2m} + A_{m+1}(a_0,a_{2m})_{2m-2} + \dots + A_{2m-1}(a_0,a_{2m})_2 + A_{2m}(a_0,a_{2m})_0,
\end{cases}
$$

welche alle leicht aus der Gleichung (1) folgen und weder zu ihrer Herleitung noch zu ihrer Begründung das bekannte *Kästner*'sche Verfahren erfordern.

Da die Gleichungen (2) sowohl, als die (3), zur unzweideutigen Bestimmung der Coefficienten A hinreichen, so muss das eine System von Gleichungen eine Folge des andern sein. Diese Folgerung will ich auch durch Rechnung begründen.

Die erste der Gleichungen (3), nämlich $1 = A_0 a_0$, geht in die (2) über, wenn man sie mit $(a_1, a_n)_0$ multiplicirt. Wird aber die erste mit $(a_1, a_n)_2$ und die zweite mit $(a_2, a_n)_0$ multiplicirt und werden die beiden Producte summirt, so findet sich:

$$(a_1, a_n)_2 = A_0[(a_0, a_0)_0(a_1, a_n)_2 + (a_2, a_n)_0] + A_1(a_0, a_1)_0(a_2, a_n)_0,$$

welches, wegen $\quad (a_0, a_0)_0(a_1, a_n)_2 + (a_2, a_n)_0 = (a_0, a_n)_2$, in

$$(a_1, a_n)_2 = A_0(a_0, a_n)_2 + A_1(a_0, a_n)_0$$

übergeht. Giebt man weiter den drei ersten Gleichungen (3) der Reihe nach die Factoren $\quad (a_1, a_n)_4 \;;\; (a_1, a_n)_2 \;;\; (a_1, a_n)_0 \quad$ und summirt, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
(a_1, a_n)_4 &= A_0[a_0(a_1,a_n)_4 + (a_2,a_n)_2] + A_1[(a_0,a_1)_0(a_2,a_n)_2 + (a_0,a_2)_2(a_3,a_n)_0] + A_2(a_0,a_2)_0(a_3,a_n)_0 \\
&= A_0(a_0, a_n)_4 + A_1(a_0, a_n)_2 + A_2(a_0, a_n)_0,
\end{aligned}
$$

wenn man die Relationen

$$a_0(a_1, a_n)_4 + (a_2, a_n)_2 = (a_0, a_n)_4;$$

$$
\begin{aligned}
(a_0, a_1)_0(a_2, a_n)_2 + (a_0, a_2)_2(a_3, a_n)_0 &= a_0, a_1(a_2, a_n)_2 + a_0(a_3, a_n)_0 + a_2(a_3, a_n)_0 \\
&= a_0(a_1, a_n)_2 + (a_2, a_n)_0 = (a_0, a_n)_2
\end{aligned}
$$

$$(a_0, a_2)_0(a_3, a_n)_0 = (a_0, a_n)_0$$

benutzt. In derselben Weise fortfahrend, multiplicire man die vier ersten Gleichungen mit $(a_1, a_n)_6$; $(a_1, a_n)_4$; $(a_1, a_n)_2$; $(a_1, a_n)_0$, so erhält man:

$$\begin{aligned}(a_1, a_n)_6 = A_0[a_0(a_1, a_n)_6 + (a_2, a_n)_4] + A_1[(a_0, a_1)_0(a_2, a_n)_4 + (a_0, a_2)_2(a_3, a_n)_2 + (a_4, a_n)_0] \\ + A_2[(a_0, a_2)_0(a_3, a_n)_2 + (a_0, a_3)_2(a_4, a_n)_0] \\ + A_3(a_0, a_n)_0(a_4, a_n)_0,\end{aligned}$$

und daraus

$$(a_1, a_n)_6 = A_0(a_0, a_n)_6 + A_1(a_0, a_n)_4 + A_2(a_0, a_n)_2 + A_3(a_0, a_n)_0,$$

und zwar durch Anwendung der Gleichungen

$$a_0(a_1, a_n)_6 + (a_2, a_n)_4 = (a_0, a_n)_6$$

$$\begin{aligned}(a_0, a_1)_0(a_2, a_n)_4 + (a_0, a_2)_2(a_3, a_n)_2 + (a_4, a_n)_0 &= a_0 a_1(a_2, a_n)_4 + a_0(a_3\, a_n)_2 + a_2(a_3, a_n)_2 + (a_4, a_n)_0 \\ &= a_0(a_1, a_n)_4 + (a_2, a_n)_2 = (a_0, a_n)_4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a_0, a_2)_0(a_3, a_n)_2 + (a_0, a_3)_2(a_4, a_n)_0 &= (a_0, a_2)_0(a_3, a_n)_2 + (a_0, a_2)_2 a_3(a_4, a_n)_0 + (a_0, a_1)_0(a_4, a_n)_0 \\ &= (a_0, a_1)_0(a_2, a_n)_2 + (a_0, a_2)_2(a_3, a_n)_0;\end{aligned}$$

und dies Letzte ist wieder der obige Coefficient von A_1 in $(a_1, a_n)_4$ und deshalb $= (a_0, a_n)_2$.

So sind der Reihe nach die vier Gleichungen (2) aus denen (3) zusammengesetzt. Es ist auch schon durch Induction das Verfahren zu erkennen, welches die Allgemeinheit dieses Zusammenhanges darthut. Man multiplicire die $2m$ ersten Gleichungen (3) der Reihe nach mit

$$(a_1, a_n)_{4m-2} \quad ; \quad (a_1, a_n)_{4m-4} \ldots\ldots (a_{2m-1}, a_n)_2 \quad ; \quad (a_{2m}, a_n)_0$$

und addire die Resultate. Dies giebt

$$\begin{aligned}(a_1, a_n)_{4m-2} = A_0[(a_0, a_0)_0(a_1, a_n)_{4m-2} + (a_0, a_1)_2(a_2, a_n)_{4m-4}] \\ + A_1[(a_0, a_1)_0(a_2, a_n)_{4m-4} + (a_0, a_2)_2(a_3, a_n)_{4m-6} + (a_0, a_3)_4(a_4, a_n)_{4m-8}] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + A_{m-1}[(a_0, a_{m-1})_0(a_m, a_n)_{2m} + (a_0, a_m)_2(a_{m+1}, a_n)_{2m-2} + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots + (a_0, a_{2m-2})_{2m-2}(a_{2m-1}, a_n)_2 + (a_0, a_{2m-1})_{2m}(a_{2m}, a_n)_0] \\ + A_m[(a_0, a_m)_0(a_{m+1}, a_n)_{2m} + (a_0, a_{m+1})_2(a_{m+2}, a_n)_{2m-4} + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots + (a_0, a_{2m-1})_{2m-2}(a_{2m}, a_n)_0] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + A_{2m-2}[(a_0, a_{2m-2})_0(a_{2m-1}, a_n)_2 + (a_0, a_{2m-1})_2(a_{2m}, a_n)_0] \\ + A_{2m-1}[(a_0, a_{2m-1})_0(a_{2m}, a_n)_0] \\ = A_0 \Sigma(a_0, a_{0+\alpha})_{2\alpha}(a_{r+\alpha}, a_n)_{4m-2\alpha-2} + A_1 \Sigma(a_0, a_{1+\alpha})_{2\alpha}(a_{2+\alpha}, a_n)_{4m-2\alpha-4} + \ldots\ldots \\ + A_r \Sigma(a_0, a_{r+\alpha})_{2\alpha}(a_{r+\alpha+1}, a_n)_{4m-2r-2\alpha-2} + \ldots\ldots + A_{2m-1} \Sigma(a_0, a_{2m+\alpha-2})_{2\alpha}(a_{2m+\alpha-1}, a_n)_{2-2\alpha}\end{aligned}$$

$$(4.) \quad = \Sigma A_\beta \Sigma(a_0, a_{\beta+\alpha})_{2\alpha}(a_{\beta+\alpha+1}, a_n)_{4m-2\beta-2\alpha-2},$$

wo sich das erste Summationszeichen auf die Werthe von 0 bis $2m-1$ für β, und das andere auf die Zahlen von 0 bis $2m-\beta-1$ für α bezieht.

Um in ähnlicher Weise $(a_1, a_n)_{4m}$ aus (2) zu berechnen, gebe man den ersten $2m+1$ Gleichungen die Factoren

$$(a_r, a_n)_{4m} \quad ; \quad (a_2, a_n)_{4m-2} \; ; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a_{2m}, a_n)_2 \quad ; \quad (a_{2m+1}, a_n)_0,$$

und summire. Dies giebt

$$\begin{aligned}
(a_1, a_n)_{4m} = & A_0[(a_0, a_0)_0(a_1, a_n)_{4m} + (a_4, a_n)_{4m-2}] \\
& + A_1[(a_0, a_1)_0(a_2, a_n)_{4m-2} + (a_0, a_2)_2(a_3, a_n)_{4m-4} + (a_3, a_n)_{4m-6}] \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + A_{m-1}[(a_0, a_{m-1})_0(a_m, a_n)_{2m+2} + (a_0, a_m)_2(a_{m+1}, a_n)_{2m} + \ldots\ldots\ldots + (a_{2m}, a_n)_2] \\
& + A_m[(a_0, a_m)_0(a_{m+1}, a_n)_{2m} + (a_0, a_{m+1})_2(a_{m+2}, a_n)_{2m-2} + \ldots\ldots + (a_0, a_{2m})_{2m}(a_{2m+1}, a_n)_0] \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + A_{2m-1}[(a_0, a_{2m-1})_0(a_{2m}, a_n)_2 + (a_0, a_{2m})_2(a_{2m+1}, a_n)_0] \\
& + A_{2m}[(a_0, a_{2m})_0(a_{2m+1}, a_n)_0] \\
= & A_0 \Sigma(a_0, a_{0+\alpha})_{2\alpha}(a_{1+\alpha}, a_n)_{4m+2\alpha} + A_1 \Sigma(a_0, a_{1+\alpha})_{2\alpha}(a_{2+\alpha}, a_n)_{4m-2\alpha-2} + \ldots\ldots \\
& + A_r \Sigma(a_0, a_{r+\alpha})_{2\alpha}(a_{r+\alpha+1}, a_n)_{4m-2r-2\alpha} + \ldots\ldots + A_{2m} \Sigma(a_0, a_{2m+\alpha})_{2\alpha}(a_{2m+\alpha+1}, a_n)_{0-2\alpha}
\end{aligned}$$

$$(5.) \quad = \Sigma A_\beta \Sigma(a_0, a_{\beta+\alpha})_{2\alpha}(a_{\beta+\alpha+1}, a_n)_{4m-2\beta-2\alpha}.$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}
(a_0, a_{r+s})_{2s}(a_{r+s+1}, a_n)_{4m-2r-2s} = & (a_0, a_{r+s-1})_{2s} \cdot a_{r+s} \cdot (a_{r+s+1}, a_n)_{4m-2r-2s} \\
& + (a_0, a_{r+s+2})_{2s-2}(a_{r+s+1}, a_n)_{4m-2r-2s},
\end{aligned}$$

oder, weil im zweiten Gliede rechts $s > 0$ sein muss, also $s+1$ statt s gesetzt werden darf, so ist

$$\begin{aligned}
(a_0, a_{r+s})_{2s}(a_{r+s+1}, a_n)_{2m-2r-2s} = & (a_0, a_{r+s-1})_{2s} a_{r+s}(a_{r+s+1}, a_n)_{2m-2r-2s} \\
& + (a_0, a_{r+s-1})_{2s}(a_{r+s+2}, a_n)_{2m-2r-2s-2} \\
= & (a_0, a_{r+s-1})_{2s}[a_{r+s}(a_{r+s+1}, a_n)_{2m-2r-2s} + (a_{r+s+2}, a_n)_{2m-2r-2s-2}] \\
= & (a_0, a_{r+s-1})_2 (a_{r+s}, a_n)_{2m-2r-2s}.
\end{aligned}$$

Giebt man hier der Zahl s der Reihe nach alle Werthe, welche sie annehmen kann, von $s = 0$ bis $s = m - r$, und summirt alle diese Relationen, so erhält man

$$\Sigma(a_0, a_{r+\alpha})_{2\alpha}(a_{r+\alpha+1}, a_n)_{2m-2r-2\alpha} = \Sigma(a_0, a_{r+\alpha-1})_{2\alpha}(a_{r+\alpha}, a_n)_{2m-2r-2\alpha}$$

Hier setse man weiter noch $r-1$, $r-2$ u. s. w. bis 1, statt r, und beziehlich -1, $m-2$ u. s. w. bis $m-r+1$, statt m. Dies giebt der Reihe nach:

$$\begin{aligned}
\Sigma(a_0, a_{r+\alpha-1})_{2\alpha} a_{r+\alpha}, a_n)_{2m-2r-2\alpha} &= \Sigma(a_0, a_{r+\alpha-2})_{2\alpha}(a_{r+\alpha-1}, a_n)_{2m-2r-2\alpha}, \\
\Sigma(a_0, a_{r+\alpha-2})_{2\alpha}(a_{r+\alpha-1}, a_n)_{2m-2r-2\alpha} &= \Sigma(a_0, a_{r+\alpha-3})_{2\alpha}(a_{r+\alpha-2}, a_n)_{2m-2r-2\alpha},
\end{aligned}$$

u. s. w., und zuletzt:

$$\begin{aligned}
\Sigma(a_0, a_{1+\alpha})_{2\alpha}(a_{2-\alpha}, a_n)_{2m-2r-2\alpha} &= \Sigma(a_0, a_{0+2})_{2\alpha}(a_{1+\alpha}, a_n)_{2m-2r-2\alpha}, \\
&= \Sigma(a_0, a_0)_0(a_1, a_n)_{2m-2r} + (a_0, a_1)_2(a_2, a_n)_{2m-2r-2}, \\
&= (a_0, a_n)_{2m-2r}.
\end{aligned}$$

Werden diese Gleichungen, so wie sie unter einander stehen, addirt, so erhält man

$$(6.)\qquad \Sigma(a_0, a_{r+\alpha})_{2\alpha}(a_{r+\alpha+1}, a_n)_{2m-2r-2\alpha} = (a_0, a_n)_{2m-2r}$$

Durch die Anwendung dieser Relation gehen die Ausdrücke (4 und 5) in

$$(a_1, a_n)_{4m-2} = \Sigma A_\beta(a_0, a_n)_{4m-2\beta-2},$$
$$(a_1, a_n)_{4m} \;\; = \Sigma A_\beta(a_0, a_n)_{4m-\beta}$$

über, und beide lassen sich nun in folgende Gleichung vereinigen:

$$(a_1, a_n)_{2m} = A_0(a_0, a_n)_{2m} + A_1(a_0, a_n)_{2m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1}(a_0, a_n)_2 + A_m(a_0, a_n)_0;$$

welche dieselbe ist, wie die allgemeine Gleichung (2).

So fand sich denn durch Summation der $m+1$ ersten Gleichungen (3) die $(m+1)^{\text{te}}$ Gleichung (2), d. h. es wurden sämmtliche Gleichungen des letzten Systems von denen des ersten abgeleitet. Hätte man nur m Gleichungen (3) summirt, wie oben ausgeführt ward, und ihre Summe von der $(m+1)^{\text{ten}}$ Gleichung (2) abgezogen, so wäre daraus die $(m+1)^{\text{te}}$ Gleichung (3) hervorgegangen, oder es wären überhaupt sämmtliche Gleichungen (3) aus denen (2) abgeleitet worden. Es ist also auch durch Rechnung dargethan, dass für die Werthbestimmung des Coefficienten A_m nur der Kettenbruch bis zum Theilnenner a_m in Betracht kommt.

Für die Entwicklung einer Reihe aus einem unendlichen Kettenbruch genügen die Gleichungen (3). Wenn er aber mit dem Nenner a_n abbricht, so müssen für die Berechnung der Coefficienten A_{n+1}, A_{n+2} u. s. w. andere angewendet werden. Sie ergeben sich sofort aus der Formel (1), wenn man darin $s = n + r$ setzt. Dies giebt

$$\Sigma A_\alpha(a_0, a_n)_{2\beta} = 0 \qquad \text{cond. } \alpha + \beta = n + r.$$

Je nachdem nun $n = 2m - 1$ oder $n = 2m$ ist, giebt diese Gleichung:

$$(7.)\left\{\begin{array}{l} A_{m+r-1} + A_{m+r}(a_0, a_{2m-1})_{2m-2} + \ldots\ldots + A_{2m+r-2}(a_0, a_{2m-1})_2 + (A_{2m+r-1})(a_0, a_{2m-1})_0 = 0 \\ \text{oder} \\ A_{m+r}(a_0, a_{2m})_{2m} + A_{m+r+1}(a_0, a_{2m})_{2m-2} + \ldots\ldots + A_{2m+r-1}(a_0, a_{2m})_2 + A_{2m+r}(a_0, a_{2m})_0 = 0. \end{array}\right.$$

Im einen wie im andern Falle lassen sich durch ein leichtes Recursionsverfahren alle Coefficienten A finden, und auch die independente Berechnung der Coefficienten kann in ähnlicher Weise ausgeführt werden, wie es bei der Division zweier Reihen zu geschehen pflegt.

Offenbar ist auch die Form des Rests dieser Verwandlung, wenn sie nach den Gleichungen (2 und 7) (bei endlichen Kettenbrüchen) ausgeführt wird, nicht wesentlich von derjenigen verschieden, in welcher sich der Rest bei der Entwicklung des Quotienten zweier Reihen zeigt. Gesetzt es sei aus dem Kettenbruch $F(a_0, a_n)$ die Reihe $\overset{n+p}{\underset{0}{\Sigma}} A_\alpha x^\alpha$ entwickelt worden, so ist

$$\Sigma(a_1, a_n)_{2\alpha} \,.\, x^\alpha = \sum_0^{n+p} A_\beta \,.\, x^\beta \,.\, \Sigma(a_0, a_n)_{2\gamma} \,.\, x^\gamma \quad \text{cond.}\, \beta+\gamma < n+p+1.$$

Es ist aber:

$$\sum_0^{n+p} A_\beta \,.\, x^\beta \,.\, \Sigma(a_0, a_n)_{2\gamma} \,.\, x^\gamma = \left\{ \begin{matrix} \Sigma A_\beta x^\beta \,.\, \Sigma(a_0, a_n)_{2\gamma} \,.\, x^\gamma \\ \text{cond.}\, \beta+\gamma < n+p+1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \Sigma A_\beta x^\beta \,.\, \Sigma(a_0, a_n)_{2\gamma} \,.\, x^\gamma \\ \text{cond.}\, \beta+\gamma > n+p \end{matrix} \right\},$$

also auch

$$\sum_0^{n+p} A_\beta \,.\, x^\beta \,.\, \Sigma(a_0, a_n)_{2\gamma} \,.\, x^\gamma = \Sigma(a_1, a_n)_{2\alpha} \,.\, x^\alpha + \Sigma A_\beta \,.\, x^\beta \,.\, \Sigma(a_0, a_n)_{2\gamma} \,.\, x^\gamma \;\text{cond.}\, \beta+\gamma > n+p$$

und weiter:

$$\sum_0^{n+p} A_\beta \,.\, x^\beta = \frac{\Sigma(a_1, a_n)_{2\alpha} \,.\, x^\alpha}{\Sigma(a_0, a_n)_{2\alpha} \,.\, x^\alpha} + \frac{\Sigma A_\beta (a_0, a_n)_{2\gamma} \,.\, x^{\beta+\gamma}}{\Sigma(a_0, a_n)_{2\alpha} \,.\, x^\alpha} \quad \text{cond.}\, \beta+\gamma > n+p$$

oder

$$(8.) \quad F(a_0, a_n) = \sum_0^{n+p} A_\beta \,.\, x^\beta - \frac{\Sigma A_\beta (a_0, a_n)_{2\gamma} \,.\, x^{\beta+\gamma}}{\Sigma(_0, a_n)_{2\alpha} \,.\, x^\alpha} \quad \text{cond.}\, \beta+\gamma > n+p;$$

und diese Gleichung ist hinreichend, um die allgemeine Form des Rests bei dieser Entwicklung vollständig zu bezeichnen.

§. 2.

Ich habe früher ausser den Kettenbrüchen von der Form $F(a_0, a_n)$ auch noch solche in Betracht gezogen, bei welchen die Theilnenner lineare Functionen einer Hauptgrösse sind, und habe namentlich dieselben aus $F(a_0, a_n)$, also mittelbar aus dem Quotienten zweier Reihen hergeleitet. Nach dem Obigen liegt der Wunsch nahe, die umgekehrte Aufgabe für die zweite Form der Kettenbrüche gelöset zu sehen. Diese Form ist allgemein folgende:

$$(9.) \quad 1 : (b_0 x + c_0) - 1 : (b_1 x + c_1) - 1 : (b_2 x + c_2) - \text{u. s. w.} \,\ldots\ldots - : (b_n x + c_n).$$

Damit auch der Kettenbruch (4. im Bande 43) diese Gestalt annehme, ist eine Umformung desselben nöthig. Es ist dort (§. 3):

$$\frac{\sum_0^n B_\alpha \,.\, x^{n-\alpha}}{\sum_0^{n-1} A_\alpha \,.\, x^{n-\alpha-1}} = \frac{1}{a_1} \cdot \Sigma(a_0, a_1)_{2\alpha} \,.\, x^{1-\alpha} - \frac{(1:a_1)\, \Sigma(a_3, a_\mu)_{2\alpha} \,.\, x^{n-\alpha-2}}{\sum_0^{n-1} A_\alpha \,.\, x^{n-\alpha-1}}$$

$$\frac{\sum_0^{n-1} A_\alpha \,.\, x^{n-\alpha-1}}{(1:a_1)\, \Sigma(a_3, a_\mu)_{2\alpha} \,.\, x^{n-\alpha-2}} = \frac{a_1}{a_3} \cdot \Sigma(a_1, a_3)_{2\alpha} \,.\, x^{1-\alpha} - \frac{(a_1 : a_3)\, \Sigma(a_5, a_\mu)_{2\alpha} \,.\, x^{n-\alpha-3}}{(1:a_1)\, \Sigma(a_3, a_\mu)_{2\alpha} \,.\, x^{n-\alpha-2}}$$

$$\frac{(1:a_1)\, \Sigma(a_3, a_\mu)_{2\alpha} \,.\, x^{n-\alpha-2}}{(a_1 : a_3)\, \Sigma(a_5, a_\mu)_{2\alpha} \,.\, x^{n-\alpha-3}} = \frac{a_3}{a_5 a_1^2} \cdot \Sigma(a_3, a_5)_{2\alpha} \,.\, x^{1-\alpha} - \frac{(a_3 : a_5 a_1)\, \Sigma(a_7, a_\mu)_{2\alpha} \,.\, x^{n-\alpha-4}}{(a_1 : a_3)\, \Sigma(a_5, a_\mu)_{2\alpha} \,.\, x^{n-\alpha-3}} \;\text{u. s. w.}$$

hergeleitet. Hieraus ist schon das Gesetz zu erkennen, nach welchem die Coefficienten der Theilnenner $\Sigma(a_{2r-1}, a_{2r+1})_{2\alpha} \,.\, x^{1-\alpha}$ aus den Nennern a gebildet werden. Noch deutlicher aber geht es aus der Gleichung

$$\frac{\Sigma(a_{2r-1}, a_\mu)_{2\alpha} \cdot x^{n-r-\alpha}}{\Sigma(a_{2r+1}, a_\mu)_{2\alpha} \cdot x^{n-r-\alpha-1}} = \frac{1}{a_{2r+1}} \cdot \Sigma(a_{2r-1}, a_{2r+1})_{2\alpha} \cdot x^{1-\alpha} - \frac{a_{2r-1}}{a_{2r+1}} \cdot \frac{\Sigma(a_{2r+3}, a_\mu)_{2\alpha} \,.\, x^{n-r-\alpha-2}}{\Sigma(a_{2r+4}, a_\mu)_{2\alpha} \cdot x^{n-r-\alpha-1}}$$

hervor, welche zeigt, dass der Theilnenner $\Sigma(a_{2r-1}, a_{2r+1})_{2\alpha} . x^{1-\alpha}$ mit $\frac{1}{a_{2r+1}}$ und mit dem Quotienten zu multipliciren ist, dessen Dividend der Factor von dem Reste $\Sigma(a_{2r-1}, a_{\mu})_{2\alpha} . x^{n-r-\alpha}$ und dessen Divisor der Factor von dem folgenden Reste $\Sigma(a_{2r+1}, a_{\mu})_{2\alpha} . x^{n-r-\alpha-1}$ ist. Nun ist der Factor von $\Sigma(a_{2r-1}, a_{\mu})_{2\alpha} . x^{n-r-\alpha}$ das Product: $\frac{a_{2r-5}}{a_{2r-3}} . \frac{a_{2r-9}}{a_{2r-7}} . \frac{a_{2r-13}}{a_{2r-11}} .....$; also ist der Theilnenner $\Sigma(a_{2r-1}, a_{2r+1})_{2\alpha} . x^{1-\alpha}$ mit dem Producte

$$(10.)\quad \frac{1}{a_{2r+1}} . \frac{a_{2r-5}a_{2r-9}a_{2-15} .....}{a_{2r-3}a_{2r-7}a_{2r-11} .....} . \frac{a_{2r-3}a_{2r-7}a_{2r-11} .....}{a_{2r-1}a_{2r-5}a_{2r-9} .....} = \frac{a_{2r-1}}{a_{2r+1}} . \left(\frac{a_{2r-5}a_{2r-9}a_{2r-15} .....}{a_{2r-3}a_{2r-7}a_{2r+11} .....}\right)^2$$

zu multipliciren. Werden hiemit die Coefficienten der linearen Function

$$\Sigma(a_{2r-1}, a_{2r+1})_{2\alpha} . x^{1-\alpha} = a_{2r-1}, a_{2r}, a_{2r+1} . x + (a_{2r-1} + a_{2r+1})$$

verbunden, so erhält man für die Reihe der Werthe von $r = 0$ bis $r = n$:

$$(11.)\begin{cases} b_0 = \frac{1}{a_1}(a_0, a_1)_0; b_1 = \frac{a_1}{a_3}(a_1, a_3)_0; b_2 = \frac{a_3}{a_5 a_1^2}(a_3, a_5)_0; ... b_n = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}}\left(\frac{a_{2n-5}a_{2n-9}...}{a_{2n-3}a_{2n-7}...}\right)^2 (a_{2n-1}, a_{2n+1})_0 \\ c_0 = \frac{1}{a_1}(a_0, a_1)_2; c_1 = \frac{a_1}{a_3}(a_1, a_3)_2; c_2 = \frac{a_3}{a_5 a_1^2}(a_3, a_5)_2; ... c_n = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}}\left(\frac{a_{2n-5}a_{2n-9}...}{a_{2n-3}a_{2n-7}...}\right)^2 (a_{2n-1}, a_{2n+1})_2 \end{cases}$$

Durch die Umkehrung dieser Gleichungen muss nun $F(a_0, a_{2n+1})$ aus dem Kettenbruch (9) entwickelt werden, damit dann weiter aus diesem eine Reihe durch die frühern Formeln hergeleitet werde. Es ist:

$$b_r . b_{r+1} = \frac{a_{2r-1}}{a_{2r+1}}\left(\frac{a_{2r-5}a_{2r-9} .....}{a_{2r-3}a_{2r-7} .....}\right)^2 (a_{2r-1}, a_{2r+1})_0 . \frac{a_{2r+1}}{a_{2r+3}}\left(\frac{a_{2r-3}a_{2r-7} .....}{a_{2r-1}a_{2r-5} .....}\right)^2 (a_{2r+1}, a_{2r+3})_0$$
$$= a_{2r} a_{2r+1}^2 a_{2r+2}$$

oder

$$(12.)\qquad a_{2r+2} = \frac{b_r . b_{r+1}}{a_{2r} a_{2r+1}},$$

und hiernach könnten schon die Theilnenner mit geradem Zeiger recurrirend berechnet werden.

Ferner ist

$$c_r = \frac{a_{2r-1}}{a_{2r+1}}\left(\frac{a_{2r-5}a_{2r-9} .....}{a_{2r-3}a_{2r-7} .....}\right)^2 (a_{2r-1} + a_{2r+1}) = \frac{a_{2r-1} + a_{2r+1}}{a_{2r-1} . a_{2r+1}} . \left(\frac{a_{2r-1}a_{2r-5}a_{2r-9} .....}{a_{2r-3}a_{2r-7}a_{2r-11} ....}\right)^2$$

und $b_r = a_{2r} . \left(\frac{a_{2r-1}a_{2r-5}a_{2r-9} .....}{a_{2r-3}a_{2r-7}a_{2r-11} ....}\right)^2$

also $c_r = \frac{a_{2r-1} + a_{2r+1}}{a_{2r-1} . a_{2r+1}} . \frac{b_r}{a_{2r}} = \left(\frac{1}{a_{2r+1}} + \frac{1}{a_{2r-1}}\right) . \frac{b_r}{a_{2r}}$.

Folglich ist

$$\frac{1}{a_{2r+1}} = \frac{c_r}{b_r} . a_{2r} - \frac{1}{a_{2r-1}} = \frac{c_r a_{2r} a_{2r-1} - b_r}{b_r a_{2r-1}} \quad \text{oder}$$

$$(13.)\qquad a_{2r+1} = \frac{b_r a_{2r-1}}{c_r a_{2r} a_{2r-1} - b_r} = 1 : \left(\frac{c_r}{b_r} . a_{2r} - \frac{1}{a_{2r-1}}\right).$$

Da ausserdem die beiden ersten Gleichungen (11), nämlich $b_0 = \frac{1}{a_1}(a_0, a_1)_0 = a_0$ und $c_0 = \frac{1}{a_1}(a_0, a_1)_2 = \frac{1}{a_1}$ die Coefficienten $a_0 = b_0$ und $a_1 = \frac{1}{c_0}$ bestimmen, so lassen sich durch Anwendung der Formeln (12 und 13) alle Nenner a finden.

Ferner ist nach (12)

$$a_2 = \frac{b_0 b_1}{a_0 a_1^2} = b_1 . c_0^2 \qquad \text{und nach (13)} \quad a_3 = 1:\left(\frac{c_1}{b_1}.a_2 - \frac{1}{a_1}\right) = 1:(c_0^2 c_1 - c_0) = 1:c_0(c_0 c_1 - 1)$$

$$a_4 = \frac{b_1 b_2}{a_2 a_3^2} = b_2 . (c_0 c_1 - 1)^2 \qquad a_5 = 1:\left(\frac{c_2}{b_2}.a_4 - \frac{1}{a_3}\right) = 1:[c_2(c_0 c_1 - 1)^2 - c_0(c_0 c_1 - 1)]$$

$$= 1:(c_0 c_1 - 1)(c_0 c_1 c_2 - c_0 - c_2)$$

$$a_6 = \frac{b_2 b_3}{a_4 a_5^2} = b_3 (c_0 c_1 c_2 - c_0 - c_2)^2 \qquad a_7 = 1:[c_3(c_0 c_1 c_2 - c_0 - c_2)^2 - (c_0 c_1 - 1)(c_0 c_1 c_2 - c_0 - c_2)]$$

$$= 1:(c_0 c_1 c_2 - c_0 - c_2)(c_0 c_1 c_2 c_3 - c_0 c_1 - c_0 c_3 - c_2 c_3)$$

Fasset man diese Ausdrücke durch Anwendung des Summenzeichens Σ zusammen, so erhält man

$$a_6 = b_3 \Sigma(-1)^\alpha (c_0, c_2)_{2\alpha} . \Sigma(-1)^\alpha (c_0, c_2)_{2\alpha} \qquad a_7 = 1:\Sigma(-1)^\alpha (c_0, c_2)_{2\alpha} . \Sigma(-1)^\alpha (c_0, c_3)_{2\alpha}$$

$$a_4 = b_2 \Sigma(-1)^\alpha (c_0, c_1)_{2\alpha} . \Sigma(-1)^\alpha (c_0, c_1)_{2\alpha} \qquad a_5 = 1:\Sigma(-1)^\alpha (c_0, e_1)_{2\alpha} . \Sigma(-1)^\alpha (c_0, c_2)_{2\alpha}$$

$$a_2 = b_1 \Sigma(-1)^\alpha (c_0, c_0)_{2\alpha} . \Sigma(-1)^\alpha (c_0, c_0)_{2\alpha} \qquad a_3 = 1:\Sigma(-1)^\alpha (c_0, c_0)_{2\alpha} . \Sigma(-1)^\alpha (c_0, c_1)_{2\alpha}$$

$$a_0 = b_0 \qquad a_1 = 1:\Sigma(-1)^\alpha (c_0, c_0)_{2\alpha}$$

Die Induction führt auf die allgemeine Form

$$(14.) \; a_{2r} = b_r \Sigma(-1)^\alpha (c_0, c_{r-1})_{2\alpha} . \Sigma(-1)^\alpha (c_0, c_{r-1})_{2\alpha} \qquad a_{2r+1} = 1:\Sigma(-1)^\alpha (c_0, c_{r-1})_{2\alpha} . \Sigma(-1)^\alpha (c_0, c_r)_{2\alpha};$$

und in der That folgt aus (12), wenn diese Ausdrücke als richtig angenommen werden:

$$a_{2r+2} = \frac{b_r b_{r+1}}{a_{2r} a_{2r+1}^2} = b_{r+1} \Sigma(-1)^\alpha (c_0, c_r)_{2\alpha} \Sigma(-1)^\alpha (c_0, c_r)_{2\alpha}$$

und aus (13):

$$a_{2r+3} = 1:\left(\frac{c_{r+1}}{b_{r+1}} . a_{2r+1} - \frac{1}{a_{2r+1}}\right) = 1:[c_{r+1} . \Sigma(-1)^\alpha (c_0, c_r)_{2\alpha} . \Sigma(-1)^\alpha (c_0, c_r)_{2\alpha}$$

$$- \Sigma(-1)^\alpha (c_0, c_{r-1})_{2\alpha} . \Sigma(-1)^\alpha (c_0, c_r)_{2\alpha}]$$

$$= 1:\Sigma(-1)^\alpha (c_0, c_r)_{2\alpha} . [\Sigma(-1)^\alpha c_{r+1} (c_0, c_r)_{2\alpha} - \Sigma(-1)^\alpha (c_0, c_{r-1})_{2\alpha}^{\alpha}]$$

$$= 1:\Sigma(-1)^\alpha (c_0, c_r)_{2\alpha} . \Sigma(-1)^\alpha (c_0, c_{r+1})_{2\alpha}$$

Diese Ausdrücke stimmen mit denen (14) überein, wenn man in denselben $r-1$ statt r setzt. Wenn also die Formeln (14) für a_{2r} und a_{2r+1} richtig sind, so sind sie es auch für a_{2r+2} und a_{2r+3}; und da sie oben für a_0, a_2, a_4 und a_1, a_3, a_5 gefunden wurden, so gelten sie für alle Theilnenner a. Der so erhaltene Kettenbruch $F(a_0, a_{2r+1})$, in welchem zudem x^{-1} statt x steht, kann nun weiter nach den Formeln (§. 1) in die Reihe $\Sigma A_\alpha x^{-\alpha}$ verwandelt werden.

Trier im Januar 1852.

Table d'errata, tome 43, cahier 2, pages 161 &.

pages	lignes	fautes	corrections
§. 4. 171	8..................	E........................	ε
idem	12..................	e........................	ε
idem	9 en remontant.....	$= \frac{1}{2}M^2\left(\frac{N^2}{A^2}+\frac{M^2}{B^2}+\frac{L^2}{C^2}\right)$..	$= \frac{1}{2}dt^2 . \sqrt{\left(\frac{N^2}{A^2}+\frac{M^2}{B^2}+\frac{L^2}{C^2}\right)}$
173	7 en remontant.....	$= \cos\varepsilon' . \cos\delta$...........	$= \cos\varepsilon' . \cos\delta'$
175	18..................	ligne d'ation est située...	ligne d'action située
176	2 en remontant.....	$= \frac{1}{2}dt^2 \frac{u}{\int \varrho^2 dm}$...........	$= \frac{1}{2}dt^2 . \frac{\mu'}{\int \varrho^2 dm}$
§. 5,6. 186	4, 5, 6.............	$=$	$-$
188	18..................	$\Pi = 0$..................	$\Pi_x = 0$
190	6..................	de rotation................	de condition
194	3..................	Ox' , Oy'	Oy' , Oz'
197	4 en remontant.....	équations (B)............	équations (3)
idem	1, 2, 3 en remontant	$\cos(\hat{k,x}), \cos(\hat{k,y}), \cos(\hat{\lambda\, z})$	$\cos(\hat{R,x})$, $\cos(\hat{R,y})$, $\cos(\hat{R,z})$
§. 7, 8. 202	13..................	par le terme............	par le terme $\gamma^2(A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2)$, on obtien,
203	2..................	$-\frac{F}{(A+B-C)-AB-F}$	$-\frac{F}{(A+B-C)C-AB-F}$
212	1..................	ajoutant..................	ayant
218	5 en remontant.....	$p\cos\nu + q\cos\lambda + r\cos\beta$	$p\cos\nu + q\cos\lambda + r\cos\mu$
220	9..................	nouveau point fixe (O)..	nouveau point fixe (A)
§. 9. 221	14 en remontant....	écru......................	écrou
226	9 en remontant.....	$R\cos(K\hat{I}K'')$...........	$R\cos(R\hat{I}K'')$
227	2..................	IO	IO'
231	1..................	$K\mu . x_1$, &................	$R\mu . x_1$, &.....
238	14 en remontant....	μKx_1, μXy_1, &	μRx_1 , μRy_1 , &.....
239	11 et 8 en remontant	remplacer K par.......	R aux seconds membres

6.

Lösung einiger Aufgaben aus der Axonometrie; mit besonderer Berücksichtigung der Anwendung derselben bei bildlicher Darstellung der Zwillingskrystalle.

(Von Herrn *Gustav Zeuner*, Berg-Ingenieur zu Chemnitz.)

Die *Axonometrie*, welche ihren Namen und ihre mathematische Begründung dem Herrn Professor *Weisbach* zu Freiberg verdankt, ist diejenige Parallelprojection, welche alle Eckpuncte eines bildlich darzustellenden Gegenstandes auf drei auf einander rechtwinklig stehende Coordinaten-Axen bezieht und das Axensystem so gegen die Bild-Ebene bringt, dass die Projectionen gleicher Theile der Coordinaten-Axen auf der Projections Ebene in einem gegebenen Verhältnisse stehen. Nachdem das Axensystem in dieser Art auf die Bild-Ebene projicirt worden, lässt sich jeder Punct des darzustellenden Körpers im Bilde dadurch bestimmen, dass man die Coordinaten desselben auf die projicirten Coordinaten-Axen in der denselben entsprechenden Verjüngung aufträgt und mit den drei Coordinaten ein Parallelepiped beschreibt, dessen ausserhalb der Coordinaten-Axen liegender Eckpunct die verlangte Projection des Puncts ist.

Es kommt demnach bei der axonometrischen Darstellung eines Gegenstandes zuvörderst darauf an, das Axensystem nach dem hier oben angegebenen Gesetze auf die Bild-Ebene zu projiciren.

Die Lösung dieser und einiger anderer Aufgaben, die sich an die erstere anschliessen, ist der Zweck des gegenwärtigen Aufsatzes.

Aufgabe I.

Die drei auf einander rechtwinklig stehenden Axen OX, OY u. OZ (Taf. III. Fig. 1) sollen so gegen die Bild-Ebene PQ gebracht und auf dieselbe projicirt

werden, dass die Projectionen OX', OY' und OZ' gleicher Theile dieser Axen in dem gegebenen Verhältnisse $1 : m : n$ stehen. Es sind die Neigungswinkel XOX', YOY' und ZOZ' der drei Axen gegen die Bild-Ebene, die Verjüngungsverhältnisse, d. h. die Verhältnisse der Axenprojectionen zu den Axenlängen selbst, und die Winkel anzugeben, welche die Axenprojectionen auf der Bild-Ebene unter sich einschliessen. *).

Auflösung.

Setzt man die Axen $OX = OY = OZ = 1$ und ihre Neigungen gegen die Bild-Ebene:

$$XOX' = \alpha \quad , \quad YOY' = \beta \quad \text{und} \quad ZOZ' = \gamma ,$$

so ergiebt sich für die Projectionen:

$$OX' = \cos\alpha \quad , \quad OY' = \cos\beta \quad \text{und} \quad OZ' = \cos\gamma .$$

Der Aufgabe gemäss ist aber das Verhältniss der Axenprojectionen:

$$OX' \; : \; OY' \; : \; OZ' = 1 : m : n; \quad \text{daher:}$$

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = 1 : m : n; \quad \text{woraus}$$

$$\cos\beta = m\cos\alpha \quad \text{und} \quad \cos\gamma = n\cos\alpha \text{ folgt.}$$

Die drei Axen im Raume schliessen mit der Linie ON, welche normal auf der Bild-Ebene steht, die Winkel

$$XON = \alpha' \quad ; \quad YON = \beta' \quad \text{und} \quad ZON = \gamma'$$

ein.

Nach der analytischen Geometrie wird der Zusammenhang der Winkel α', β' und γ' durch die Gleichung

$$\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1$$

ausgedrückt. Da nun diese Winkel die Complemente der Winkel α, β und γ sind, unter welchen die Axen gegen die Bild-Ebene geneigt sind, so erhält man

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1 .$$

In diese Gleichung die oben für $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ gefundene Werthe gesetzt, giebt:

$$1 - \cos^2\alpha + 1 - m^2\cos^2\alpha + 1 - n^2\cos^2\alpha = 1 ,$$

---

*) Diese Aufgabe, deren Lösung hier vorausgeschickt werden musste, weil sich die nächsten Aufgaben darauf stützen, hat zuerst Herr Prof. *Weisbach* in dem Aufsatze: „Die monodimetrische und anisometrische Projectionsmethode" in den polytechnischen Mittheilungen von *Volz* und *Karmarsch* Bd. I S. 125 bis 136 bekannt gemacht. Eine von der vorigen etwas abweichende Auflösung, mit Hülfe der ebenen Trigonometrie, hat der Verfasser des vorliegenden Aufsatzes in einer Abhandlung: „Die Anwendung der Axonometrie auf die bildliche Darstellung der Krystallgestalten", Berg- und Hüttenmännische Zeitung 1852. No. 24 und 25 gegeben.

woraus

$$(1.) \qquad \cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{1+m^2+n^2}}$$

$$(2.) \qquad \cos\beta = m.\sqrt{\frac{2}{1+m^2+n^2}}$$

$$(3.) \qquad \cos\gamma = n.\sqrt{\frac{2}{1+m^2+n^2}}$$

folgt.

Diese drei Gleichungen geben sowohl die Winkel, unter welchen die drei Axen für das gegebene Verhältniss der Axenprojectionen gegen die Bild-Ebene geneigt sind, als auch durch die Cosinusse der berechneten Winkel die Verhältnisse der Axenprojectionen zu den Axenlängen selbst. Gleichzeitig sieht man aus den gefundenen Gleichungen, dass die Werthe m und n gewissen Bedingungen entsprechen müssen. Die Gleichung (1) gab

$$\cos^2\alpha = \frac{2}{1+m^2+n^2}, \text{ woraus}$$

$$\cos^2\alpha(1+m^2+n^2) = 2$$

folgt. Da $\cos\alpha$ stets kleiner als 1 ist, so muss, damit dieser Gleichung genügt wird,

$$1+m^2+n^2 > 2 \text{ oder}$$

$$m^2 > 1-n^2$$

sein. Eben so folgt aus der Gleichung (2) die Bedingung

$$m^2 < 1+n^2$$

und aus der Gleichung (3):

$$m^2+1 > n^2.$$

Es zeigt sich aus diesen Bedingungen für m und n, dass diese Grössen nur zwischen engen Grenzen liegen können.

Der zweite Theil der Aufgabe ist: die Winkel $X'OY' = \varphi$; $Y'OZ' = \psi$ und $Z'OX' = \chi$ zu finden, welche die Axenprojectionen auf der Bild-Ebene einschliessen.

Zur Bestimmung des Winkels $X'OY' = \varphi$ beschreibe man von O aus das sphärische Dreieck XNY, so dass zwei Eckpuncte desselben in die betreffende Axe fallen und der dritte Eckpunct in die Normale ON zu liegen kommt. In diesem Dreiecke ist für den Winkel XNY, nach den Sätzen der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos.XNY = \frac{\cos XY - \cos XN \cdot \cos YN}{\sin XN \cdot \sin YN}$$

Aber der sphärische Winkel XNY ist $= X'O'Y' = \varphi$; ferner ist $XY = 90°$; $XN = 90 - \alpha$ und $YN = 90 - \beta$, also verwandelt sich die Gleichung in folgende:

$$\cos\varphi = -\frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} \text{ oder}$$

$$(4.) \qquad \cos\varphi = -\operatorname{tang}\alpha . \operatorname{tang}\beta,$$

und analog:

$$(5.) \qquad \cos\psi = -\operatorname{tang}\beta . \operatorname{tang}\gamma,$$

$$(6.) \qquad \cos\chi = -\operatorname{tang}\gamma . \operatorname{tang}\alpha.$$

Da diese Formeln zu ihrer Benutzung die trigonometrischen *Tangenten* der Winkel α, β und γ bedürfen, die Formeln (1, 2, 3) aber die *Cosinus* der Winkel geben, so muss man sie mit Hülfe der goniometrischen Formel $\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{\left(\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)}$ umformen. Es gehen dann die Gleichungen (4, 5, 6) in in folgende über:

$$(7.) \qquad \cos\varphi = -\frac{\sqrt{[(m^2+n^2-1)(n^2-m^2+1)]}}{2m},$$

$$(8.) \qquad \cos\psi = -\frac{\sqrt{[(n^2-m^2+1)(m^2-n^2+1)]}}{2mn} \text{ und:}$$

$$(9.) \qquad \cos\chi = -\frac{\sqrt{[(m^2+n^2-1)(m^2-n^2+1)]}}{2n}.$$

Diese lezteren Gleichungen dienen dazu, aus dem gegebenen Verhältnisse der Axenprojectionen $1:m:n$ unmittelbar die Winkel zu finden, welche diese Projectionen auf der Bild-Ebene unter sich einschliessen. Hat man jedoch nach den Gleichungen (1, 2, 3) die Winkel berechnet, welche die Axen im Raume mit der Bild-Ebene machen, so ergeben sich die Winkel φ, μ und χ leichter durch die Gleichungen (4, 5, 6).

Anmerkung. Axonometrische Darstellungen, bei denen die Axenprojectionen das Verhältniss $1:m:n$ haben, nennt man, nach dem Vorgange *Weisbachs, anisometrische Projectionen.* Am häufigsten kommt, besonders beim Krystallzeichnen, das Verhältniss $1:0{,}9:0{,}5$ vor. Für diesen Fall giebt die Rechnung für die Winkel, welche die Axen im Raume mit der Bild-Ebene einschliessen:

$$\alpha = 9°50' \quad ; \quad \beta = 27°31' \quad \text{und} \quad \gamma = 60°29';$$

ferner für das Verhältniss der Axenprojectionen zu den Axenlängen selbst, oder für die Cosinusse der Winkel:

$$\cos\alpha = 0{,}9853 \quad ; \quad \cos\beta = 0{,}8868 \quad \text{und} \quad \cos\gamma = 0{,}4927;$$

und endlich für die Winkel, welche die Axenprojectionen auf der Bild-Ebene unter sich einschliessen:

$$\varphi = 95^\circ\,11' \quad ; \quad \psi = 157^\circ, 9' \quad \text{und} \quad \chi = 107^\circ\,49'.$$

Die *monodimetrische Projection* ist diejenige, bei welcher die Axenprojectionen in dem Verhältniss $1:1:n$ stehen. Hier ist $m = 1$. In der Anwendung setzt man gewöhnlich n gleich $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$, und es finden sich durch Einführung dieser Werthe in die oben angegebenen Formeln leicht die Winkel, welche die Axenprojectionen auf der Bild-Ebene einschliessen; so wie die andern zur bildlichen Darstellung des Axensystems nöthigen Werthe. (In den oben angeführten Abhandlungen sind für die gebräuchlichsten Werthe von m und n die Rechnungsresultate angegeben.)

Sind endlich die Projectionen gleicher Theile der Coordinatenaxen *gleich gross*, also in dem Verhältniss $1:1:1$, so ergiebt sich die schon länger bekannte *isometrische Projection*.

Aufgabe II.

Es ist ein rechtwinkliges Axensystem nach der Aufgabe (I) so auf die Bild-Ebene projicirt worden, dass die Axenprojectionen in einem beliebigen Verhältniss $1:m:n$ stehen. Es sind also nicht allein die Winkel α, β und γ bekannt, welche die Axen im Raume mit der Bild-Ebene einschliessen, sondern auch die Winkel φ, ψ und χ, welche die Axenprojectionen unter sich auf der Projections-Ebene bilden. Stellt man sich nun vor, das Axensystem werde im Raume um einen gegebenen Winkel ϱ um eine feste Axe OT (Fig. 2), deren Lage gegen die drei Axen OX, OY und OZ gegeben oder nach besondern Angaben zu berechnen ist, (S. Anwendung u. Beispiel Aufg. II) gedreht, so kann die Aufgabe sein: aus diesen Angaben für die Lage des Axensystems *nach der Drehung*, sowohl die Winkel α', β' und γ', in welchen dann die Axen OX, OY und OZ gegen die Bild-Ebene geneigt sind, als auch die Länge der Axenprojectionen und die Winkel φ', ψ' und χ', welche dieselben dann auf der Bild-Ebene einschliessen, zu berechnen. Auch ist noch derjenige Winkel anzugeben, welchen die Projectionen der Axe OX *vor* und *nach* der Drehung mit einander auf der Bild-Ebene machen.

Erste Auflösung.

Der Aufgabe gemäss, soll die anfängliche Lage des Axensystems OX, OY und OZ (Fig. 2) vollständig bekannt sein, so dass unter der Voraussetzung

dass die Axenprojectionen in dem Verhältniss $1:m:n$ stehen, die Winkel α, β und γ und φ, ψ, χ nach der Aufgabe (I) berechnet worden sind. Die Drehungs-Axe OT bilde mit den drei Axen die Winkel $XOT = A$, $YOT = B$ und $ZOT = C$, (Fig. 2) welche als bekannt vorauszusetzen sind (S. das Beispiel zur ersten Auflösung). Nach einer Drehung des Axensystems um OT, um den gegebenen Winkel ϱ, mag die Axe OX nach OU; die Axe OY nach OV und OZ nach OW gekommen sein. Projicirt man diese Axen wieder auf die Bild-Ebene, so hat man, durch Rechnung, sowohl die Winkel $UOU' = \alpha'$, $VOV' = \beta'$ und $WOW' = \gamma'$ und in deren Cosinussen die Verjüngungsverhältnisse der Axenprojectionen zu den Axenlängen selbst, als auch die Winkel $U'OV' = \varphi'$, $V'OW' = \psi'$ und $W'OU' = \chi'$ und den Winkel $X'OU'$ zu suchen, um das Axensystem *nach* der Drehung zeichnen zu können.

Fället man in O ein Perpendikel ON auf die Bild-Ebene und setzt, sowohl ON und OT, als auch sämmtliche Axen im Raume, gleich 1, so lässt sich die Aufgabe, wenn man nach der Angabe der Figur, von O aus die verschiedenen Puncte durch Kreisbogen verbindet, mit Hülfe der sphärischen Trigonometrie wie folgt lösen.

Im sphärischen Dreieck XNU ist:

$$\cos NU = \cos NX \cos UX + \sin NX \sin UX \cos NXU.$$

Da aber $NU = 90 - \alpha'$ und $NX = 90 - \alpha$ ist, so kann man auch wie folgt schreiben:

$$\text{(I.)} \qquad \sin \alpha' = \sin \alpha \cos UX + \cos \alpha \sin UX \cos NXU.$$

Für XU ergiebt sich aus dem sphärischen Dreieck XUT:

$$\cos UX = \cos XT \cos UT + \sin XT \sin UT \cos UTX.$$

Da aber $TX = A$ und $TU = TX$ ist, weil die Lage der Axen gegen die Drehungs-Axe unveränderlich, und $UTX = \varrho$ ist, so folgt:

$$\text{(1.)} \quad \cos XU = \cos^2 A + \sin^2 A \cos \varrho = 1 - \sin^2 A (1 - \cos \varrho)$$

Ferner folgt nach (Fig. 2):

$$\text{(2.)} \qquad \text{Wink. } NXU = NXY - TXY + TXU,$$

wo im sphärischen Dreieck NXY,

$$\cos NXY = \frac{\cos NY - \cos NX \cos XY}{\sin NX \sin XY} = \frac{\cos(90-\beta) - \cos(90-\alpha)\cos 90^\circ}{\sin(90-\alpha)\sin 90^\circ} = \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} \text{ ist.}$$

Ferner ergiebt sich aus dem sphärischen Dreieck TXY.

$$\cos TXY = \frac{\cos TY - \cos TX \cos XY}{\sin TX \sin XY} = \frac{\cos B - \cos A \cos 90^\circ}{\sin A \sin 90^\circ} = \frac{\cos B}{\sin A};$$

und aus dem sphärischen Dreiecke TXU:

$$\cos TXU = \frac{\cos TU - \cos TX \cos XU}{\sin TX \sin XU} = \operatorname{cotg} A \left(\frac{1 - \cos XU}{\sin XU}\right) = \operatorname{cotg} A \operatorname{tang}(\tfrac{1}{2} XU).$$

Berechnet man mit Hülfe dieser Gleichungen nach (2) den Winkel NXU, nachdem man nach (1) den Werth XU gefunden hat, und setzt dann die betreffenden Grössen in die Gleichung (I), so ergiebt sich zuvörderst α', d. h. die Neigung der Axe OX gegen die Bild-Ebene, *nach* der Drehung, oder der Winkel UOU'. Zugleich erhält man für die Verjüngung der Axenprojection $OU' = \cos\alpha'$, weil $OU = OX = 1$ gesetzt wurde.

Um die Axe auf der Bild-Ebene zeichnen zu können, ist noch der Winkel $X'OU'$ zu berechnen, der dem sphärischen Winkel XNU gleich ist. Es ergiebt sich demnach:

$$\text{(II.)} \qquad \cos X'OU' = \cos XNU = \frac{\cos XU - \cos NX \cos NU}{\sin NX \sin NU} = \frac{\cos XU - \sin\alpha \sin\alpha'}{\cos\alpha \cos\alpha'};$$

in welcher Gleichung alle Grössen zur Bestimmung des Winkels $X'OU'$ bekannt sind.

Auf gleiche Weise lasse man nun auch die Axe OY sich drehen, und berechne sowohl deren Neigung gegen die Bild-Ebene *nach* der Drehung (also den Winkel VOV'), als den Winkel $V'O'Y$, welchen beide Projectionen der Axe OY *vor* und *nach* der Drehung mit einander auf der Bild-Ebene machen.

Im sphärischen Dreiecke NYV ist

$$\cos NV = \cos NY \cos VY + \sin NY \sin VY \cos NYV.$$

Hierbei ist $NV = 90 - \beta'$ und $NY = 90 - \beta$, daher:

$$\text{(III.)} \qquad \sin\beta' = \sin\beta \cos VY + \cos\beta \sin VY \cos NYV.$$

Aus dem sphärischen Dreiecke VTY ergiebt sich aber

$$\cos VY = \cos VT \cos YT + \sin VT \sin YT \cos YTV.$$

Da hier $VT = YT = B$ und Wink. $YTV = \varrho$ ist, so folgt:

$$\text{(3.)} \quad \cos VY = \cos^2 B + \sin^2 B \cos\varrho = 1 - \sin^2 B (1 - \cos\varrho).$$

Ferner folgt für die Gleichung (III) der Winkel

$$\text{(4.)} \qquad NYV = TYV - TYN = TYX + TYV - NYX; \quad \text{wo}$$

$$\cos TYX = \frac{\cos XT - \cos YT \cos XY \cos XY}{\sin YT \sin XY} = \frac{\cos A}{\sin B}.$$

$$\cos TYV = \frac{\cos VT - \cos VY \cos YT}{\sin VY \sin YT} = \operatorname{cotg} B \left(\frac{1 - \cos VY}{\sin VY}\right) = \operatorname{cotg} B . \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2} VY)$$

und $\cos NYX = \dfrac{\cos NX - \cos XY}{\sin XY \sin NY} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\beta}$ ist.

Die in (3 und 4) gefundenen Werthe in (III) gesetzt, giebt sowohl die Neigung der Axe OY gegen die Bild-Ebene *nach* der Drehung, also den

Winkel $VOV'=\beta'$, als auch in dem Ausdrucke $OV'=\cos\beta'$ die Länge der Projection OV', wenn $OV=OY=1$ ist.

Der Winkel $V'OY'$, welchen die Projectionen der Axe OY *vor* und *nach* der Drehung mit einander auf der Bild-Ebene einschliessen, ist dem sphärischen Winkel VNY gleich und man erhält denselben aus dem sphärischen Dreieck VNY wie folgt:

$$\text{(IV)} \qquad \cos V'OY' = \cos VNY = \frac{\cos VY - \cos VN \cos YN}{\sin VN \sin YN}$$
$$= \frac{\cos VY - \sin\beta \sin\beta'}{\cos\beta \cos\beta'},$$

wenn man die in (III) und (3) für β' und VY gefundenen Werthe benutzt.

Für den Winkel $V'OU'=\varphi'$, welchen die Projection der Axe OU, d. h. der Axe OX *nach* der Drehung, mit der Projection der Axe OV (OY nach der Drehung) einschliesst, ergiebt sich nun:

$$\text{Wink. } \varphi' = \varphi - X'OU' + V'OY';$$

und zur Controle der Richtigkeit der Rechnung dient aus der Aufgabe (1) die Gleichung

$$\cos\varphi' = -\operatorname{tang}\alpha' . \operatorname{tang}\beta'.$$

Die auf diese Art berechneten Werthe von α', β' und φ' geben jetzt weiter das Mittel, nach den Formeln der Aufgabe (I) sowohl den Winkel $WOW'=\gamma'$, den die Axe OZ *nach* der Drehung mit der Bild-Ebene einschliesst, als auch die Winkel $V'OW'=\psi'$ und $W'OU'=\chi'$ zu berechnen, welche die Projection der Axe OZ *nach* der Drehung, also OW', mit den Projectionen der beiden andern Axen auf der Projections-Ebene bildet.

Aus der Gleichung $\sin^2\alpha'+\sin^2\beta'+\sin^2\gamma'=1$ folgt $\sin\gamma'=\sqrt{(1-\sin^2\alpha'-\sin^2\beta')}$, und es ergiebt sich daher für die Länge der Projection $OW'=\cos\gamma'$ schliesslich:

$$\cos\psi' = -\operatorname{tang}\beta' \operatorname{tang}\gamma'$$
$$\cos\chi = -\operatorname{tang}\gamma' \operatorname{tang}\alpha'.$$

Anwendung und Beispiel.

Die Resultate der Auflösung vorliegender Aufgabe wurden zuerst vom Verfasser zur axonometrischen Darstellung der *Zwillingskrystalle* benutzt. Bei der Erklärung der Erscheinung des Verwachsenseins von Krystallen stellt man sich nämlich die Individuen zunächst in *paralleler* Richtung vor, und dann das eine Individuum um eine Axe, die gewöhnlich senkrecht auf einer Krystallfläche

oder parallel mit derselben ist, um einen bestimmten Winkel gedreht. Bei der axonometrischen Darstellung solcher Verwachsungen hingegen stellt man sich das Axensystem, auf welches bei der Darstellung alle Krystall-Eckpuncte bezogen wurden, und welches nach der in der Aufgabe (I) angedeuteten Weise auf die Bild-Ebene projicirt worden ist, um die gegebene feste Drehungs-Axe gedreht vor, und projicirt *nach* der Drehung das Axensystem von Neuem, um den Krystall auch *nach* der Drehung zeichnen zu können. Beide Darstellungen *vor* und *nach* der Drehung liefern das axonometrische Bild der Verwachsung.

Bei Lösung der Aufgabe (II) wurde vorausgesetzt, dass die Drehungs-Axe durch den Ursprung des Axensystems gehe, und daher auch der Ursprung des gedrehten Axensystems dieselbe Lage einnehme, wie der Ursprung des Systems *vor* der Drehung. Bei der Darstellung der *Zwillingskrystalle* fallen nun zwar nicht immer die Anfangspuncte beider Axensysteme zusammen, indess hat Dies auf die Rechnung keinen Einfluss, vielmehr lässt sie sich stets unter der ersten Voraussetzung ausführen. Bei der Darstellung von *Verwachsungen*, bei denen die gedachten Puncte nicht zusammenfallen, kann man das eine projicirte Axensystem leicht gegen das andere verschieben, indem man dasselbe, z. B. parallel mit sich selbst, zuerst in der Richtung der projicirten Axe OX' und dann um einen verhältnissmässig gleichen Theil in der Axe OU', so weit fortrückt, bis das Bild des Zwillingskrystalls die verlangte Ausdehnung zu erhalten scheint.

Die Lage der Drehungs-Axe ist für die regelmässigen Verwachsungen jedesmal bestimmt gegeben. Die Axe ist, wie schon gesagt, entweder mit einer Krystallfläche parallel, und liegt dann, wenn man sie nach dem Ursprung des Axensystems verlegt, in einer Coordinaten-Axe, oder in einer Coordinaten-Ebene, oder sie steht senkrecht auf einer Krystallfläche. Im ersten Fall sind die Winkel, welche die Drehungs-Axe mit den Coordinaten-Axen macht, unmittelbar gegeben; in den letzten beiden Fällen lassen sich dieselben leicht aus der durch krystallographische Gesetze gegebenen Gleichung der betreffenden Krystallfläche auf folgende Weise berechnen.

Die bekannte Gleichung der Krystallfläche, auf welcher die Drehungs-Axe senkrecht steht, sei:

$$\frac{x'}{a}+\frac{y'}{b}+\frac{z'}{c}=1.$$

Die Gleichungen der Drehungs-Axe seien, da dieselbe der Voraussetzung gemäss durch den Ursprung des Axensystems geht:

$$\frac{x''}{a'} + \frac{y''}{b'} = 0 \text{ und } \frac{x''}{c'} + \frac{z''}{d'} = 0, \text{ woraus}$$

$$y'' = -\frac{b'}{a'} x'' \text{ und } z'' = -\frac{d'}{c'} x''$$

folgt. Die analytische Geometrie giebt für den Fall, dass die Linie senkrecht auf der gegebenen Fläche steht:

$$-\frac{b'}{a'} = \frac{a}{b} \text{ und } -\frac{d'}{c'} = \frac{a}{c},$$

wonach sich für die Gleichungen der Linie auch

$$y'' = \frac{a}{b} x'' \text{ und } z'' = \frac{a}{c} x''$$

ergiebt.

Setzt man die Coordinaten des Durchschnittspuncts der Fläche mit der Linie gleich x, y und z, so finden, da dieser Punct sowohl der Fläche als der Normale angehört, auch folgende Gleichungen Statt:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad ; \quad y = \frac{a}{b} x \quad ; \quad z = \frac{a}{c} x$$

woraus:

$$x = \frac{a \cdot b^2 \cdot c^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2},$$

$$y = \frac{b \cdot a^2 \cdot c^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2} \text{ und}$$

$$z = \frac{c \cdot a^2 \cdot b^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2} \text{ folgt.}$$

Es ergiebt sich aber durch eine einfache Betrachtung für den Winkel, welchen die Normale mit der gegebenen Fläche oder, mit andern Worten, die Drehungs-Axe mit der Axe OX einschliesst, aus den Coordinaten des Durchschnittspuncts:

$$\tang A = \frac{\sqrt{(y^2 + z^2)}}{x} \quad \text{(In Fig. 2 ist Wink. } A = TOX = \text{arc } TX).$$

Für den Winkel, welchen die Drehungs-Axe mit der Axe OY einschliesst, ist

$$\tang B = \frac{\sqrt{(x^2 + z^2)}}{y} \quad \text{(Wink. } B = TOY = \text{arc } TY)$$

und für den Winkel, welchen die Drehungs-Axe mit OZ macht:

$$\tang C = \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{z} \quad \text{(Wink. } C = TOZ = \text{arc } TZ)$$

Setzt man in diese Formeln die oben für x, y und z gefundenen Werthe, so erhält man:

$$\text{(1.)} \qquad \tang A = \frac{a\sqrt{(b^2 + c^2)}}{bc}$$

(2.) $$\tang B = \frac{b\sqrt{(a^2+c^2)}}{ac}.$$

(3.) $$\tang C = \frac{c\sqrt{(a^2+b^2)}}{ab}.$$

Mit Hülfe dieser Formeln lassen sich also unmittelbar aus den Parametern der gegebenen Krystallfläche die Winkel berechnen, welche die auf der genannten Fläche senkrecht stehende Zwillings-Axe mit den drei Coordinaten-Axen einschliesst.

Als besonderes Beispiel soll ein Axensystem angenommen werden, dessen Axenprojectionen auf der Bild-Ebene in den Verhältnissen **1 : 0,9 : 0,5** stehen. Für diesen Fall wurden in der Aufgabe (I) die Winkel angegeben, welche die Axenprojectionen auf der Bild-Ebene mit einander machen. Um demnach dieses Axensystem auf der Bild-Ebene darzustellen, trage man an die verticale Linie OX (Fig. 3) die Axe OY' dergestalt an, dass Wink. $X'OY' = 95°11'$ ist, die Axe OZ' so an OY', dass Wink. $Y'OZ' = 157°0'$ ist, und mache mittels eines Maasstabes $OX' = 0{,}9853$, $OY' = 0{,}8868$ und $OZ' = 0{,}4927$, oder, wo es auf die absolute Länge, wie bei Krystallgestalten, nicht ankommt, $OX' = 1$, $OY' = 0{,}9$ und $OZ' = 0{,}5$. Dann ist das Axensystem auf die verlangte Weise vollständig projicirt.

Es soll nun das Axensystem im Raume um eine Linie, die senkrecht auf einer *Oktaëderfläche* steht, um den Winkel $\varrho = 60°$ gedreht und dann das Axensystem von Neuem auf die Bild-Ebene projicirt werden.

Nach der Aufgabe (II) müssen zuerst die Winkel bestimmt werden, welche die Drehungs-Axe mit den drei Axen im Raume einschliesst. Da bei einem Oktaëder die Coordinaten-Axen zugleich die Haupt-Axen sind, so ist die Gleichung der Oktaëderfläche $x+y+z=1$, für welche also $a=b=c=1$ ist, auch für dieses Axensystem gültig. Setzt man die erwähnten Parameter $a=b=c=1$ in die Gleichungen (1, 2, 3, Anwendung und Beispiel), so ergiebt sich $\tang A = \tang B = \tang C = \sqrt{2}$, und hieraus:

$$\text{Wink. } A = B = C = 54°44'.$$

Für den Winkel α', welchen die Axe OX *nach* der Drehung mit der Bild-Ebene einschliesst, ergiebt sich nach der Gleichung (1, Aufgabe II):

$$\sin\alpha' = \sin\alpha\cos XU + \cos\alpha\sin XU\cos NXU.$$

Hierbei ist nach der Aufgabe (I) $\alpha = 9°50'$.

Nach der Gleichung (1) ist $\cos XU = 1 - \sin^2(54°44')(1-\cos 60°)$ oder

$$XU = 48°12'$$

Ferner

$$\text{Wink. } NXU = NXY - TXY + TXU,$$

$$\text{wo } \cos NXY = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} = \frac{\sin(27^\circ 31)}{\cos(9^\circ 50')}, \text{ also } NXY = 62^\circ 3' \text{ ist.}$$

Sodann ist $\cos TXY = \frac{\sin B}{\cos A} = \frac{\sin 54^\circ 44'}{\cos 54^\circ 44'}$ oder $TXY = 45^\circ$

und $\cos TXU = \operatorname{cotg} A . \operatorname{tang}(\frac{1}{2} UX) = \operatorname{cotg}(54^\circ 44') . \operatorname{tang}(24^\circ 12')$

oder Wink. $TXU = 71^\circ 34'$,

also demnach Wink. $NXU = 88^\circ 37'$.

Diese Werthe in die Gleichung für $\sin\alpha'$ gesetzt, giebt für die Neigung der Axe OX gegen die Bild-Ebene *nach* der Drehung:

$$\alpha' = 7^\circ 34' .$$

Die Länge der Projection d. h. $\cos\alpha'$ ist $= 0{,}9913$ (für $OX = 1$). Von dem Winkel $X'OU'$ (Fig. 3), welchen die Projectionen von OX *vor* und *nach* der Drehung mit einander auf der Bild-Ebene einschliessen, ist nach der Gleichung (Aufgabe II):

$$\cos X'OU' = \frac{\cos XU - \sin\alpha \sin\alpha'}{\cos\alpha \cos\alpha'} = \frac{\cos(48^\circ 12') - \sin(9^\circ 50')\sin(7^\circ 34')}{\cos(9^\circ 50')\cos(7^\circ 34')};$$

woraus $X'OU' = 48^\circ 45'$ folgt.

Dreht man in gleicher Weise OY, so ergiebt sich für deren Neigung β' gegen die Bild-Ebene *nach* der Drehung, durch Benutzung obiger Formeln:

$$\beta' = 56^\circ 14'$$

und für die Länge ihrer Projection $\cos\beta' = 0{,}5558$.

Beide Projectionen dieser Axe *vor* und *nach* der Drehung schliessen nach (IV) den Winkel:

$$V'OY' = 55^\circ 3' \text{ ein.}$$

Da nun nach Aufgabe (I) $\varphi = 95^\circ 11'$ war, so ist für das gedrehte Axensystem φ', oder der Winkel $U'OV' = \varphi' = 101^\circ 29'$. Derselbe Werth ergiebt sich für φ' auch durch die Gleichung $\cos\varphi' = -\operatorname{tang}\alpha' \operatorname{tang}\beta'$. Nach der in der Aufgabe (II) weiter angegebenen Weise folgt endlich $\gamma' = 32^\circ 41'$, also für die Axenprojection $OW' = \cos\gamma' = 0{,}8416$ und

$$V'OW' = \psi' = 163^\circ 38' \quad , \quad W'OU' = \chi' = 94^\circ 53'.$$

Sollten also in dem vorliegenden Fall die Axensysteme gezeichnet werden, so würde man die (Fig. 3), so darzustellen haben, dass sie folgenden Angaben, wie sie aus obiger Rechnung resultiren, genügt. Hierbei ist, da es bei Krystallzeichnungen nicht auf die absolute Länge der Axe ankommt, die Projection von

OX_* $OX'^6 = 1$ gesetzt, und es sind daher alle Projectionen der übrigen Axen in demselben Verhältnisse vergrössert worden:

Axensystem vor der Drehung. (Fig. 3.)

Neigung der Axen gegen die Bild-Ebene.	Länge der Axenprojectionen.	Winkel, welche die Axenprojectionen auf der Bild-Ebene unter sich machen.
$\alpha = 9° 50'$	$OX' = 1$	$\varphi = X'OY' = 95° 11'$
$\beta = 27° 31'$	$OY' = 0,9$	$\psi = Y'OZ' = 157° 0'$
$\gamma = 60° 29'$	$OZ' = 0,5.$	$\chi = Z'OX' = 107° 49'$

Axensystem nach der Drehung.

Die trigonale Axe ist die Drehungs-Axe und der Drehungswinkel = 60.

Wink. $X'OU' = 48° 45'$.

$\alpha' = 7° 34'$	$OU' = 1,005$	$\varphi' = U'OV' = 101° 29'$
$\beta' = 56° 14'$	$OV' = 0,564$	$\psi' = V'OW' = 163° 38'$
$\gamma' = 32° 41'$	$OW' = 0,854$	$\chi' = W'OU' = 94° 53'$

Die in (Fig. 3) nach vorstehenden Resultaten dargestellten Axensysteme können zur Zeichnung der regelmässigen *Verwachsung zweier Octaëder* dienen; wie es (Fig. 4) andeutet.

Die Axen OX', OY' und OZ', welche das Axensystem zur Darstellung des einen Octaëders bilden, werden über den Durchschnittspunct O hinaus verlängert und von O aus die Längen OX', OY' und OZ' auch rückwärts auf die betreffenden Verlängerungen aufgetragen. Die gehörige Verbindung der gefundenen Puncte durch gerade Linien nach (Fig. 4) giebt das Octaëder in der ersten Stellung. Verfährt man auf gleiche Weise mit dem zweiten Axensysteme OU', OV' und OW', so entsteht das zweite Octaëder, welches, auf die in (Fig. 4) angegebene Weise mit dem ersten verbunden, das verlangte Bild der regelmässigen Verwachsung zweier Octaëder in der Voraussetzung giebt, dass die trigonale Axe die Drehungs-Axe ist, und der Drehungswinkel 60° beträgt.

Es ist klar, dass die Resultate vorstehender Rechnung auf alle Zwillingskrystalle, die nach dem oben angenommenen Gesetze gebildet sind, Anwendung finden können. Die Resultate ändern sich zwar bei einer andern Lage der Drehungs-Axe und bei verändertem Drehungswinkel; doch giebt es so wenig Gesetze der Zwillingsbildung, dass man für die hauptsächlichsten im Voraus die Axensysteme berechnen und die Resultate in der oben angedeuteten Weise *tabellarisch* zusammenstellen könnte.

Die ganze obige Rechnung vereinfacht sich, wie es schon vorstehendes Beispiel zeigt, bei der Anwendung auf die Darstellung der regelmässigen Verwachsungen sehr: theils dadurch, dass in allen Zwillingsgesetzen nur die Drehungswinkel 180°, 120° (oder 60°) und 90° vorkommen, theils dadurch, dass die Drehungs-Axe stets eine solche Lage gegen die Coordinaten-Axen einnimmt, dass sich die oben aufgestellten Formeln auf einfachere Ausdrücke reduciren lassen. Wollte man die Rechnungsresultate für die verschiedenen Zwillingsgesetze *tabellarisch* zusammenstellen, so wäre es allerdings für die Einfachheit ein Haupt-Erforderniss, für jede Darstellung des Krystalls in der ersten Lage das gleiche anisometrische Axensystem anzunehmen; wozu sich dann das System 1:0,9:0,5 am besten eignen dürfte.

Zweite Auflösung.

Vorstehende Auflösung der zweiten Aufgabe gab mit Hülfe strenger Rechnung alle zur Darstellung des Axensystems *nach* der Drehung nöthigen Elemente. So lange aber nicht für die hauptsächlichsten Zwillingsgesetze die Rechnung in obiger Weise im Voraus durchgeführt ist, so dass der Zeichner sofort nach angegebenen Resultaten das Axensystem zeichnen kann, ist es besser, das zweite Axensystem mit Hülfe von Coordinaten aus dem ersten Systeme auf folgende Weise zu bestimmen:

Die Axen OX, OY und OZ (Fig. 5) bezeichnen, wie oben, das Axensystem *vor* der Drehung, dessen Lage gegen die Bild-Ebene aus der Aufgabe (I) vollständig bekannt ist. OT ist die Drehungs-Axe, und die Axen OU, OV und OW stellen die Lage des Axensystems *nach* der Drehung um den Winkel ϱ vor, um deren Bestimmung es sich handelt.

Bezeichnet also OU die Lage der Axe OX im Raume, *nach* der Drehung, und OU' deren Projection (Fig. 5), so würde, wenn die Lage des Puncts U bekannt wäre, sowohl die Axenlage OU als deren Projection OU' gegeben sein. Die Lage des Puncts U im Raume lässt sich aber durch Coordinaten in Bezug auf das gegebene Axensystem OX, OY und OZ bestimmen.

Man fälle nämlich von U auf die Axen OX, OY und OZ, oder auf deren Verlängerungen, die Perpendikel UP, UQ und UR, so sind offenbar OP, OQ und OR die Coordinaten des Puncts U in Bezug auf das Axensystem OX, OY und OZ. Auf den auf die Bild-Ebene projicirten Axen hat man nun diese Coordinaten von O aus in der den betreffenden Axen entsprechenden Verjüngung aufzutragen, also

$$OP' = \frac{OX'}{OX}.OP = OP.\cos\alpha$$
$$OQ' = \frac{OY'}{OY}.OQ = OQ.\cos\beta \text{ und}$$
$$OR' = \frac{OZ'}{OZ}.OR = OR.\cos\gamma$$

zu machen. Mit Hülfe dieser Coordinaten ergiebt sich dann im Bilde leicht der Punct U', und in der Linie OU' die Projection der Axe OX *nach* der Drehung.

Zur Berechnung der Coordinaten von U, also OP, OQ und OR, beschreibe man von O aus die Kreisbogen UX, UY und UZ, und verbinde auf gleiche Weise die Puncte U, X, Y und Z mit dem Endpuncte T der Drehungs-Axe. Da UP senkrecht auf OX ist, so ist offenbar $OP = \cos UX$; eben so $OQ = \cos UY$ und $OR = \cos UZ$ (weil $OX = OY = OZ = OU = OT = 1$).

Setzt man nun die Coordinaten von $U: OP = x'$; $OQ = y'$ und $OR = z'$, und berechnet $\cos UX$ aus dem sphärischen Dreieck UTX; eben so $\cos UY$ aus ΔUTY und $\cos UZ$ aus ΔUTZ, so ergiebt sich:

$$x' = OP = \cos XU = \cos XT.\cos UT + \sin XT.\sin UT \cos XTU.$$

Da aber nach der Auflösung (I)

$$XT = UT = A \text{ und } XTU = \varrho \text{ ist,}$$

so ist (1.) $$x' = 1 - \sin^2 A(1 - \cos\varrho)$$

Ferner:

$$y' = OQ = \cos UY = \cos UT.\cos YT + \sin UT.\sin YT \cos UTY \text{ oder}$$

(2.) $$y' = \cos A.\cos B + \sin A.\sin B \cos(XTY - \varrho),$$

wo $$\cos XTY = \frac{\cos XY - \cos XT.\cos YT}{\sin XT.\sin YT} = -\operatorname{cotg} A.\operatorname{cotg} B \text{ ist;}$$

und

$$z' = OR = \cos UZ = \cos UT.\cos ZT + \sin UT.\sin ZT.\cos UTZ \text{ oder}$$

(3.) $$z' = \cos A.\cos C + \sin A.\sin C.\cos(XTZ + \varrho),$$

wo $$\cos XTZ = -\operatorname{cotg} A.\operatorname{cotg} C \text{ ist.}$$

Um die Coordinaten von U zu berechnen, hat man also nur die Winkel A, B und C nöthig, welche die Drehungs-Axe mit den Coordinaten-Axen einschliesst.

Auf gleiche Weise erhält man die Coordinaten von V, also dadurch die Lage OV der Axe OY *nach* der Drehung, nämlich:

(4.) $$x'' = \cos VX = \cos A.\cos B + \sin A.\sin B.\cos(XTY + \varrho)$$

(5.) $$y'' = \cos VY = 1 - \sin^2 B(1 - \cos\varrho)$$

(6.) $$z'' = \cos VZ = \cos B.\cos C + \sin B.\cos(YTZ - \varrho),$$

wo $$\cos YTZ = -\operatorname{cotg} B . \operatorname{cotg} C$$ ist.

Die Coordinaten von W sind:

$$(7.) \quad x''' = \cos WX = \cos A . \cos C + \sin A . \sin C . \cos(XTZ - \varphi),$$

$$(8.) \quad y''' = \cos WY = \cos B . \cos C + \sin B . \sin C . \cos(YTZ + \varrho),$$

$$(9.) \quad z''' = \cos WZ = 1 - \sin^2 C(1 - \cos\varrho).$$

Vorstehende 9 Gleichungen dienen nun dazu, das Axensystem *nach* der Drehung auf der Bild-Ebene darzustellen. Wie dies geschehe, wird sich aus der nochmaligen Lösung des Beispiels der ersten Auflösung der vorliegenden Aufgabe ergeben.

Das Axensystem OX, OY und OZ war so auf die Bild-Ebene projicirt worden, dass die Axenprojectionen in dem Verhältniss 1:0,9:0,5 stehen. (Fig. 3). Die Drehungs-Axe schliesst, unter der Voraussetzung, dass sie senkrecht auf der Octaëderfläche stehe, nach der oben ausgeführten Rechnung, mit den drei Axen die Winkel $A = B = C = 54^\circ\, 44'$ ein. Der Drehungswinkel beträgt 60°.

Nach den Gleichungen (1, 2 und 3) ergiebt sich demnach für die Coordinaten von U des Puncts X *nach* der Drehung:

$$x' = 1 - \sin^2(54^\circ\, 44')(1 - \cos 60^\circ) = \tfrac{2}{3},$$

$$y' = \cos^2(54^\circ\, 44') + \sin^2(54^\circ\, 44')\cos(120 + 60) = \tfrac{2}{3},$$

(weil sich $XTY = YTZ = ZTX = 120^\circ$ ergiebt. Fig. 5)

$$z' = \cos^2(54^\circ\, 44') + \sin^2(54^\circ\, 44')\cos(120 + 60) = -\tfrac{1}{3}.$$

Eben so ergeben sich nach den Gleichungen (4, 5 und 6) für die Coordinaten des Puncts V:

$$x'' = -\tfrac{1}{3} \quad ; \quad y'' = \tfrac{2}{3} \quad \text{und} \quad z'' = \tfrac{2}{3},$$

und nach den Gleichungen (7, 8 und 9) für die Coordinaten von W:

$$x''' = \tfrac{2}{3} \quad ; \quad y''' = -\tfrac{1}{3} \quad \text{und} \quad z''' = \tfrac{2}{3}.$$

Um im vorliegenden Falle beide Axensysteme darzustellen, zeichne man zuvörderst das Axensystem OX', OY' und OZ' nach der Aufgabe (I.) (Fig. 3), verlängere die Axen über den Durchschnittspunct O hinaus, und trage von O aus die gehörigen Axenlängen auch rückwärts auf. Nun schreite man zur Darstellung des zweiten Axensystems, indem man U', V' und W' durch die oben berechneten Coordinaten bestimmt, die man auf die Axen im Bilde in der denselben entsprechenden Verjüngung aufträgt. Um also U' im Bilde anzugeben (Fig. 3), trage man $OP' = \tfrac{2}{3}OY'$ auf und ziehe durch P' eine Parallele $P'Q'$ mit der Axe OZ' und $P'Q' = \tfrac{1}{3}OZ'$. (Hier ist zu beachten, dass $P'Q'$ in der Richtung der Verlängerung von OZ', also rückwärts aufgetragen werde, weil der Rechnung gemäss z' negativ ist). Durch Q' wird alsdann $Q'U'$ parallel mit OX

gelegt, und $Q'U'$ parallel mit OX gelegt und $Q'U' = \frac{2}{3}.OX'$ aufgetragen. Die Linie OU' giebt dann die Projection von OX *nach* der Drehung.

Auf gleiche Weise ergiebt sich V', indem man $OQ'' = \frac{3}{5} OZ'$, $Q''P'' = \frac{3}{5} OY'$ und $P''V'' = \frac{1}{3} OX$ macht. Der Werth $P''V'$ wird, da x'' negativ ist, abwärts, also der Richtung OX' entgegengesetzt, aufgetragen. Die Lage von W' folgt endlich, wenn man

$$OP''' = -\tfrac{1}{3} OY' \quad ; \quad P'''Q''' = \tfrac{2}{3} OZ' \quad \text{und} \quad Q'''W' = \tfrac{2}{3} OX'$$

macht.

Nach dieser zweiten Art ergiebt sich die Lage der Axen OU', OV' und OW' schneller, als durch die Auflösung (I) der zweiten Aufgabe. Indessen dürfte sich das erste Verfahren, die Winkel, welche die Axen unter sich auf der Bild-Ebene einschliessen, und die Länge der Axenprojectionen anzugeben, besser eignen, für die wichtigsten Zwillingsgesetze die Rechnungsresultate tabellenförmig aufzustellen. Die zweite Methode, die Axen *nach* der Drehung durch Coordinaten zu finden, ist besser, wenn der Zeichner die Tabellen nicht zur Hand hat, und wenn es darauf ankommt, schnell zum Ziele zu gelangen. Die Verjüngungen der Axenprojectionen und die Winkel, welche dieselben auf der Bild-Ebene einschliessen, ergeben sich bei dem zweiten Verfahren am schnellsten durch directe Abmessung, wenn einmal beide Axensysteme gezeichnet sind.

Anmerk. Bei oberflächlicher Betrachtung der zweiten Aufgabe könnte es zweckmässig scheinen, für ein bestimmtes Zwillingsgesetz beide Axensysteme *vor* und *nach* der Drehung so gegen die Bild-Ebene zu bringen, dass die Axenprojectionen beider Systeme in gleichen Verhältnissen stehen, dass also (Fig. 3):

$$OX' : OY' : OZ' = OU' : OV' : OW' = 1 : m : n$$

ist. Es würden dann für jedes besondre Zwillingsgesetz nur m und n zu berechnen sein, um sofort nach der Aufgabe (I) alle andern Elemente zur Darstellung beider Axensysteme zu finden.

Die Rechnung giebt auch unter dieser Voraussetzung sehr einfache Ausdrücke für m und n; nämlich:

$$m = \frac{\sin B}{\sin A} \quad \text{und} \quad n = \frac{\sin C}{\sin A},$$

wo A, B und C die oben angenommene Bedeutung haben. Aber abgesehen davon, dass dann die Anwendung der so berechneten Werthe von m und n nicht immer gute Krystallbilder liefern würde, ist die Methode zur Darstellung von Zwillingskrystallen auch aus einem andern Grunde nicht wohl anzuwenden. Die Rechnung gilt nämlich unter der in Rede stehenden Voraussetzung, dass die

Drehungs-Axe stets senkrecht auf der Bild-Ebene stehen muss. Da nun bei allen Zwillingsgesetzen die Drehungs-Axe mit der trigonalen Axe identisch ist, oder in einer Coordinaten-Ebene oder Coordinaten-Axe liegt, so zeigen sich entweder beide Axensysteme der erwähnten Voraussetzung als *isometrische* (S. Aufgabe I), oder als *einfach schiefe Projection*, bei welcher nämlich die eine Axe in der Bild-Ebene liegt und die beiden andern Axen in eine gerade Linie fallen, welche senkrecht auf der ersten steht. Beide Projectionsmethoden sind zur bildlichen Darstellung von Krystallen nicht tauglich.

Aufgabe III.

Es ist ein Punct P (Fig. 6) durch seine Coordinaten x, y und z, in Beziehung auf ein rechtwinkliges Axensystem gegeben, und eine Linie RS durch ihre Gleichungen $\frac{x'}{a}+\frac{y'}{b}=1$ und $\frac{x'}{c}+\frac{z'}{d}=1$ in Bezug auf dasselbe Axensystem. Stellt man sich nun den Punct P um einen gegebenen Winkel S um die Linie RS so gedreht vor, dass seine Entfernung von dieser Linie während der Drehung dieselbe bleibt, so kann die Aufgabe gestellt werden: die Lage des Puncts P *nach* der Drehung durch seine Coordinaten anzugeben.

Von vorliegender Aufgabe, deren Auflösung hier auf rein analytischem Wege geschehen soll, ist, wie leicht zu sehen, die Aufgabe (II) nur ein besondrer Fall. Während die obige Aufgabe nur für axonometrische Darstellungen wichtig ist, dürfte die gegenwärtige zugleich für die analytische Geometrie Interesse haben.

Auflösung.

Wenn eine Drehung des Puncts P in der oben angezeigten Weise erfolgt, so wird die Bewegung desselben in einer Ebene ABC geschehen, die senkrecht auf der gegebenen Linie RS steht. Die Gleichung dieser Ebene sei

$$\frac{x_0}{a'}+\frac{y_0}{b'}+\frac{z_0}{c'}=1.$$

Da die Ebene auch durch den Punct P geht, so lässt sich auch

$$\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}+\frac{z}{c'}=1$$

schreiben. Beide Gleichungen von einander abgezogen, giebt

$$(1.)\qquad \frac{x_0-x}{a'}+\frac{y_0-y}{b'}+\frac{z_0-z}{c'}=0.$$

Da die Ebene senkrecht auf der Geraden *RS* (Fig. 6) stehen soll, deren Gleichungen gegeben sind, so stehen nach den Sätzen der analytischen Geometrie die Parameter der Gleichungen der Ebene und der Geraden *RS* in den Verhältnissen

$$\frac{a}{b} = -\frac{b'}{a'} \quad \text{und} \quad \frac{c}{d} = -\frac{c'}{d'}; \quad \text{woraus:}$$

$$b' = -\frac{aa'}{b} \quad \text{und} \quad c' = -\frac{d'c}{d}$$

folgt. Diese Werthe von b' und c' in die Gleichung (1) gesetzt, giebt:

$$\frac{x_0 - x}{a'} + \frac{y_0 - y}{-\frac{aa'}{b}} + \frac{z_0 - z}{-\frac{a'c}{d}} = 0 \quad \text{oder:}$$

$$(2.) \qquad (x_0 - x)ac - (y_0 - y)bc - (z_0 - z)ad = 0.$$

Setzt man die zu berechnenden Coordinaten des Puncts P', d. h. von P, *nach* der in der verlangten Weise geschehenen Drehung, gleich u, v, und w, so muss, da der Punct P auch *nach* der Drehung noch in der Ebene *ABC* liegt, auch folgende Gleichung Statt finden, die aus (2) hervorgeht:

$$(3.) \qquad (u - x)ac - (v - y)bc - (w - z)ad = 0.$$

In dieser Gleichung sind, ausser den Coordinaten u, v und w des Puncts P', alle Grössen durch die Aufgabe gegeben.

Zum Weiterschreiten in der vorliegenden Rechnung ist es nöthig, die Coordinaten des Durchschnittspuncts Q der Ebene *ABC* mit der gegebenen Linie *RS* zu kennen. Da der Punct Q sowohl der Ebene, als der Linie *RS* angehört, so müssen, wenn man seine Coordinaten durch x'', y'' und z'' bezeichnet, auch folgende Gleichungen Statt finden:

$$(4.) \qquad (x'' - x)ac - (y'' - y)bc - (z'' - z)ad = 0,$$

$$(5.) \qquad \frac{x''}{a} + \frac{y''}{b} = 1,$$

$$(6.) \qquad \frac{x''}{c} + \frac{z''}{d} = 1.$$

Die Gleichungen (5 und 6) geben y'' und z'' durch x'', und setzt man die gefundenen Ausdrücke in (4), so erhält man für die Coordinaten von Q:

$$(7.) \qquad x'' = \frac{(acx - bcy - adz + b^2c + d^2a)ac}{a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2};$$

$$(8.) \qquad y'' = \left(1 - \frac{x''}{a}\right)b,$$

$$(9.) \qquad z'' = \left(1 - \frac{x''}{c}\right)d.$$

Die Gleichung (3) bleibt nun auch richtig, wenn man x'', y'' und z'' statt

x, y und z setzt, da auch die letztern Coordinaten einem Puncte angehören, der in der Ebene liegt. In dieser Fassung lässt sich die Gleichung, in Verbindung mit den noch zu findenden, besser zur Berechnung der Coordinaten u, v und w benutzen. Man erhält:

$$\text{(I.)} \qquad (u-x'')ac-(v-y'')bc-(w-z'')ad=0.$$

Verbindet man den gegebenen Punct P mit dem Durchschnittspuncte Q durch eine gerade Linie, so steht dieselbe, weil sie in der Ebene ABC liegt, auf RS senkrecht und ist die senkrechte Entfernung des Puncts P von der Linie RS. Für diese Entfernung $PQ=l$ ergiebt sich, da die Coordinaten beider Puncte P und Q bekannt sind:

$$PQ^2=(x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2=l^2.$$

Nach der Drehung des Puncts P um RS ist P in die Lage P' gekommen, so dass aus gleichen Gründen die Linie $P'Q$ durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$P'Q^2=(u-x'')^2+(v-y'')^2+(w-z'')^2.$$

Da aber die Drehung des Puncts P der Aufgabe gemäss in der Art Statt finden sollte, dass seine Entfernung von RS *unverändert dieselbe* bleibe, so folgt hieraus:

$$\text{(II.)} \qquad (u-x'')^2+(v-y'')^2+(w-z'')^2=(x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2=l^2.$$

Die Seite dieser Gleichung rechts ist vollkommen *bestimmt*, da in der Aufgabe x, y und z gegeben sind und nach (7, 8 u. 9) x'', y'' und z'' sich berechnen lassen.

Um die drei unbekannten Grössen u, v und w zu finden, ist nun noch eine dritte Gleichung nöthig; die sich auf folgende Weise aufstellen lässt.

Die Gleichungen der Linie PQ seien:

$$\text{(10.)} \qquad \frac{x_0}{\alpha}+\frac{y_0}{\beta}=1 \text{ und } \frac{x_0}{\gamma}+\frac{z_0}{\delta}=1.$$

Da die Linie sowohl durch P als durch Q geht, so lassen sich die Gleichungen auch wie folgt schreiben:

$$\text{(11.)} \qquad \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1 \quad ; \quad \frac{x}{\gamma}+\frac{z}{\delta}=1 \text{ und}$$

$$\text{(12.)} \qquad \frac{x''}{\alpha}+\frac{y''}{\beta}=1 \quad ; \quad \frac{x''}{\gamma}+\frac{z''}{\delta}=1.$$

Die Gleichungen (11 und 12) von denen (10) abgezogen, giebt:

$$\text{(13.)} \qquad \frac{x_0-x}{\alpha}+\frac{y_0-y}{\beta}=0 \quad ; \quad \frac{x_0-x}{\gamma}+\frac{z_0-z}{\delta}=0$$

$$\text{(14.)} \qquad \frac{x_0-x''}{\alpha}+\frac{y_0-y''}{\beta}=0 \quad ; \quad \frac{x_0-x''}{\gamma}+\frac{z_0-z''}{\delta}=0.$$

Dividirt man mit den Gleichungen (14) in die (13), so erhält man

$$\frac{x_0 - x}{x_0 - x''} - \frac{y_0 - y}{y_0 - y''} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x_0 - x}{x_0 - x''} - \frac{z_0 - z}{z_0 - z''} = 0,$$

welche beide Gleichungen sich in folgende umformen lassen:

$$\frac{y - y''}{yx'' - xy''}\, x_0 - \frac{x - x''}{yx'' - xy''} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{z - z''}{zx'' - xz''}\, x_0 - \frac{x - x''}{zx'' - xz''}\, z_0 = 1.$$

Vergleicht man diese Gleichungen der Linie PQ mit denen (10), so folgt für die Parameter derselben:

$$\alpha = \frac{yx'' - xy''}{y - y''} \quad ; \quad \gamma = \frac{zx'' - xz''}{z - z''};$$

$$\beta = -\frac{yx'' - xy''}{x - x''} \quad ; \quad \delta = \frac{zx'' - xz''}{x - x''}.$$

In gleicher Weise ergeben sich die Gleichungen der Linie $P'Q$, d. h. der Geraden, welche den Durchschnittspunct Q der Ebene ABC und der Linie RS mit dem Puncte P', oder der Lage des Puncts P *nach* der Drehung, verbindet.

Setzt man die Gleichungen von $P'Q$:

$$\frac{x_0}{\alpha'} + \frac{y_0}{\beta'} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x_0}{\gamma'} + \frac{z_0}{\delta'} = 1,$$

so folgt mit Hülfe der bei der Gleichung der Linie PQ angedeuteten Rechnungsart für die Parameter:

$$\alpha' = \frac{vx'' - uy''}{v - y''} \quad ; \quad \gamma' = \frac{wx'' - uz''}{w - z''},$$

$$\beta' = -\frac{vx'' - uy''}{u - x''} \quad ; \quad \delta' = \frac{wx'' - uz''}{u - x''}.$$

Nach Sätzen der analytischen Geometrie findet, wenn sich zwei Linien im Raume unter dem Winkel ϱ schneiden, zwischen den Parametern ihrer Gleichungen und dem Cosinus des Winkels ϱ folgende Gleichung Statt:

$$\cos\varrho = \frac{1 + \frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'} + \frac{\delta\delta'}{\gamma\gamma'}}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^2\right)} \cdot \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right)^2 + \left(\frac{\delta'}{\gamma'}\right)^2\right)}}$$

Diese Gleichung im vorliegenden Fall angewendet, giebt, wenn man die oben für die Parameter α, β, γ, δ ; α', β', γ' und δ' gefundenen Werthe in dieselbe setzt und reducirt:

$$\cos\varrho = \frac{(u - x'')(x - x'') + (v - y'')(y - y'') + (w - z'')(z - z'')}{\sqrt{[(x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z'')^2] \cdot [(u - x'')^2 + (v - y'')^2 + (w - z'')^2]}}.$$

Da aber nach der Gleichung (II)

$$(u - x'')^2 + (v - y'')^2 + (w - z'')^2 = (x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z'')^2 = l^2$$

ist, so folgt endlich:

$$\text{(III.)}\quad (u-x'')(x-x'')+(v-y'')(y-y'')+(w-z'')(z-z'')$$
$$=[(x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2]\cos\varphi=l^2\cos\varrho.$$

Um demnach die Coordinaten u, v und w des Puncts P', der die Lage des Puncts P *nach* der Drehung andeuten soll, zu berechnen, sind nach den obigen Resultaten folgende drei Gleichungen zu benutzen:

$$\text{(I.)}\quad (u-x'')ac-(v-y'')bc-(w-z'')ad=0.$$
$$\text{(II.)}\quad (u-x'')^2+(v-y'')^2+(w-z'')^2=l^2,$$
$$\text{(III.)}\quad (u-x'')(x-x'')+(v-y'')(y-y'')+(w-z'')(z-z'')=l^2\cos\varrho;$$

wo $l^2=(x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2$ ist und die Coordinaten x'', y'' und z'' mit Hülfe der Gleichungen (6, 7 u. 8) sich berechnen lassen.

Da in der Gleichung (II) die unbekannten Grössen in der zweiten Potenz vorkommen, so ergeben sich für die zu berechnenden Coordinaten *doppelte* Werthe; was auch zu erwarten war, da die Drehung nach zwei Seiten hin Statt finden kann und die Aufgabe über die Richtung der Drehung nichts Näheres bestimmt. (Fig. 6 zeigt beide Lagen von P *nach* der Drehung in P' und P'', je nachdem die Drehung nach der einen oder andern Seite hin erfolgte.)

Bei Benutzung der letzten drei Gleichungen verfährt man am besten so, dass man mittels der Gleichungen (I und III) die Werthe von $(v-y'')$ und $(w-z'')$ durch $(u-x'')$ ausdrückt, die Ausdrücke quadrirt und sie in die Gleichung (II) zur Bestimmung von u setzt u. s. w.

Bei der Anwendung vorliegender Gleichungen zur Auflösung der Aufgabe (II) vereinfachen sich die Formeln sehr; theils dadurch, wenn P in einer Coordinaten-Axe liegt, also zwei seiner Coordinaten gleich Null sind, theils dadurch, wenn die Drehungs-Axe durch den Anfangspunct der Coordinaten geht und deren Gleichungen daher eine viel einfachere Form annehmen.

Chemnitz, im November 1852.

7.

Summen von Reihen, ausgedrückt durch bestimmte Integrale. Anwendungen dieser Sätze.

(Von Herrn Dr. *Dienger*, Professor der Mathematik an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe im Badischen.)

So lange die Reihe

$$\varphi(0)+\frac{x\varphi'(0)}{1}+\frac{x^2\varphi''(0)}{1.2}+\frac{x^3\varphi'''(0)}{1.2.3}+\dots\dots\dots$$

convergirt, ist

$$\varphi(0)+\frac{x\varphi'(0)}{1}+\frac{x^2\varphi''(0)}{1.2}+\dots\dots\dots=\varphi(x),$$

und zwar, wenn $\varphi(z)$ endlich ist, für *alle* Werthe von z, von $z=0$ bis $z=x$. Diess ist die bekannte *Maclaurin*'sche Formel. Von diesem Satze sind die folgenden Entwicklungen Anwendungen.

§. 1.

Es ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\varphi(2kx)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\left[\varphi(0)+\frac{2kx\varphi'(0)}{1}+\frac{(2kx)^2\varphi''(0)}{1.2}+\dots\dots\dots\right]dx;$$

vorausgesetzt, dass $\varphi(z)$ endlich sei für alle möglichen reellen Werthe von z und dass die Reihe

$$\varphi(0)+\frac{2kx\varphi'(0)}{1}+\frac{(2kx)^2\varphi''(0)}{1.2}+\dots\dots\dots$$

convergire, für alle möglichen reellen Werthe von x.

Nun ist bekanntlich

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}x^{2r+1}\,dx=0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}x^{2r}\,dx=\frac{(2r-1)(2r-3)\dots\dots 1}{2^r}\sqrt{\pi}.$$

Substituirt man Diess, so ergiebt sich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\varphi(2kx)\,dx = \sqrt{\pi}\left[\varphi(0)+\frac{(2k)^2\varphi''(0)}{1.2}\cdot\frac{1}{2}+\ldots\ldots+\frac{(2k)^{2r}\varphi^{(2r)}(0)}{1.2\ldots 2r}\cdot\frac{(2r-1)(2r-3)\ldots 1}{2^r}+\ldots\right]$$

$$= \sqrt{\pi}\left[\varphi(0)+\frac{k^2\varphi''(0)}{1}+\ldots\ldots\ldots+\frac{k^{2r}\varphi^{(2r)}(0)}{1.2\ldots r}+\ldots\ldots\ldots\ldots\right].$$

Dadurch erhält man folgenden Lehrsatz:

Ist $\varphi(2kx)$ und $e^{-x^2}\varphi(2kx)$ für alle reellen Werthe von x endlich, und für dieselben Werthe die Reihe

$$\varphi(0)+\frac{2kx\varphi'(0)}{1}+\frac{(2kx)^2\varphi''(0)}{1.2}+\frac{(2kx)^3\varphi'''(0)}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots \text{ in inf.}$$

convergent, so ist

$$(1.)\ \varphi(0)+\frac{k^2\varphi''(0)}{1}+\frac{k^4\varphi^{(4)}(0)}{1.2}+\ldots\ldots+\frac{k^{2r}\varphi^{(2r)}(0)}{1.2\ldots r}+\ldots\ldots \text{ in inf.} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\varphi(2kx)\,dx.$$

Hieraus folgt weiter unmittelbar:

$$(2.)\ \varphi(0)+\frac{k\varphi''(0)}{1}+\frac{k^2\varphi^{(4)}(0)}{1.2}+\ldots\ldots+\frac{k^r\varphi^{(2r)}(0)}{1.2\ldots r}+\ldots\ldots \text{in inf.} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\varphi(2x\sqrt{k})\,dx,$$

wenn man in die obigen Bedingungen $\sqrt{k}$ statt k setzt

Man setze $\varphi(y)=\psi(z+y)$, so erhält man:

Ist $\psi(z+2xk)$ sowohl, als $e^{-x^2}\psi(z+2xk)$ endlich für alle reellen Werthe x und ist für dieselben Werthe die Reihe

$$\psi(z)+\frac{2kx\psi'(z)}{1}+\frac{(2kx)^2\psi''(z)}{1.2}+\ldots\ldots\ldots \text{ in inf.}$$

convergent, so ist

$$(3.)\ \psi(z)+\frac{k^2\psi''(z)}{1}+\frac{k^4\psi^{(4)}(z)}{1.2}+\ldots\ldots+\frac{k^{2r}\psi^{(2r)}(z)}{1.2\ldots r}+\ldots\ldots = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\psi(z+2xk)\,dx;$$

welches die, bekanntlich von *Laplace* gefundene Formel ist.

Aus der Formel (1) folgt unter denselben Bedingungen:

$$(4.)\ \varphi(0)\frac{k}{1}+\frac{\varphi''(0)}{1}\cdot\frac{k^3}{3}+\frac{\varphi^{(4)}(0)}{1.2}\cdot\frac{k^5}{5}+\ldots\ldots+\frac{\varphi^{(2r)}(0)}{1.2\ldots r}\cdot\frac{k^{2r+1}}{2r+1}+\ldots = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\int_0^k \varphi(2xk)\,dk\,.\,dx,$$

und

$$(5.)\ \varphi(0)+\frac{1}{3}\cdot\frac{\varphi''(0)}{1}+\frac{1}{5}\cdot\frac{\varphi^{(4)}(0)}{1.2}+\ldots\ldots+\frac{1}{2r+1}\cdot\frac{\varphi^{(2r)}(0)}{1.2\ldots r}+\ldots = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\int_0^1 \varphi(2xy)\,dy\,.\,dx,$$

wenn $\varphi(z)$ für alle reellen Werthe von x endlich ist und die Reihe

$$\varphi(0)+\frac{\varphi'(0).2x}{1}+\frac{\varphi''(0).(2x)^2}{1.2}+\ldots\ldots\ldots \text{ in inf.}$$

für dieselben Werthe von x convergirt.

Aus (2) folgt

$$(6.)\ \varphi(0)k+\frac{\varphi''(0).k^2}{1.2}+\frac{\varphi^{(4)}(0).k^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{\varphi^{(2r)}(0).k^{r+1}}{1.2\ldots(r+1)}+\ldots=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\int_0^k\varphi(2x\sqrt{k})\,dk.dx$$

und

$$(7.)\ \frac{\varphi(0)}{1}+\frac{\varphi''(0)}{1.2}+\frac{\varphi^{(4)}(0)}{1.2.3}+\ldots+\frac{\varphi^{(2r)}(0)}{1.2\ldots(r+1)}+\ldots=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\int_0^1\varphi(2x\sqrt{y})\,dy.dx$$

wenn, für alle reellen Werthe von x,

$$\varphi(0)+\frac{2x\varphi'(0)}{1}+\frac{(2x)^2\varphi''(0)}{1\cdot2}+\ldots\ldots \text{ in inf.}$$

convergirt und $\varphi(x)$ endlich ist.

§. 2.

Es sei die Reihe

$$\varphi(0)+2kx\varphi'(0)+\frac{(2kx)^2\varphi''(0)}{1\cdot2}+\ldots\ldots \text{ in inf.}$$

für alle reellen Werthe von x convergent, und die Grössen

$$\varphi(2kx)\int e^{-x^2}\varphi(2kx).x$$

seien für dieselben Werthe von x endlich, so ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\varphi(2kx).x\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\Big[\varphi(0).x+\frac{2k\varphi'(0)}{1}x^2+\frac{(2k)^2\varphi''(0)}{1\cdot2}x^3+\ldots\ldots\Big]dx\,.$$

Benutzt man die Formeln in (§. 1), so ergiebt sich hieraus

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\varphi(2kx).x\,dx=\sqrt{\pi}\Big[\frac{2k\varphi'(0)}{1}\frac{1}{2}+\frac{(2k)^3\varphi'''(0)}{1\cdot2\cdot3}\frac{3\cdot1}{2^3}+\ldots+\frac{(2k)^{2r+1}\varphi^{(2r+1)}(0)}{1\cdot2\ldots\ldots}\frac{(2r+1)\ldots1}{(2r+1)2^{r+1}}+\ldots\Big]$$

$$=\sqrt{\pi}\Big[k\varphi'(0)+\frac{k^3\varphi'''(0)}{1}+\ldots\ldots+\frac{k^{2r+1}\varphi^{(2r+1)}(0)}{1\cdot2\ldots\ldots r}+\ldots\ldots\Big].$$

Unter den obigen Voraussetzungen ist also

$$(8.)\ k\varphi'(0)+\frac{k^3\varphi'''(0)}{1}+\frac{k^5\varphi^5(0)}{1\cdot2}+\ldots+\frac{k^{2r+1}\varphi^{(2r+1)}(0)}{1\cdot2\ldots\ldots r}+\ldots=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\varphi(2kx).x\,dx$$

$$(9.)\ \varphi'(0)+\frac{k^2\varphi^{(3)}(0)}{1}+\frac{k^4\varphi^{(5)}(0)}{1\cdot2}+\ldots+\frac{k^{2r}\varphi^{(2r-1)}(0)}{1\cdot2\ldots\ldots r}+\ldots=\frac{1}{k\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\varphi(2kx).x\,dx;$$

woraus

$$(10.)\ \varphi'(0)+\frac{k\varphi^{(3)}(0)}{1}+\frac{k^2\varphi^{(5)}(0)}{1\cdot2}+\ldots+\frac{k^r\varphi^{(2r+1)}(0)}{1\cdot2\ldots r}+\ldots=\frac{1}{\sqrt{k\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\varphi(2x\sqrt{k}).x\,dx$$

folgt. Aus (9) und (10) ergiebt sich

$$(11.)\ \varphi'(0)k+\frac{\varphi^{(3)}(0)}{3}\frac{k^3}{1}+\frac{\varphi^{(5)}(0)}{5}\frac{k^5}{1\cdot2}+\ldots+\frac{\varphi^{(2r+1)}(0)}{2r+1}\frac{k^{2r+1}}{1\cdot2\ldots r}+\ldots=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}x\int_0^k\frac{\varphi(2xy)}{y}\,dy\,dx$$

wenn das Integral in (11) endlich ist und die übrigen Bedingungen erfüllt werden. Für $k = 1$ erhält man einen der Formel (7) analogen Satz.

Unter eben den Bedingungen erhält man aus (10):

$$(12.)\ \varphi'(0)\frac{k}{1}+\varphi^{(3)}(0).\frac{k^2}{1.2}+\varphi^{(5)}(0).\frac{k^3}{1.2.3}+\ldots+\varphi^{(2r+1)}(0).\frac{k^{r+1}}{1.2\ldots(r+1)}+\ldots=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}x\int_0^k\frac{\varphi(2x\sqrt{y})}{\sqrt{y}}dy\,dx;$$

woraus für $k = 1$ wieder ein einfacher Satz folgt.

Ist die Reihe

$$\psi(z)+2kx\,\psi'(z)+(2kx)^2\frac{\psi''(z)}{1.2}+\ldots\ldots\ \text{in inf.}$$

convergent und $\psi(z+2kx)$, $e^{-x^2}x\psi(z+2kx)$ für alle reellen Werthe von x endlich, so folgt aus (8):

$$(13.)\ k\psi'(z)+\frac{k^2\psi^{(3)}(z)}{1}+\ldots\ldots+\frac{k^{2r+1}\psi^{(2r+1)}(z)}{1.2\ldots\ldots r}+\ldots\ldots=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}x\psi(z+2kx)\,dx\,.$$

§. 3.

Es sei die Reihe

$$\varphi(0)+\frac{kx\varphi'(0)}{1}+\frac{(kx)^2\varphi''(0)}{1.2}+\ldots\ldots\ldots\ \text{in inf.}$$

für alle reellen Werthe von x convergent und die Grössen $\varphi(kx)$, $\frac{e^{-x}\varphi(kx)}{\sqrt{x}}$ seien endlich, so ist

$$\int_0^\infty\frac{e^{-x}\varphi(kx)}{\sqrt{x}}dx=\int_0^\infty\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\left[\varphi(0)+\frac{k\varphi'(0)}{1}x+\frac{k^2\varphi''(0)}{1.2}x^2+\ldots\ldots\ldots\right]dx$$

Nun ist

$$\int_0^\infty\frac{x^r e^{-x}}{\sqrt{x}}dx=\frac{1.3\ldots\ldots(2r-1)}{2^r}\sqrt{\pi}\,,$$

also

$$\int_0^\infty\frac{e^{-x}\varphi(kx)}{\sqrt{x}}dx=\pi\left[\varphi(0)+\frac{k\varphi'(0)}{2}+k^2\varphi''(0).\frac{1.3}{2.4}+\ldots\ldots+k^r\varphi^{(r)}(0)\frac{1.3\ldots\ldots(2r-1)}{2.4\ldots\ldots2r}+\ldots\right].$$

Unter den obigen Bedingungen ist demnach

$$(14.)\ \varphi(0)+k\varphi'(0)\frac{1}{2}+k^2\varphi''(0).\frac{1.3}{2.4}+\ldots+k^r\varphi^{(r)}(0)\frac{1.3\ldots(2r-1)}{2.4\ldots\ldots2r}+\ldots=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{e^{-x}\varphi(kx)}{\sqrt{x}}dx.$$

Durch Integration nach k erhält man hieraus leicht neue Formeln für $k = 1$, unter Bedingungen, die nach dem Vorstehenden leicht auszusprechen sind: z. B.

$$(15.)\ \varphi(0)+\varphi'(0).\frac{1}{2}+\varphi''(0).\frac{1.3}{2.4}+\ldots\ \varphi^{(r)}(0).\frac{1.3\ldots(2r-1)}{2.4\ldots\ldots2r}+\ldots\ldots=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{e^{-x}\varphi(x)}{\sqrt{x}}dx.$$

Ist für alle reellen positiven Werthe von x die Reihe

$$\psi(z) + kx\frac{\psi'(z)}{1} + \frac{(kx)^2\psi''(z)}{1\cdot 2} + \ldots\ldots\ldots \text{ in inf.}$$

convergent, und sind $\psi(z+kx)$, $\psi(z+kx)\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ endlich, so ergiebt sich aus (14):

$$(16.)\ \psi(z)+k\psi'(z).\frac{1}{2}+k^2\psi''(z)\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\ldots+k^r\psi^{(r)}(z)\frac{1\cdot 3\ldots\ldots(2r-1)}{2\cdot 4\ldots\ldots 2r}+\ldots = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-x}\psi(z+kx)}{\sqrt{x}}dx.$$

§. 4.

Wenn für alle reellen positiven Werthe von x die Reihe

$$\varphi(0) + \frac{kx\varphi'(0)}{1} + \frac{(kx)^2\varphi''(0)}{1\cdot 2} + \ldots\ldots\ldots \text{ in inf.}$$

convergent ist, und $e^{-x}\varphi(kx)$, $\varphi(kx)$ sind endlich (die erste Grösse ist es, wenn es die letzte ist), so ist:

$$\int_0^\infty e^{-x}\varphi(kx)dx = \int_0^\infty e^{-x}\left[\varphi(0) + \frac{k\varphi'(0)}{1}x + \frac{k^2\varphi''(0)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots\ldots\ldots\right]dx.$$

Nun ist

$$\int_0^\infty e^{-x}x^r dx = 1.2.3\ldots\ldots\ldots r,$$

also:

$$\int_0^\infty e^{-x}\varphi(kx)dx = \varphi(0) + k\varphi'(0)\frac{1}{1} + k^2\varphi''(0).\frac{1.2}{1.2} + \ldots. + k^r\varphi^{(r)}(0).\frac{1.2\ldots r}{1.2\ldots r} + \ldots$$

Demnach erhält man unter den obigen Voraussetzungen:

$$(17.)\quad \varphi(0) + k\varphi'(0) + \ldots\ldots + k^r\varphi^{(r)}(0) + \ldots\ldots = \int_0^\infty e^{-x}\varphi(kx)\,dx,$$

woraus

$$(18.)\quad \varphi(0)+\varphi'(0)+\varphi''(0)+\ldots\ldots+\varphi^{(r)}(0)+\ldots\ldots = \int_0^\infty e^{-x}\varphi(x)\,dx,$$

folgt, wenn für alle positiven reellen Werthe von x die Reihe

$$\varphi(0) + \frac{x}{1}\varphi'(0) + \frac{x^2}{1.2}\varphi''(0) + \ldots\ldots\ldots$$

convergirt und $\varphi(x)$ endlich ist. Integrirt man die Formel (17) nach k, so ergiebt sich daraus ein neuer Ausdruck.

Ist für alle reellen positiven Werthe von x die Reihe

$$\psi(z) + \frac{kx\psi'(z)}{1} + \frac{k^2x^2\psi''(z)}{1.2} + \ldots\ldots\ldots$$

convergent und $\psi(z+kx)$ endlich, so folgt aus (17):

(19.) $\psi(z)+k\psi'(z)+k^2\psi''(z)+\ldots\ldots+k^r\psi^{(r)}(z)+\ldots\ldots=\int_0^\infty e^{-x}\psi(z+kx)dx,$
und für $k=1$:
(20.) $\psi(z)+\psi'(z)+\psi''(z)+\ldots\ldots\ldots+\psi^{(r)}(z)+\ldots\ldots=\int_0^\infty e^{-x}\psi(z+x)\,dx.$

§. 5.

Wenn für alle reellen positiven Werthe von x, von 0 bis 1 (eigentlich $1-\varepsilon$, wenn ε eine unendlich kleine Grösse ist) die Reihe

$$\varphi(0)+\frac{(2kx)^2\varphi''(0)}{1.2}+\frac{(2kx)^4\varphi^{(4)}(0)}{1.2.3.4}+\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ in inf.}$$

convergent ist, $\varphi(2kx)$ und $\frac{\varphi(2kx)}{\sqrt{(1-x^2)}}$ endlich sind und

$$\varphi'(0)=0 \quad , \quad \varphi^{(3)}(0)=0 \quad , \quad \varphi^{(5)}(0)=0, \text{ u. s. f.},$$

ist, so ist:

$$\int_0^1\frac{\varphi(2kx)}{\sqrt{(1-x^2)}}dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\Big[\varphi(0)+\frac{(2k)^2\varphi''(0)}{1.2}x^2+\ldots\ldots+\frac{(2k)^{2r}\varphi^{(2r)}(0)}{1.2\ldots2r}x^{2r}+\ldots\ldots\Big]dx.$$

Nun ist

$$\int_0^1\frac{x^{2r}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{1.3.5\ldots\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots\ldots\;2r}\cdot\tfrac{1}{2}\pi,$$

also

$$\int_0^1\frac{\varphi(2kx)}{\sqrt{(1-x^2)}}dx=\tfrac{1}{2}\pi\Big[\varphi(0)+\Big[\frac{(2k)^2\varphi''(0)}{1.2}\cdot\frac{1}{2}+\ldots\ldots+\frac{(2k)^{2r}\varphi^{(2r)}(0)}{1.2\ldots\ldots2r}\cdot\frac{1.3\ldots(2r-1)}{2.4\ldots\ldots\;2r}+\ldots\Big]$$

$$=\tfrac{1}{2}\pi\Big[\varphi(0)+\frac{k^2\varphi(0)}{1^2}+\ldots\ldots+\frac{k^{2r}\varphi^{(2r)}(0)}{1^2.2^2.3^2\ldots\ldots r^2}+\ldots\ldots\Big].$$

Demnach ergiebt sich unter den obigen Bedingungen:

(21.) $\varphi(0)+\frac{k^2\varphi''(0)}{1^2}+\frac{k^4\varphi^{(4)}(0)}{1^2.2^2}+\ldots\ldots+\frac{k^{2r}\varphi^{(2r)}(0)}{1^2.2^2\ldots\ldots r^2}+\ldots\ldots=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi(2kx)}{\sqrt{(1-x^2)}}dx.$

Durch Integration nach k lässt sich daraus leicht eine neue Gleichung bilden.

Ist ferner für alle reellen Werthe von x, von 0 bis mit $1-\varepsilon$, die Reihe

$$\psi(z)+\frac{(2kx)^2\psi''(z)}{1.2}+\frac{(2kx)^4\psi^{(4)}(z)}{1.2.3.4}+\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ in inf.}$$

convergent, sind $\psi(z+2kx)$ und $\frac{\psi(z+2kx)}{\sqrt{(1-x^2)}}$ endlich, und ist

$$\psi'(z) = 0 \quad , \quad \psi^{(3)}(z) = 0 \quad , \quad \psi^{(5)}(z) = 0 , \; \dots\dots\dots$$

so ist

$$(22.) \quad \psi(z) + \frac{k^2\psi''(z)}{1^2} + \dots\dots + \frac{k^{2r}\psi^{(2r)}(z)}{1^2.2^2\dots r^2} + \dots\dots = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\psi(z+2kx)}{\sqrt{(1-x^2)}}\,dx.$$

§. 6.

Setzt man voraus, dass

$$\varphi(0) = 0 \quad , \quad \varphi''(0) = 0 \quad , \quad \varphi^{(4)}(0) = 0 \quad \text{u. s. f.}$$

sei, und dass für alle reellen Werthe von x, von 0 bis $1-\varepsilon$, die Reihe

$$\frac{kx\varphi'(0)}{1} + \frac{(kx)^3\varphi^{(3)}(0)}{1.2.3} + \frac{(kx)^5\varphi^{(5)}(0)}{1.2\dots.5} + \dots\dots\dots \text{ in inf.}$$

convergire und $\varphi(kx)$, $\frac{\varphi(kx)}{\sqrt{(1-x^2)}}$ endlich seien, so ist:

$$\int_0^1 \frac{\varphi(kx)}{\sqrt{(1-x^2)}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\left[\frac{k\varphi'(0)}{1}x + \frac{k^3\varphi^{(3)}(0)}{1.2.3}x^3 + \dots + \frac{k^{2r+1}\varphi^{(2r+1)}(0)}{1.2\dots(2r+1)}x^{2r+1} + \dots\right]dx.$$

Es ist aber

$$\int_0^1 \frac{x^{2r+1}}{\sqrt{(1-x^2)}}\,dx = \frac{2.4.6\dots\dots\dots 2r}{3.5.7\;\dots\dots(2r+1)},$$

also ist

$$\int_0^1 \frac{\varphi(kx)}{\sqrt{(1-x^2)}}\,dx = \frac{k\varphi'(0)}{1} + \frac{k^3\varphi^{(3)}(0)}{1.2.3}\cdot\frac{2}{3} + \dots\dots + \frac{k^{2r+1}\varphi^{(2r+1)}(0)}{1.2\dots(2r+1)}\cdot\frac{2.4\;\dots\dots\;2r}{3.5\dots\dots(2r+1)} + \dots\dots$$

$$= k\varphi'(0) + \frac{k^3\varphi^{(3)}(0)}{3^2} + \dots\dots + \frac{k^{2r+1}\varphi^{(2r+1)}(0)}{3^2.5^2\dots\dots(2r+1)^2} + \dots\dots\dots;$$

folglich unter den obigen Bedingungen:

$$(23.) \quad k\varphi'(0) + \frac{k^3\varphi^{(3)}(0)}{3^2} + \frac{k^5\varphi^{(5)}(0)}{3^2.5^2} + \dots + \frac{k^{2r+1}\varphi^{(2r+1)}(0)}{3^2.5^2\dots\dots(2r+1)^2} + \dots\dots = \int_0^1 \frac{\varphi(kx)}{\sqrt{(1-x^2)}}\,dx.$$

Ist $\psi(z) = 0$, $\psi''(z) = 0$, $\psi^{(4)}(z) = 0$, ... und für alle reellen Werthe von x, von 0 bis $1-\varepsilon$, die Reihe

$$\frac{\psi'(z)\,kx}{1} + \frac{\psi^{(3)}(z)(kx)^3}{1.2.3} + \dots\dots\dots$$

convergent, und sind $\psi(z+kx)$ und $\frac{\psi(z+kx)}{\sqrt{(1-x^2)}}$ endlich, so ist:

$$(24) \quad k\psi'(z) + \frac{k^3\psi^{(3)}(z)}{3^2} + \frac{k^5\psi^{(5)}(z)}{3^2.5^2} + \dots\dots + \frac{k^{(2r+1)}\psi^{(2r+1)}(0)}{3^2.5^2\dots(2r+1)^2} + \dots\dots = \int_0^1 \frac{\psi(z+kx)}{\sqrt{(1-x^2)}}\,dx.$$

§. 7.

Ist $\varphi'(0)$, $\varphi^{(3)}(0)$, $\varphi^{(5)}(0)$, ... Null, während für alle reellen Werthe von x, von 0 bis $1-\varepsilon$, die Reihe

$$\varphi(0)+\frac{(2kx)^2\varphi''(0)}{1.2}+\frac{(2kx)^4\varphi^{(4)}(0)}{1.2.3.4}+\ldots\ldots\ldots \text{ in inf.}$$

convergent ist und $\varphi(2kx)$ (und auch $\sqrt{(1-x^2)}\varphi(2kx)$) endlich sind, so ist:

$$\int_0^1\varphi(2kx)\sqrt{(1-x^2)}dx=\int_0^1\sqrt{(1-x^2)}\Big[\varphi(0)+\frac{(2k)^2\varphi''(0)}{1.2}x^2+\frac{(2k)^4\varphi^{(4)}(0)}{1.4}x^4+\ldots..\Big]dx.$$

Aber

$$\int_0^1 x^{2r}\sqrt{(1-x^2)}\,dx=\frac{1.3.5\ldots..(2r-1)}{4.6.8\ldots..(2r+2)}\cdot\tfrac{1}{4}\pi,$$

also

$$\int_0^1\varphi(2kx)\sqrt{(1-x^2)}dx=\tfrac{1}{4}\pi\Big[\varphi(0)+\frac{(2k)^2\varphi''(0)}{1.2}\cdot\frac{1}{4}+\ldots..+\frac{(2k)^{2r}.\varphi^{(2r)}(0)}{1.2\ldots..2r}\cdot\frac{1.3\ldots(2r-1)}{4.6\ldots(2r+2)}+\ldots..\Big]$$

$$=\tfrac{1}{4}\pi\Big[\varphi(0)+\frac{k^2\varphi''(0)}{1.2}+\ldots..+\frac{1}{r+1}\cdot\frac{k^{2r}\varphi^{(2r)}(0)}{1^2.2^2\ldots r^2}+\ldots\ldots\ldots\Big].$$

Folglich erhält man unter den obigen Bedingungen:

$$(25.)\quad \varphi(0)+\frac{1}{2}\cdot\frac{k^2\varphi''(0)}{1^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{k^4\varphi^4(0)}{1^2.2^2}+\ldots+\frac{1}{r+1}\cdot\frac{k^{2r}\varphi^{(2r)}(0)}{1^2.2^2\ldots r^2}+\ldots..=\frac{4}{\pi}\int_0^1\varphi(2kx)\sqrt{(1-x^2)}dx.$$

Daraus folgt leicht

$$(26.)\quad \psi(z)+\frac{1}{2}\cdot\frac{k^2\psi''(z)}{1^2}+\ldots..+\frac{1}{r+1}\cdot\frac{k^{2r}\psi^{(2r)}(z)}{(1.2\ldots r)^2}+\ldots..=\frac{4}{\pi}\int_0^1\psi(z+2kx)\sqrt{(1-x^2)}dx;$$

wenn $\psi'(z)=0$. $\psi^{(3)}(z)=0$, $\psi^{(4)}(z)=0$, und ferner von $x=0$ bis $x=1-\varepsilon$ die Reihe

$$\psi(z)+\frac{(2kx)^2\psi''(z)}{1.2}+\frac{(2kx)^4\psi^{(4)}(z)}{1\ldots..4}+\ldots\ldots\ldots$$

convergent und $\psi(z+2kx)$ endlich ist.

§. 8.

Es sei $\varphi(0)=0$, $\varphi^{(2)}(0)=0$, $\varphi^{(4)}(0)=0$, ... , von $x=0$ bis $x=1-\varepsilon$, die Reihe

$$\frac{kx\varphi'(0)}{1}+\frac{(kx)^3\varphi^{(3)}(0)}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots$$

convergent und $\varphi(kx)$ endlich, so findet sich auf gleiche Weise, wie in (§. 7), wenn man erwägt, dass

$$\int_0^1 x^{2r+1}\sqrt{(1-x^2)}\,dx = \frac{2.4.6\ldots\ldots 2r}{3.5.7\ldots\ldots(2r+3)},$$

ist:

$$(27.)\ \frac{1}{3}\cdot\frac{k\varphi'(0)}{1^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{k^3\varphi^{(3)}(0)}{1^2.3^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{2r+3}\cdot\frac{k^{2r+1}\varphi^{(2r+1)}(0)}{3^2.5^2\ldots(2r+1)^2}+\ldots=\int_0^1\varphi(kx)\sqrt{(1-x^2)}dx.$$

Hieraus folgt

$$(28.)\ \frac{1}{3}\cdot\frac{k\psi'(z)}{1^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{k^3\psi^{(3)}(z)}{1^2.3^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{2r+3}\cdot\frac{k^{2r+1}\psi^{(2r+1)}(z)}{3^2.5^2\ldots(2r+1)^2}+\ldots=\int_0^1\psi(z+kx)\sqrt{(1-x^2)}dx$$

wenn $\psi(z)=0$, $\psi^{(2)}(z)=0$, $\psi^{(4)}(z)=0$, ... und von $x=0$ bis $x=1-\varepsilon$ die Reihe

$$\frac{kx\psi'(z)}{1}+\frac{(kx)^3\psi^{(3)}(z)}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

convergent und $\psi(z+kx)$ endlich ist.

Durch Integration nach k ergeben sich aus allen diesen Formeln neue Ausdrücke.

§. 9.

Ist von $x=0$ bis $x=1-\varepsilon$ die Reihe

$$\varphi(0)+\frac{kx\varphi'(0)}{1}+\frac{(kx)^2\varphi''(0)}{1.2}+\ldots\ldots\ldots$$

convergent und $\varphi(kx)$, $\varphi(kx)\log x$ endlich, so ist

$$\int_0^1\varphi(kx)\log x\,dx=\int_0^1\log x\left[\varphi(0)+\frac{k\varphi'(0)}{1}x+\frac{k^2\varphi''(0)}{1.2}x^2+\ldots\ldots\right]dx.$$

Aber

$$\int_0^1 x^r\log x.dx=-\frac{1}{(r+1)^2};$$

woraus sich unter den obigen Bedingungen:

$$(29.)\ \varphi(0)+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{\varphi'(0)}{1}\cdot k+\frac{1}{3^2}\cdot\frac{\varphi''(0)}{1.2}\cdot k^2+\ldots\ldots+\frac{1}{(r+1)^2}\cdot\frac{\varphi^{(r)}(0)}{1.2..r}\cdot k^r+..=-\int_0^1\varphi(kx)\log x.dx.$$

ergiebt. Vorausgesetzt, dass die zweite Seite dieser Gleichung endlich sei, gilt diese Formel auch noch, wenn $\varphi(kx).\log x$ nicht endlich ist, für $x=0$.

Ist von $x=0$ bis $1-\varepsilon$ die Reihe

$$\psi(z)+\frac{kx\psi'(z)}{1}+\frac{(kx)^2\psi''(z)}{1.2}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

convergent und $\psi(z+kx)$, $\psi(z+kx)\log x$ endlich, so ist:

$$(30.)\ \psi(z)+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{\psi'(z)}{1}\cdot k+\frac{1}{3^2}\cdot\frac{\psi''(z)}{1.2}\cdot k^2+\dots+\frac{1}{(r+1)^2}\cdot\frac{\psi^{(r)}(z)}{1.2\dots r}k^r+\dots=-\int_0^1\psi(z+kx)\log x.dx.$$

§. 10.

Setzt man voraus, dass für alle reellen positiven Werthe von x die Reihe

$$\varphi(0)+\frac{kx\varphi'(0)}{1}+\frac{(kx)^2\varphi''(0)}{1.2}+\frac{(kx)^3\varphi^{(3)}(0)}{1.2.3}+\dots\dots\dots$$

convergent und $e^{-x}\varphi(kx)\sqrt{x}$, so wie $\varphi(kx)$ endlich sei, und erwägt, dass

$$\int_0^\infty e^{-x}x^r\sqrt{(x\,dx)}=\int_0^\infty\frac{e^{-x}x^{r+1}}{\sqrt{x}}dx=\frac{(2r+1)(2r-1)\dots\dots 3.1}{2^{r+1}}\sqrt{\pi},$$

ist, so erhält man, auf die zur Genüge bezeichnete Weise:

$$(31.)\ \varphi(0)+k\varphi'(0)\frac{3}{2}+k\varphi''(0).\frac{3\cdot5}{2\cdot4}+\dots+k^r\varphi^{(r)}(0).\frac{3\cdot5\dots(2r+1)}{2\cdot4\dots\dots 2r}+\dots=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x}\varphi(kx).\sqrt{x}.dx$$

woraus

$$(32.)\ \psi(z)+k\psi'(z).\frac{3}{2}+k^2\psi''(z).\frac{3\cdot5}{2\cdot4}+\dots+k^r\psi^{(r)}(z).\frac{3\cdot5\dots(2r+1)}{2\cdot4\dots\dots 2r}+\dots=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x}\psi(z+kx).\sqrt{x}.dx$$

folgt, wenn die Reihe

$$\psi(z)+\frac{kx\psi'(z)}{1}+\frac{(kx)^2\psi''(z)}{1\cdot2}+\dots\dots$$

für alle reellen positiven Werthe von x convergent ist und $e^{-x}\psi(z+kx)\sqrt{x}$, $\psi(z+kx)$ für dieselben Werthe endlich sind.

§. 11.

Die obigen Resultate würden sich leicht noch vervielfältigen lassen; es mögen aber die vorstehenden genügen. Hinsichtlich der Gültigkeit der Formeln (1) bis (32) ist indessen Folgendes zu bemerken.

Zunächst sind sie nur gültig unter den jedesmal am Anfange der Paragraphen ausgesprochenen Bedingungen; und dann auch nur, wenn die vorkommende unendliche Reihe convergent ist.

Denn es sei

$$Z_0+Z_1+Z_2+\dots\dots\dots\dots\dots+Z_r+\dots\dots$$

eine unendliche convergente Reihe, deren Summe $= Z$ ist, so ist die Summe

$$\int_a^b Z_0\,dz+\int_a^b Z_1\,dz+\int_a^b Z_2\,dz+\dots\dots+\int_a^b Z_r\,dz+\dots\dots\dots$$

$$=\int_a^b(Z_0+Z_1+Z_2+\dots\dots+Z_r+\dots\dots)dz=\int_a^b Z\,dz$$

offenbar nur insofern convergent als es

$$\int_a^b Z_0 dz + \int_a^b Z_1 dz + \int_a^b Z_2 dz + \ldots + \int_a^b Z_r dz + \ldots +$$

ist. Denn wäre diese letztere Reihe nicht convergent, so könnte von ihrer Summe nicht die Rede sein; ist sie dagegen convergent, so folgt daraus, dass

$$\int_a^b Z_0 dz + \int_a^b Z_1 dz + \ldots + \int_a^b Z_n dz = \int_a^b (Z_0 + Z_1 + \ldots + Z_n) dz,$$

für jedes endliche n gilt; auch dass

$$\int_a^b Z_0 dz + \int_a^b Z_1 dz + \ldots \text{ in inf.} = \int_a^b (Z_0 + Z_1 + \ldots \text{ in inf.}) dz = \int_a^b Z dz$$

sein muss. Umgekehrt also ist nur insofern

$$\int_a^b Z dz = \int_a^b Z_0 dz + \int_a^b Z_1 dz + \ldots + \int_a^b Z_n dz + \ldots \text{ in inf.}$$

als die Reihen:

$$Z_0 + Z_1 + Z_2 + \ldots \text{ in inf.}$$

$$\int_a^b Z_0 dz + \int_a^b Z_1 dz + \int_a^b Z_2 dz + \ldots \text{ in inf.}$$

convergent sind.

Ferner ist jedesmal vorausgesetzt, dass die in den Formeln (1 bis 32) vorkommende Grösse unter dem Integralzeichen endlich sei, im ganzen Umfange der Integration. Diese Voraussetzung ist unerlässlich, wenn das bestimmte Integral Geltung haben soll. Jedoch ist sie für die untere Gränze selbst nicht unbedingt unerlässlich. Ist nämlich das bestimmte Integral endlich, so kann die Grösse unter dem Integralzeichen für die untere Gränze selbst, möglicher Weise nicht endlich sein, ohne dass die Gleichung aufhörte, gültig zu sein.

Im Folgenden sollen nun einige Anwendungen der Resultate gemacht werden.

§. 12.

Man setze in (7) $\varphi(x) = \cos x$, so ist

$$\varphi(0) = 1 \quad , \quad \varphi''(0) = -1 \quad , \quad \varphi^{(4)}(0) = 1 \, , \ldots \varphi^{(2r)}(0) = (-1)^r,$$

also

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \int_0^1 \cos(2x\sqrt{y}) \, dy \, dx \, ,$$

weil diese Reihe convergirt und bekanntlich $= -(e^{-1} - 1) = \frac{e-1}{e}$ ist.

Setzt man $y = z$, so erhält man

$$\int_0^1 \cos(2x\sqrt{y})\,dy = 2\int_0^1 z\cos(2xz)\,dz\,.$$

Es ist aber $\int z\cos(2xz)\,dz = \frac{z\sin(2xz)}{2x} - \int \frac{\sin(2xz)}{2x}dz$

$$= \frac{z\sin(2xz)}{2x} + \frac{\cos(2xz)}{4x^2}$$

$$\int_0^1 z\cos(2xz)\,dz = \frac{\sin(2x)}{2x} + \frac{\cos 2x}{4x^2} - \frac{1}{4x^2}$$

$$\int_0^1 \cos(2x\sqrt{y})\,dy = \frac{\sin(2x)}{x} + \frac{\cos 2x}{2x^2} - \frac{1}{2x^2}\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\int_0^1 \cos(2x\sqrt{y})\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}\sin 2x}{x}\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)-1}{2x^2}e^{-x^2}\,dx$$

$$= 2\int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2}\sin 2x}{x}dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\sin^2 x}{x^2}e^{-x^2}dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\frac{(x\sin 2x - \sin 2x)}{x}\,dx$$

also ist

$$(33.)\qquad \int_0^{\infty} e^{-x^2}\cdot\frac{x\sin 2x - \sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{e-1}{2e}\sqrt{\pi}\,,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2}(2x\cos x - \sin x)\sin x\,dx = \frac{e-1}{2e}\sqrt{\pi}\,.$$

Man setze in (5), $\varphi(x) = \cos x$, so ist

$$1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\cdots = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\int_0^1 \cos(2xy)\,dy\,dx\,.$$

Aber

$$\int_0^1 \cos(2xy)\,dy = \frac{\sin(2x)}{2x}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\int_0^1 \cos(2xy)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}\sin 2x}{2x}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x}\sin 2x\,dx\,.$$

Ferner ist

$$1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1\cdot 2} - \cdots\cdots = \int_0^1 \left[1 - \frac{k^2}{1} + \frac{k^4}{1\cdot 2} - \cdots\cdots\right]dk - \int_0^1 e^{-k^2}dk$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{x}}$$

Demnach ist

$$(34.)\qquad \int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x}\sin 2x\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{x}}\,,$$

wodurch das Integral $\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x}\sin 2x\,dx$ auf ein anderes reducirt ist. Uebrigens ist auch

$$(35.)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x}\sin 2x\,dx = \sqrt{\pi}\int_0^1 e^{-x^2}dx\ ,$$

d. h. der Werth des Integrals $\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x}\sin 2x\,dx$ liegt zwischen $\sqrt{\pi}$ und $\frac{\sqrt{\pi}}{e}$. Führt man diesen Werth in (33) ein, so ergiebt sich:

$$\sqrt{\pi}\int_0^1 e^{-x^2}dx - \int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x^2}\sin^2 x\,dx = \frac{e-1}{2e}\sqrt{\pi}\,.$$

$$(36.)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x^2}\sin^2 x\,dx = \sqrt{\pi}\left[\int_0^1 e^{-x^2}dx - \frac{e-1}{2e}\right].$$

Man setze in (7) $\varphi(x) = e^x$, so ist

$$\int_0^1 \varphi(2x\sqrt{y})\,dy = \int_0^1 e^{2x\sqrt{y}}dy = 2\int_0^1 e^{2xz}z\,dz = \frac{1}{x}\left[e^{2x} - \frac{e^{2x}}{2x} + \frac{1}{2x}\right]$$

Ferner ist $\varphi(0) = 1 = \varphi''(0) = \varphi^{(4)}(0) =$ u. s. f., und dann

$$1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ \ldots = e - 1,\ \text{also:}$$

$$\sqrt{\pi}(e-1) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-x^2}}{x}\left[e^{2x} - \frac{e^{2x}}{2x} + \frac{1}{2x}\right]dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-x^2+2x}}{x}dx - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-x^2}}{2x^2}(e^{2x}-1)\,dx.$$

Hieraus folgt

$$(37.)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-x^2+2x}}{x}\left(1-\frac{1}{2x}\right)dx = \sqrt{\pi}(e-1) - \int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x^2}dx\,.$$

Bekanntlich ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}.\,e^{2kx}\,dx = e^{k^2}\sqrt{\pi},$$

folglich, wenn man nach k integrirt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)dx = \sqrt{\pi}\int_0^1 e^{x^2}dx.$$

Da nun $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-x^2}}{x}dx = 0$, so ist

$$(38.)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2x}.\frac{dx}{x} = 2\sqrt{\pi}\int_0^1 e^{x^2}dx.$$

Integrirt man zweimal nach k, so ergiebt sich:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x^2+2x}}{2x^2}dx-\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}}{x^2}dx=2\sqrt{\pi}\int_0^1\left(\int_0^x e^{x^2}dx\right)dx.$$

Substituirt man diese Werthe in (37), so erhält man

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx-\int_0^1\int_0^x e^{x^2}dx.dx=\tfrac{1}{2}(e-1),$$

welche Beziehung auch leicht direct bewiesen werden kann, indem

$$\int_0^1 e^{x^2}dx-\int_0^1\int_0^x e^{x^2}dx.dx=\int_0^1[e^{x^2}-\int_0^x e^{x^2}dx]dx$$

ist

Die Integrale $\int_0^1 e^{-x^2}dx$, $\int_0^1 e^{x^2}dx$ lassen sich leicht in stark convergirende Reihen entwickeln. Es ist nemlich:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1.2}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1.2.3.4}-\ldots..=0,7468241337..,$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1.2}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots\ldots=1,4626517447..,$$

$$\int_0^1\int_0^x e^{x^2}dx.dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{4.3}+\frac{1}{6.5}\cdot\frac{1}{1.2}+\frac{1}{8.7}\cdot\frac{1}{1.2.3}+\ldots..=0,6035108316.$$

so dass

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-x^2}\sin 2x}{x}.dx=0,7468241337\ldots..\sqrt{\pi},$$

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-x^2}\sin^2 x}{x}.dx=\sqrt{\pi}\left[0,7468241337+\frac{e-1}{2e}\right],$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2+2x}.\frac{dx}{x}=2\sqrt{\pi}.1,462651744,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2+2x}.\frac{dx}{2x^2}=\int_0^{\infty}\frac{e^{-x^2}}{x^2}\cdot dx=2\sqrt{\pi}.0,6035183\dot{1}6.$$

§. 13.

Man setze in (9) $\varphi x=\sin x$, so erhält man:

$$1-\frac{k^2}{1}+\frac{k^4}{1.2}-\ldots\ldots\ldots=\frac{1}{k\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}x\sin(2kx)\,dx,$$
$$=e^{-k^2}$$

also

$$(39.)\qquad \int_0^\infty e^{-x^2}x\sin(2kx)\,dx = ke^{-k^2}\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Integrirt man nach k zwischen den Gränzen 1 und 0, so erhält man:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\sin^2 x.\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\int_0^1 xe^{-x^2}.\,dx = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\left(\frac{e-1}{e}\right);$$

wie bekannt

Durch Differentiation nach k folgt aus (39):

$$(40.)\qquad \int_0^\infty e^{-x^2}.\,x^{n+1}\sin(2kx+\tfrac{1}{2}n\pi)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}}\cdot\frac{d^n(ke^{-k^2})}{dk^n},$$

also für $n = 1$:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}.\,x^2\cos(2kx)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}(1-2k^2)e^{-k^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}.\,x^2\sin(2x)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2e},$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}.\,x^2\cos(2x)\,dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{4e}.$$

u. s. f.

Setzt man in derselben Formel $\varphi(x) = e^x$, so erhält man:

$$(41.)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2kx}.\,x\,dx = ke^{k^2}.\sqrt{\pi}.$$

Durch Differentation nach k findet sich

$$(42.)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}.\,e^{2kx}.\,x^{n+1}.\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}\cdot\frac{d^n}{dk^n}(ke^{k^2}),$$

also für $n = 1$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}.\,e^{2kx}.\,x^2.\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}(1+2k^2)e^{k^2}.$$

Aus (12) folgt für $\varphi(x) = \sin x$:

$$(43.)\qquad \int_0^\infty e^{-x^2}\sin^2(x\sqrt{k})\,dx = \frac{(1-e^{-k})\sqrt{\pi}}{4};$$

welche Formel auch aus (39) durch Integration hervorgeht.

Setzt man in diesen Formeln $x = z\sqrt{a}$ und transformirt die Resultate, so ergiebt sich:

$$\int_0^\infty e^{-az^2}.\,z\sin(2bz)\,dz = \frac{b}{a\sqrt{a}}e^{-\frac{b^2}{a}}.\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\;;\; \int_0^\infty e^{-az^2}.\,z^{n+1}\sin(2bz+\tfrac{1}{2}n\pi)\,dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}a\sqrt{a}}\cdot\frac{d^n}{db^n}(e^{-\frac{b^2}{a}}b).$$

$$(44.)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-az^2}.\,e^{2bz}.\,z\,dz = \frac{b}{a\sqrt{a}}e^{\frac{b^2}{a}}.\sqrt{\pi}\;;\; \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-az^2}.\,e^{2bz}.\,z^{n+1}.\,dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n a\sqrt{a}}\cdot\frac{d^n}{db^n}(be^{\frac{b^2}{a}}),$$

für $a > o$. Durch Differentation nach a würde man hieraus neue Formeln erlangen. Nach dem, was sich in (§. 2) zeigte, gelten die aufgestellten Formeln ohne alle Einschränkung in Bezug auf k (oder b in (44)). Man setze daher in (44) ib statt b, so erhält man:

$$\int_0^\infty e^{-az^2}.z(e^{2bz}-e^{-2bz})\,dz = \frac{b\sqrt{\pi}}{a\sqrt{a}}e^{\frac{b^2}{a}},$$

$$\int_0^\infty e^{-az^2}.z\sin(2bz)\,dz = \frac{b\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{a}}e^{-\frac{b^2}{a}}.$$

Die letzte Formel ist die erste (44); die erste fällt mit der dritten (44) zusammen. Man setze aber $b = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ und beachte, dass

$$\sin(2bz) = \sin[2rz(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = \sin[2rz\cos\varphi + i.2rz\sin\varphi]$$
$$\tfrac{1}{2}(e^{-2rz\sin\varphi}+e^{2rz\sin\varphi}) + \tfrac{1}{2}i.(e^{2rz\sin\varphi}-e^{-2rz\sin\varphi}) \text{ und}$$

$$be^{-\frac{b^2}{a}} = re^{-\frac{r^2}{a}\cos 2\varphi}\left[\cos\left\{\varphi - \frac{r^2}{a}\sin 2\varphi\right\} + i\sin\left(\varphi - \frac{r^2}{a}\sin 2\varphi\right)\right]$$

ist, so erhält man:

$$(45.)\begin{cases}\int_0^\infty e^{-az^2}.z(e^{-2rz\sin\varphi}+e^{2rz\sin\varphi})\sin(2rz\cos\varphi)\,dz = \dfrac{re^{-\frac{r^2}{a}\cos 2\varphi}\sqrt{\pi}}{a\sqrt{a}}\cos\left(\varphi - \dfrac{r^2}{a}\sin 2\varphi\right)\\ \int_0^\infty e^{-az^2}.z(e^{+2rz\sin\varphi}-e^{-2rz\sin\varphi})\cos(2rz\cos\varphi)\,dz = \dfrac{re^{-\frac{r^2}{a}\cos 2\varphi}\sqrt{\pi}}{a\sqrt{a}}\sin\left(\varphi - \dfrac{r^2}{a}\sin 2\varphi\right)\end{cases}$$

für r und $a > 0$. Da ferner

$$e^{2bz} = e^{2rz(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = e^{2rz\cos\varphi}[\cos(2rz\sin\varphi) + i\sin(2rz\sin\varphi)], \text{ und}$$

$$be^{\frac{b^2}{a}} = re^{\frac{r^2}{a}\cos 2\varphi}\left\{\cos\left(\varphi + \frac{r^2}{a}\sin 2\varphi\right) + i\sin\left(\varphi + \frac{r^2}{a}\sin 2\varphi\right)\right\},$$

so findet sich:

$$(46.)\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-az^2}.e^{2rz\cos\varphi}\cos(2rz\sin\varphi).z\,dz = \dfrac{\sqrt{\pi}.re^{\frac{r^2}{a}\cos 2\varphi}}{a\sqrt{a}}\cos\left(\varphi + \dfrac{r^2}{a}\sin 2\varphi\right)\\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-az^2}.e^{2rz\cos\varphi}\sin(2rz\sin\varphi).z\,dz = \dfrac{\sqrt{\pi}.re^{\frac{r^2}{a}\cos 2\varphi}}{a\sqrt{a}}\sin\left(\varphi + \dfrac{r^2}{a}\sin 2\varphi\right)\end{cases}$$

für r und $a > 0$.

Die Differentialquotienten in (40) und (42) können nach den Formeln im (32. Bande d. J. Abhandlung 1) leicht entwickelt werden; da z. B.

$$\frac{d^n}{dk^n}(ke^{k^2}) = k\frac{d^n}{dk^n}(e^{k^2}) + n\frac{d^{n-1}}{dk^{n-1}}(e^{k^2}) \text{ ist.}$$

§. 14.

Setzt man in (14) $\varphi(x) = e^x$, so ist die Reihe convergent, so lange der Modul von k kleiner ist als 1. Unter dieser Voraussetzung ist also:

$$1 + \frac{1}{2}k + \frac{1.3}{2.4}k^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}k^3 + \dots\dots\dots = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-x}.e^{kx}.dx}{\sqrt{x}},$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(1-k)}}.$$

Demnach ist unter der eben genannten Annahme:

$$(47.)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-x}.e^{kx}.dx}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{(1-k)}} = \sqrt{\frac{\pi}{1-k}}.$$

Hieraus folgt

$$(48.)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-x}.x^n.e^{kx}.dx}{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\pi}\,\frac{d^n}{dk^n}\left(\frac{1}{\sqrt{(1-k)}}\right):$$

welcher Differentialquotient nach bekannten Formeln berechnet werden kann.

Setzt man in (47) az statt x und $a > 0$, so ergiebt sich:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-az}.e^{akz}.dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot\sqrt{\frac{1}{1-k}}$$

oder

$$(49.)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-az}.e^{bz}.dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{\frac{\pi}{a-b}},$$

wenn der Modul von b kleiner als a ist. Aus (49) folgt

$$(50.)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-az}.z^n.e^{bz}.dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{\pi}\,\frac{d^n}{db^n}\left(\frac{1}{\sqrt{(a-b)}}\right).$$

Setzt man in (49) $b = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ und nimmt $r \gtrless {o \atop a}$, so ergiebt sich

$$(51.)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-az}.e^{rz\cos\varphi}}{\sqrt{z}}\cos(rz\sin\varphi)dz = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varrho}}\cos\tfrac{1}{2}\psi\,, \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-az}.e^{rz\cos\varphi}}{\sqrt{z}}\sin(rz\sin\varphi)dz = -\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varrho}}\sin\tfrac{1}{2}\psi, \end{cases}$$

wenn $\varrho = \sqrt{[(a - r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2]}$, $\cos\psi = \frac{a - r\cos\varphi}{\varrho}$, $\sin\psi = -\frac{r\sin\varphi}{\varrho}$ ist.

Setzt man in derselben Formel $\varphi(x) = e^x$, aber y^2 statt k, und integrirt in Bezug auf y, zwischen den Grenzen o und k, wo $k \lesseqgtr 1$, so ergiebt sich:

$$(52.)\quad \int_0^\infty\!\!\int_0^k \frac{e^{-x}.e^{xy^2}.dy.dx}{\sqrt{x}} = \int_0^\infty\!\!\int_0^k \frac{e^{-x(1-y^2)}.dy.dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\pi}.\text{arc}(\sin = k).$$

und für $k = 1$:

$$\int_0^\infty\!\!\int_0^1 \frac{e^{-x(1-y^2)}.dy.dx}{\sqrt{x}} = \tfrac{1}{2}\pi^{\frac{3}{2}}.$$

§. 15.

Man setze in (17) $\varphi(x) = e^x$ und nehme den Modul von k kleiner als 1 an, so ist

$$1+k+k^2+\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{1-k} = \int_0^\infty e^{-x}.e^{kx}.dx;$$

wie bekannt. Daraus folgt $\int_0^\infty e^{-x}.x^n.e^{kx}.dx = \frac{d^n}{dk^n}\cdot\left(\frac{1}{1-k}\right)$

Integrirt man nach k, so erhält man

$$(53.)\quad \int_0^\infty \frac{e^{-x}(1-e^{kx}).dx}{x} = -\lg(1-k),$$

wenn der Modul von k kleiner ist als 1.

Unter den nämlichen Bedingungen erhält man für k:

$$1-k^2+k^4-k^6+\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{1+k^2} = \int_0^\infty e^{-x}.\cos(kx)\,dx,$$

das heisst:

$$(54.)\quad \int_0^\infty e^{-x}.\cos(kx)\,dx = \frac{1}{1+k^2},$$

woraus

$$\int_0^\infty e^{-x}.x^n.\cos(kx+\tfrac{1}{2}n\pi)\,dx = \frac{d^n}{dk^n}\cdot\left(\frac{1}{1+k^2}\right)$$

folgt. Aus (54) ergiebt sich:

$$(55.)\quad \int_0^\infty \frac{e^{-x}.\sin(kx).dx}{x} = \text{arc}(\text{tg} = k)$$

Eben so erhält man:

$$(56.)\quad \begin{cases} \int_0^\infty e^{-x}.\sin(kx)\,dx = \frac{k}{1+k^2}, \text{ und} \\ \int_0^\infty e^{-x}.x^n.\sin(kx+\tfrac{1}{2}n\pi) = \frac{d^n}{dk^n}\cdot\frac{k}{1+k^2}, \end{cases}$$

und hieraus:

$$(57.)\quad \begin{cases} \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}(1-\cos kx)\,dx = \frac{1}{2}\log(1+k^2), \\ \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\sin^2(kx)\,dx = \frac{1}{4}\log(1+4k^2), \end{cases}$$

wenn der Modul von k kleiner ist als $\frac{1}{2}$.

Die hier gefundenen Formeln sind grösstentheils bekannt; sie wurden nur aufgenommen, weil die obige Herleitung völlig direct ist. Auch sind die Formeln nun für ein imaginäres k eben sowohl erwiesen. Für ein positives k gelten die Ausdrücke (54 und 56) und die aus ihnen abgeleiteten Formeln auch über die Grenze $k=1$ hinaus, da die beiden Seiten der Gleichungen in diesem Falle über $k=1$ hinaus continuirlich bleiben. Die Differentialquotienten in (54 und 56) finden sich, wie in (§. 13), aus den Formeln in der Abhandlung 1. im 32. Bande d. J., wenn man zunächst die dortige Formel (10) anwendet.

§. 16.

Man setze in (21) $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^{2n})}}$, so ist

$$\varphi(0)=1,\ \varphi^{(2n)}(0)=1^2.3.4\ldots 2n,\ \ldots\ldots \varphi^{(2rn)}(0)=(1.3.5\ldots(2r-1))^2.(2r+1)(2r+2)\ldots 2rn.$$

und für $n=1$:

$$\varphi(0)=1,\ \varphi^{(2)}(0)=1^2,\ \ldots\ldots \varphi^{(2r)}(0)=(1.3\ldots\ldots(2r-1))^2\ldots\ldots;$$

alle übrigen von diesen Functionen sind Null. Unter der Bedingung, dass der Modul von k nicht grösser sei als $\frac{1}{2}$, findet sich:

$$1+\frac{k^{2n}.1^2.3.4\ldots 2n}{1^2.2^2\ldots n^2}+\frac{k^{4n}.1^2.3^2.5.6\ldots\ldots 4n}{1^2.2^2\ldots\ldots(2n^2)}+\ldots\ldots+\frac{k^{2rn}.1^2.3^2.5^2\ldots(2r-1)^2.(2r+1)(2r+2)\ldots 2rn}{1^2.2^2.3^2\ldots\ldots(rn)^2}+\ldots$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)[1-(2kx)^{2n}]}}.$$

Setzt man $\frac{1}{2}k$ statt k, so ergiebt sich:

$$(58'.)\quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-k^{2n}x^{2n})]}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^{2n}\sin^{2n}\varphi}} =$$

$$\tfrac{1}{2}\pi\Big[1+(\tfrac{1}{2}k)^{2n}.\frac{1^2.3.4\ldots 2n}{1^2.2^2\ldots n^2}+(\tfrac{1}{2}k)^{4n}.\frac{1^2.3^2.5.6\ldots 4n}{1^2.2^2\ldots\ldots(2n)^2}+\ldots+(\tfrac{1}{2}k)^{2rn}.\frac{1^2.3^2.5^2\ldots(2r-1)^2(2r+1)(2r+2)\ldots 2rn}{1^2.2^2.3^2\ldots\ldots(rn)^2}+\ldots\Big]$$

Setzt man $n=1$, so erhält man:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}} = \tfrac{1}{2}\pi\left[1+(\tfrac{1}{2}k)\cdot\frac{1^2}{1^2}+(\tfrac{1}{2}k)^4\cdot\frac{1^2.3^2}{1^2.2^2}+\ldots\ldots+(\tfrac{1}{2}k)^{2r}\cdot\frac{1^2.3^2\ldots\ldots(2r-1)^2}{1^2.2^2\ldots\ldots r^2}+\ldots\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi\left[1+\frac{k^2\cdot 1^2}{2^2}+\frac{k^4\cdot 1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}+\ldots\ldots+\frac{k^{2r}\cdot 1^2\cdot 3^2\ldots\ldots(2r-1)^2}{2^2\cdot 4^2\ldots\ldots(2r)^2}+\ldots\ldots\right];$$

wie bekannt. (Man sehe z. B. d. J. Bd. 19 S. 51, Formel (1)). Die Formel (58') lässt sich auch wie folgt schreiben:

$$(58.)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^{2n}\sin^{2n}\varphi)}} = \tfrac{1}{2}\pi\left[1+\frac{k^{2n}\cdot 1^2\cdot 3\cdot 4\ldots 2n}{2^2\cdot 4^2\ldots\ldots(2n)^2}+\ldots+\frac{k^{2rn}\cdot 1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\ldots(2r-1)^2(2r+1)(2r+2)\ldots 2rn}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2rn)^2}+\ldots\right];$$

und sie gilt, wenn der Modul von k nicht grösser ist als 1.

Man setze in derselben Formel $\varphi(x) = \sqrt{(1-x^{2n})}$, so sind die Functionen $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, ... alle Null, bis auf die folgenden:

$$\varphi(0)=1, \varphi^{(2n)}(0) = -\frac{1\cdot 2\ldots 2n}{2}, \ldots \varphi^{(2rn)}(0) = (2r-1)[1.3.5\ldots(2r-3)]^2(2r+1)(2r+2)\ldots 2rn, \ldots$$

Demnach ist

$$(59.)\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{(1-k^{2n}\sin^{2n}\varphi)}\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\pi\left[1-\frac{k^{2n}\cdot 1\cdot 3\cdot 4\ldots 2n}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\ldots(2n)^2}-\ldots-\frac{k^{2rn}(2r-1)\,1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\ldots(2r-3)^2(2r+1)(2r+2)\ldots 2rn}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\ldots\ldots(2rn)^4}-\ldots\right]$$

so lange der Modul von k nicht > 1 ist. Für $n = 1$ erhält man

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\pi\left[1-\frac{k^2\cdot 1}{2^2}-\frac{k^4\cdot 1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}-\ldots\ldots-\frac{k^{2r}\cdot 1^2\cdot 3^2\ldots\ldots(2r-3)^2(2r-1)}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\ldots\ldots(2r)^2}-\ldots\ldots\right];$$

wie bekannt. (Man sehe die angeführte Stelle, Formel (2)).

§. 17.

In der Formel (23) setze man $\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{(1-x^{2n})}}$, so erhält man:

$$\varphi'(0) = 1, \ldots\ldots \varphi^{(2rn+1)}(0) = 1^2.3^2.5^2\ldots(2r-1)^2.(2r+1)(2r+2)\ldots(2rn+1), \text{ also:}$$

$$(60.)\ \frac{k}{1}+\frac{k^{2n+1}}{3}\cdot\frac{4\cdot 6\ldots\ldots 2n}{5\cdot 7\ldots(2n+1)}+\ldots+\frac{k^{2rn+1}}{2r+1}\cdot\frac{(2r+2)(2r+4)\ldots(2rn)}{(2r+3)(2r+5)\ldots\ldots(2rn+1)}+\ldots$$

$$= \int_0^1 \frac{kx}{\sqrt{((1-x^2)(1-k^{2n})x^{2n})}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{k\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{(1-k^{2n}\sin^{2n}\varphi)}}.$$

Für $n = 1$ ist

$$(61.)\ \frac{k}{1}+\frac{k^3}{3}+\frac{k^5}{5}+\frac{k^7}{7}+\ldots\ldots = \int^{\frac{1}{2}\pi}\frac{k\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^1\varphi}} = \log\sqrt{\left(\frac{1+k}{1-k}\right)}.$$

Die Gleichung (61) gilt, wenn der Modul von k kleiner ist als 1, und auch für $k = \pm i$.

Für $n = 2$ ist

$$\frac{k}{1}+\frac{k^5}{3}\cdot\frac{4}{5}+\frac{k^9}{5}\cdot\frac{6\cdot8}{7\cdot9}+\dots\dots+\frac{k^{4r+1}}{2r+1}\cdot\frac{(2r+2)(2r+4)\dots.4r}{(2r+3)(2r+5)\dots(4r+1)}+\dots. = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{k\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{(1-k^4\sin^4\varphi)}}.$$

Diese Formel, so wie die (60), gilt unter den gleichen Bedingungen, wie (61).

Setzt man in (61) ik statt k, so ist die Formel gültig, wenn der Modul von k kleiner ist als 1, und auch noch für ± 1, und es ist:

$$\frac{k}{1}-\frac{k^3}{3}+\frac{k^5}{5}-\dots\dots=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{k\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{(1+k^2\sin^2\varphi)}},\quad \text{d. h.}$$

$$\text{(62.)}\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{(1+k^2\sin^2\varphi)}}=\frac{1}{k}\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=k)$$

Für ein reelles k gilt (62) auch über $k = \pm 1$ hinaus. Für $k = 0$ gilt (62) ebenfalls noch.

Aus (62) erhält man

$$\text{(63.)}\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^3\varphi\,d\varphi}{\sqrt{(1+k^2\sin^2\varphi)^3}}=\frac{1}{k^3}\left[\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=k)-\frac{k}{1+k^2}\right].$$

wenn k reell und >0, oder wenn k imaginär und sein Modul <1 ist.

Setzt man in derselben Formel $\varphi(x) = x\sqrt{(1-x^{2n})}$, so erhält man

$$\varphi(0)=1\,,\ \varphi^{(2n+1)}(0)=-3.4\dots..(2n+1)\,,\ \dots..$$

$$\varphi^{(2rn+1)}(0)=-[3.5\dots..(2r-3)]^2(2r+1)(2r+2)\dots..(2rn+1)(2r-1),\dots$$

also

$$\text{(64.)}\qquad k-\frac{k^{2n+1}}{1\cdot3}\cdot\frac{4\cdot6\dots..2n}{5\cdot7\dots(2n+1)}-\dots-\frac{k^{2rn+1}}{(2r-1)(2r+1)}\cdot\frac{(2r+2)(2r+4)\dots..2rn}{(2r+3)(2r+5)\dots(2rn+1)}-\dots..$$

$$=\int_0^1\frac{kx\sqrt{(1-k^{2n}x^{2n})}}{\sqrt{(1-x^2)}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}k\sin\varphi\sqrt{(1-k^{2n}\sin^{2n}\varphi}\,d\varphi\,,$$

wenn der Modul von k nicht grösser ist als 1.

Für $n = 1$ erhält man:

$$k-\frac{k^3}{1\cdot3}-\frac{k^5}{3\cdot5}-\frac{k^7}{5\cdot7}-\dots\dots=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}k\sin\varphi\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}\,d\varphi\,.$$

Nun ist

$$\int\sin\varphi\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}\,d\varphi=-\tfrac{1}{2}\cos\varphi\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}-\frac{1-k^2}{2k}\log(k\cos\varphi+(1-k^2\sin^2\varphi))$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin\varphi\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\frac{1-k^2}{2k}\log\sqrt{\left(\frac{1+k}{1-k}\right)}+\frac{1}{2}\,;$$

demnach ist

$$(65.)\quad \frac{k^3}{1\cdot3}+\frac{k^5}{3\cdot5}+\frac{k^7}{5\cdot7}+\ldots\ldots=\tfrac{1}{2}k-\tfrac{1}{2}(1-k^2)\log\sqrt{\left(\frac{1+k}{1-k}\right)}$$

wenn der Modul von k nicht >1 ist. Für $k=1$ ergiebt sich

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ldots\ldots\ldots\ldots=\frac{1}{2}.$$

Setzt man in (65) ki statt k und erwägt dass

$$\log\sqrt{\left(\frac{1+ki}{1-ki}\right)}=i\,\mathrm{arc}(\mathrm{tg}=k),$$

ist, so erhält man:

$$(66.)\quad \frac{k^3}{1\cdot3}-\frac{k^5}{3\cdot5}+\frac{k^7}{5\cdot7}-\ldots\ldots=\tfrac{1}{2}(1+k^2)\,\mathrm{arc}(\mathrm{tg}=k)-\tfrac{1}{2}k.$$

wenn der Modul von k nicht >1 ist. Für $k=1$ findet sich

$$\frac{1}{1\cdot3}-\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}-\frac{1}{7\cdot9}+\ldots\ldots\ldots\ldots=\tfrac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}.$$

Aus (65 und 66) ergiebt sich leicht:

$$\frac{k^3}{1\cdot3}+\frac{k^7}{5\cdot7}+\frac{k^{11}}{9\cdot11}+\ldots=\tfrac{1}{4}(1+k^2)\mathrm{arc}(\mathrm{tg}=k)-\tfrac{1}{4}(1-k^2)\log\sqrt{\left(\frac{1+k}{1-k}\right)},$$

$$(67.)\quad \frac{k^5}{3\cdot5}+\frac{k^9}{7\cdot9}+\frac{k^{13}}{11\cdot13}+\ldots=\tfrac{1}{2}k-\tfrac{1}{4}(1-k^2)\log\sqrt{\left(\frac{1+k}{1-k}\right)}-\tfrac{1}{4}(1+k^2)\mathrm{arc}(\mathrm{tg}=k),$$

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{5\cdot7}+\frac{1}{9\cdot11}+\ldots\ldots=\tfrac{1}{8}\pi$$

$$\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{7\cdot9}+\frac{1}{11\cdot13}+\ldots\ldots=\frac{1}{2}-\tfrac{1}{8}\pi.$$

Einige dieser Ausdrücke können auch auf eine von der vorigen verschiedene Art gefunden werden; was jedoch hier übergangen werden darf. Setzt man $k=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, so erhält man neue Formeln aus den gegebenen, die sich leicht aufstellen lassen, wesshalb sie hier nicht herzusetzen nöthig sind.

§. 18.

Aehnliche Substitutionen sind noch in der Formel (25) zu machen. Setzt man in derselben $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$, so erhält man:

$$1+\frac{k^2}{2}\cdot\frac{1^2}{2^2}+\frac{k^4}{3}\cdot\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}+\ldots\ldots+\frac{k^{2r}}{r+1}\cdot\frac{1^2.3^2.5^2\ldots(2r-1)^2}{2^2.4^2.6^2\ldots\ldots 2r^2}+\ldots\ldots=\frac{4}{\pi}\int_0^1\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{\sqrt{(1-k^2x^2)}}dx$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^2\varphi.d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}.$$

Ist $K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2.\sin^2\varphi)}}$, $E = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{(1-k^2.\sin^2\varphi.d\varphi)}$, so ist

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\varphi.d\varphi}{\sqrt{(1-k^2.\sin^2\varphi)}} = K - \frac{K-E}{k^2},$$

also

$$(68.)\quad 1+\frac{k^2}{2}.\frac{1^2}{2^2}+\frac{k^4}{3}.\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}+\dots\dots+\frac{k^{2r}}{r+1}.\frac{1^2.3^2.5^2\dots(2r-1)^2}{2^2.4^2.6^2\dots\dots(2r)^2}+\dots = \frac{4}{\pi}\Big[K-\frac{K-E}{k^2}\Big].$$

Die Werthe von K und E sind aus den Tafeln in *Légendre's* „Traité des fonctions elliptiques" als bekannt zu betrachten.

Für $k = 1$ ist

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\varphi.d\varphi}{\sqrt{(1-k^2.\sin^2\varphi)}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\varphi.d\varphi = 1,$$

also

$$(69.)\quad 1+\frac{1}{2}.\frac{1^2}{2^2}+\frac{1}{3}.\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}+\dots\dots+\frac{1}{r+1}.\frac{1^2.3^2\dots\dots(2r-1)^2}{2^2.4^2\dots\dots 2r^2}+\dots = \frac{4}{\pi}.$$

In der Formel (68) darf der Modul von k nicht >1 sein.

In die nämliche Formel setze man $\varphi(x) = \sqrt{(1-x)^2}$, so erhält man:

$$1-\frac{k^2}{2}.\frac{1}{2^2}-\frac{k^4}{3}.\frac{1^2.3}{2^2.4^2}-\dots-\frac{k^{2r}}{(r+1)}.\frac{1^2.3^2.5^2\dots(2r-3)^2(2r-1)}{2^2.4^2.6^2\dots\dots\dots(2r)^2}-\dots = \frac{4}{\pi}\int_0^1 \sqrt{[(1-x^2)(1-k^2x^2)]}\,dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2\varphi\sqrt{(1-k^2.\sin^2\varphi)}.d\varphi.$$

Nun ist

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2\varphi\sqrt{(1-k^2.\sin^2\varphi)}.d\varphi = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{(1-k^2.\sin^2\varphi)}.d\varphi - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2\varphi.\sqrt{(1-k^2.\sin^2\varphi)}.d\varphi$$

$$= E - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\varphi.d\varphi}{\sqrt{(1-k^2.\sin^2\varphi}} + k^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^4\varphi}{\sqrt{(1-k^2.\sin^2\varphi)}}.d\varphi,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\varphi.d\varphi}{\sqrt{(1-k^2.\sin^2\varphi)}} = \frac{K-E}{k^2},\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^4\varphi}{\sqrt{(1-k^2.\sin^2\varphi)}}\,d\varphi = \frac{2(1+k^2)}{3k^4}.(K-E)-\frac{K}{3k^2};$$

demnach ist:

$$(70.)\quad 1-\frac{k^2}{2}.\frac{1}{2^2}-\frac{k^4}{3}.\frac{1^2.3}{2^2.4^2}-\dots-\frac{k^{2r}}{r+1}.\frac{1^2.3^2\dots(2r-3)^2(2r-1)}{2^2.4^2\dots\dots\dots(2r)^2}-\dots = \Big[\frac{(E-K)(1-k^2)}{3k^2}+\frac{2E}{3}\Big]\frac{4}{\pi}$$

und für $k = 1$:

$$1-\frac{1}{2}.\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3}.\frac{1^2.3}{2^2.4^2}-\dots\dots-\frac{1}{r+1}.\frac{1^2.3^2\dots\dots(2r-3)^2(2r-1)}{2^2.4^2\dots\dots\dots}-\dots\dots = \frac{8}{3\pi}.$$

§. 19.

Man setze in der Formel (27) $x\sqrt{(1-x^2)} = \varphi(x)$, so ergiebt sich:
$\varphi'(0) = 1, \varphi^3(0) = -3, \dots \varphi^{(2r+1)}(0) = -1^2.3^2.5^2\dots(2r-3)^2(2r-1)(2r+1)$, also:

$$\frac{k}{3} - \frac{k^3}{1.3.5} - \frac{k^5}{3.5.7} - \dots - \frac{k^{2r+1}}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)} - \dots = \int_0^1 kx\sqrt{(1-k^2x^2)}\sqrt{(1-x^2)}dx$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} k\sin\varphi\cos^2\varphi.\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}.d\varphi.$$

Nun ist

$$\int \sin\varphi\cos^2\varphi\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}.d\varphi = -\left(\frac{\cos^3\varphi}{4} + \frac{1-k^2}{8k^2}\cos\varphi\right)\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}$$
$$+\frac{(1-k^2)^2}{8k^3}\log[k\cos\varphi + \sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}],$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin\varphi\cos^2\varphi\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi}.d\varphi = \frac{1}{4} + \frac{1-k^2}{8k^2} + \frac{(1-k^2)^2}{8k^3}\log\sqrt{\left(\frac{1-k}{1+k}\right)},$$

also

$$(71.)\ \frac{k}{3} - \frac{k^3}{1.3.5} - \frac{k^5}{3.5.7} - \dots - \frac{k^{2r+1}}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)} - \dots = \frac{k}{4} + \frac{1-k^2}{8k} + \frac{(1-k^2)^2}{8k^2}\log\sqrt{\left(\frac{1-k}{1+k}\right)}$$

und für $k=1$:

$$\frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{5.7.9} + \dots = \frac{1}{12}.$$

Die Formel (71) gilt, wenn der Modul von k nicht > 1 ist. Setzt man ki statt k, so ergiebt sich:

$$\frac{k}{3} + \frac{k^3}{1.3.5} - \frac{k^5}{3.5.7} + \frac{k^7}{5.7.9} - \frac{k^9}{7.9.11} + \dots = \frac{k}{4} - \frac{1+k^2}{8k} + \frac{(1+k^2)^2}{8k^2}\text{arc.}(\text{tang} = k),$$

$$(72.)\quad \frac{k^3}{1.3.5} - \frac{k^5}{3.5.7} + \frac{k^7}{5.7.9} - \frac{k^9}{7.9.11} + \dots = \frac{(1+k^2)^2}{8k^2}\text{arc.}(\text{tg} = k) - \frac{k}{12} - \frac{1+k^2}{8k},$$

$$\frac{1}{1.3.5} - \frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{5.7.9} - \frac{1}{7.9.11} + \dots = \tfrac{1}{8}\pi - \frac{1}{3}.$$

Durch Addition und Subtraction von (71 u. 72) erhält man leicht neue Formeln.

Man setze in derselben Formel $\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$, so ist:
$\varphi'(0) = 1$, $\varphi^{(3)}(0) = +3$, ... $\varphi^{(2r+1)}(0) = [1.3.5\dots(2r-1)]^2(2r+1)$, und demnach:

$$\frac{k^1}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{k^3}{3} + \dots + \frac{k^{2r+1}}{(2r+1)(2r+3)} + \dots = \int_0^1 \frac{kx.\sqrt{(1-x^2)}}{\sqrt{(1-k^2x^2)}}dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{k\sin\varphi\cos^2\varphi.d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}.$$

Aber $\int \frac{\sin\varphi\cos^2\varphi.d\varphi}{\sqrt{(1-k^2.\sin^2\varphi)}} = -\frac{\cos\varphi\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}{2k^2} + \frac{1-k^2}{2k^3}\log(k\cos\varphi + \sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}),$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\varphi\cos^2\varphi.d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}} = \frac{1}{2k^2} + \frac{1-k^2}{2k^3}\log\sqrt{\left(\frac{1-k}{1+k}\right)},$$

also

$$\frac{k}{1.3} + \frac{k^3}{3.5} + \frac{k^5}{5.7} + \ldots + \frac{k^{2r+1}}{(2r+1)(2r+3)} + \ldots = \frac{1}{2k} - \frac{1-k^2}{2k^2}.\log\sqrt{\left(\frac{1+k}{1-k}\right)};$$

was nichts anderes ist als die Formel (65).

§. 20.

Man setze in der Formel (31) k^2 statt k und integrire nach k, so erhält man

$$\varphi(0)\frac{k}{1} + k^3\varphi'(0).\frac{1}{2} + k^5\varphi''(0).\frac{1.3}{2.4} + \ldots\ldots + k^{2r+1}.\frac{1.3.5\ldots\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots\ldots\ldots2r} + \ldots\ldots$$

$$(73.) \qquad = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x}\sqrt{x}\int_0^k \varphi(k^2x)\,dk.dx.$$

$$\varphi(0) + k^2\varphi'(0).\frac{1}{2} + \ldots\ldots + k^{2r}\frac{1.3.5\ldots\ldots(2r-1)}{2.4\ldots\ldots\ldots2r} + \ldots\ldots = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-x}\sqrt{x}}{k}\int_0 \varphi(k^2x)dk.dx,$$

und, wenn man abermals integrirt:

$$(74.)\ \varphi(0).\frac{k}{1} + \frac{k^3}{3}\varphi'(0).\frac{1}{2} + \ldots + \frac{k^{2r+1}}{2r+1}.\frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots\ldots2r} + \ldots = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x}\sqrt{x}\int_0^k \left[\frac{1}{k}\int_0^k \varphi(k^2x)dk\right]dk.dx.$$

Die Formel (73) gilt, wenn der Modul von $k < 1$, die (74) wenn er nicht > 1 ist.

Man setze in (73) $\varphi(x) = e^x$, so ist $\varphi(0) = 1$, $\varphi(0)' = 1$, u. s. f., also

$$\frac{k}{1} + k^3.\frac{1}{2} + k^5.\frac{1.3}{2.4} + \ldots\ldots = \frac{k}{\sqrt{(1-k^2)}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x}\sqrt{x}\int_0^k e^{k^2x}dk.dx,$$

d. h.

$$(75.) \qquad \int_0^\infty\int_0^k e^{-x}.e^{k^2x}.\sqrt{x}.dk.dx = \frac{k}{\sqrt{(1-k^2)}}.\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

wenn der Modul von k kleiner als 1 ist.

Durch Differentiation findet sich hieraus:

$$(76.) \qquad \int_0^\infty e^{-x}.e^{k^2x}.\sqrt{x}.dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{(1-k^2)^3}},$$

unter denselben Bedingungen. Setzt man ki statt k, so erhält man eine neue Formel.

Setzte man in (74) $\varphi(x) = e^x$, so wäre der Werth des dreifachen Integrals der Seite rechts gleich arc(sin $= k$). So ist z. B.

$$\int_0^\infty\int_0^1 \frac{1}{y}\int_0^y e^{-x}.\sqrt{x}.e^{k^2 z}.dz.dy.dx = \tfrac{1}{4}\pi^{\frac{3}{2}}.$$

Aus (76) erhält man

$$(77.)\quad \int_0^\infty e^{-x}.x^n.e^{\pm kx}.\sqrt{x}.dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.\frac{d^n}{dk^n}.\left(\frac{1}{\sqrt{(1\mp k)^3}}\right),$$

wenn der Modul von k kleiner als 1 ist. Für ein reelles $k > 0$ und wenn die unteren Zeichen gelten, findet diese Formel auch Statt, wenn $k > 1$. Der hier vorkommende Differentialquotient findet sich leicht nach bekannten Formeln.

Die vorstehenden Resultate, die sich leicht noch vermehren liessen, werden dienen, die Anwendbarkeit der allgemeinen Entwicklungen zu zeigen.

Sinsheim, im Februar 1847.

8.

Behandlung einiger Grund-Aufgaben der analytischen Geometrie, im schiefwinkligen Coordinatensystem.

(Von Herrn Dr. *R. Baltzer*, Oberlehrer am Gymnasio zu Dresden.)

Ich habe in dieser Abhandlung versucht, den Zusammenhang unter gewissen Fundamental-Aufgaben der analytischen Geometrie im schiefwinkligen Coordinatensysteme darzulegen, um dadurch die Masse der auszuführenden Rechnungen möglichst zu vermindern. Von geometrischen Principien brauchte ich dazu die Proportionalität der Schnitte von Geraden durch parallele Gerade oder Ebenen, und die rechtwinkligen Projectionen. Als Hauptmittel des Calculs hat die Proportion und die Einsetzung proportionaler Werthe in eine Gleichung gedient. So liessen sich alle Rechnungen vermeiden, bei denen bedeutende Reductionen vorkommen und welche also im Verdacht von *Umwegen* stehen. Im dreiaxigen System hat sich die Einführung gewisser durch dasselbe bestimmter Constanten (α, β, γ, δ), so wie gewisser von den Richtungen der Geraden und Stellungen der Ebenen abhängiger Functionen (ϱ, σ) zweckmässig gezeigt. Bei Behandlung der Geraden im Raume glaubte ich die Symmetrie durch Zuziehung von drei Gleichungen zwischen je zwei Coordinaten eines ihrer Puncte zu fördern.

Den Ausdruck „*Stellung einer Ebene*", wie „*Richtung einer Geraden*", vermöge dessen man das Gemeinschaftliche paralleler Ebenen angiebt, verdankt man *von Staudt*, Geom. d. Lage. 1840. Die Bezeichnungen „Richtung (fgh)", „Stellung (ABC)", wie „Punct (xyz)" für die Richtung, welche eine Strecke hat, wenn ihre Projectionen auf je eine Axe, parallel mit der Ebene der beiden andern Axen, sich wie $f:g:h$ verhalten, und für die Stellung einer Ebene, deren Normale mit den Axen Winkel bildet, von denen die Cosinus sich wie $A:B:C$ verhalten, erlaube ich mir weiterer Beachtung zu empfehlen.

Den ersten Abschnitt aus der analytischen Geometrie der Ebene habe ich hinzugefügt, um bei gleichartiger Behandlung bereits die Keime der reichhaltigeren

Ausdrücke, welche in der analytischen Geometrie des Raumes vorkommen, aufzuzeigen. Der im zweiten Abschnitt §.1 eingeschlagene Weg ist früher von *Sturm* (*Gergonne* Ann. de Math. tom. XV. S. 330) zu polygonometrischen Untersuchungen betreten worden. Bei demselben Geometer, mit dessen Abhandlung die von *Cauchy* (Exercices d'analyse et de physique tom. III. S. 305. Vergl. S. 343) im Wesentlichen zusammentrifft, finden sich auch die ersten drei Ausdrücke (§. 7) für den Cosinus des Winkels zweier Geraden; während der vierte Ausdruck, den *Grunert* im Archiv f. Math. u. Ph. B. VIII. S. 194 entwickelt und für neu hält, sich bereits bei *Magnus* (Aufg. u. Lehrs. aus der analyt. Geom. des Raumes §. 9, (7)) findet.

I. Von dem Punct und der Geraden in einer Ebene.

1.

Sind $OP = x$ und $PQ = y$ (Fig. 1 Taf. IV.) die Coordinaten des Puncts Q, parallel mit zwei gegebenen Axen, und ist $OQ = r$, so ist

$$(1.)\qquad r = x\cos xr + y\cos yr$$

$$(2.)\qquad \begin{cases} r\cos xr = x + y\cos xy \\ r\cos yr = x\cos xy + y. \end{cases}$$

Denn OQ und die gebrochene Linie OPQ haben, auf die Richtungen r, x, y rechtwinklig projicirt, gleiche Projectionen. Hierbei bedeutet z. B. xr hinter dem Functionszeichen cos den Winkel, um welchen die Richtung r von der Richtung x in bestimmtem Sinne abweicht, so dass xr und rx entgegengesetzte Winkel sind, deren Cosinus aber, wie bekannt, übereinstimmen.

Aus den obigen Gleichungen folgt unmittelbar

$$(3.)\qquad \cos xr:\cos yr:1 = x + y\cos xy : x\cos xy + y : r.$$

Wenn man aber die Gleichungen (4 u. 2) beziehlich mit r, x, y multiplicirt und die Producte addirt, so erhält man

$$(4.)\qquad r^2 = x^2 + 2xy\cos xy + y^2.$$

Umgekehrt folgt aus den Gleichungen (2):

$$(5.)\qquad x:y:r = \cos xr - \cos yr.\cos xy : \cos yr - \cos xr.\cos xy : \sin^2 xy,$$

und wenn man statt x, y, r, die proportionalen Werthe in die Gleichung (1) setzt:

$$(6.)\qquad \sin^2 xy = \cos^2 xr - 2\cos xr.\cos yr.\cos xy + \cos^2 yr.$$

Anm. Sind die *Coordinaten der Strecke* QQ_1 (Fig. 2), d. h. die Projectionen dieser Strecke auf die Richtung x, parallel mit der Richtung y, und auch

die Richtung y parallel mit der Richtung x, so bestehen zwischen QQ_1, x_1-x, y_1-y, dieselben Relationen, wie zwischen r, x, y.

2.

Für alle Puncte (xy) der Geraden OQ ist $x:y:r$ constant, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke, welche den Anfang zur gemeinschaftlichen Spitze und die Ordinaten zu Grundlinien haben. Daher ist

$$x:y=f:g, \quad \text{also} \quad gx-fy=0$$

die *Gleichung dieser Geraden.* Für die Coordinaten einer parallelen Strecke x_1-x', y_1-y' findet dasselbe Verhältniss Statt; daher ist

$$x_1-x':y_1-y'=f:g, \quad \text{also} \quad gx'-fy'=H$$

die *Gleichung einer Parallele* zur vorigen Geraden. Umgekehrt folgt, dass die Geraden $(gx-fy=0)$ und $(g'x'-f'y'=H')$ *parallel* sind, wenn

$$f':g'=f:g$$

ist. Demnach ist die *Richtung* der Geraden durch das Verhältniss der Zahlen f und g bestimmt, und man kann kurz sagen, eine Strecke habe die Richtung (fg), wenn ihre Coordinaten sich wie $f:g$ verhalten.

Verhält sich die Strecke zu ihren Coordinaten wie $\varrho:f:g$, so ist nach (4)

$$\varrho^2=f^2+2fg\cos xy+g^2$$

und zur Bestimmug ihrer *Winkel mit den Axen* ist nach (3):

$$\cos xr:\cos yr:1=f+g\cos xy:f\cos xy+g:\varrho.$$

3.

Die Normale $ON=n$ der Geraden $(gx-fy=H)$ (Fig. 1) ist die rechtwinklige Projection der gebrochnen Linie OPQ auf die Richtung ON, wenn OP und PQ die Coordinaten eines Puncts der gegebenen Geraden sind. Daher ist

$$x\cos xn+y\cos yn=n.$$

Diese Gleichung ist mit der gegebenen Gleichung $gx-fy=H$ identisch, folglich ist

$$\cos xn:\cos yn:1=g:-f:\frac{H}{n}.$$

Nach (5 und 6) ergiebt sich hieraus für die *Normale der gegebenen Geraden*, welche die Richtung $(f'g')$ hat:

$$f':g':\varrho'=f\cos xy+g:-f-g\cos xy:\frac{H}{n}\sin^2 xy;$$

wo ϱ' dieselbe Function von f' und g' bedeutet, wie ϱ von f und g (§. 2), und

$$\frac{H^2}{n^2}\sin^2 xy = g^2 + 2fg\cos xy + f^2 = \varrho^2,$$

folglich auch

$$\frac{H}{n} = \frac{\varrho}{\sin xy}.$$

Umgekehrt folgt, dass die Richtungen (fg) und $(f'g')$ oder die Geraden $(gx - fy = H)$ und $(g'x' - f'y' = H')$ *normal* zu einander sind, wenn

$$f' : g' = f\cos xy + g : -f - g\cos xy\ ,$$
$$ff' + gg' + (f'g + fg')\cos xy = 0 \text{ ist.}$$

4.

Um den *Winkel* rr' der Richtungen (fg) und $(f'g')$, z. B. QOQ' (Fig. 2) zu finden, projicire man sowohl OQ', als die gebrochene Linie $OP'Q'$, rechtwinklig auf OQ, so erhält man

$$r'\cos rr' = x'\cos xr + y'\cos yr,$$

und daher mit Hülfe von (3):

$$rr'\cos rr' = x'(x + y\cos xy) + y'(x\cos xy + y)$$
$$(7.)\qquad = xx' + yy' + (x'y + xy')\cos xy\ ,$$

oder mit Hülfe von (5):

$$(8.)\quad \sin^2 xy\cos rr' = \cos xr(\cos xr' - \cos yr'\cos xy) + \cos yr(\cos yr' - \cos xr'\cos xy)$$
$$= \cos xr\cos xr' + \cos yr\cos yr' - (\cos yr\cos yr' + \cos xr'\cos yr)\cos xy.$$

Substituirt man in (7)

$$x : y : r = f : g : h \quad , \quad x' : y' : r' = f' : g' : \varrho',$$

wo nach (§. 2)

$$\varrho^2 = f^2 + 2fg\cos xy + g^2 \quad , \quad \varrho'^2 + 2f'g'\cos xy + g'^2\ ,$$

oder in (8), zufolge (3),

$$\cos xr : \cos yr : 1 = f + g\cos xy : f\cos xy + g : \varrho$$
$$\cos xr' : \cos yr' : 1 = f' + g'\cos xy : f'\cos xy + g' : \varrho',$$

ist, so erhält man

$$\varrho\varrho'\cos rr' = ff' + gg' + (fg' + f'g)\cos xy.$$

5.

Um den *Abstand n der Geraden* $(gx - fy = H)$ *vom Anfange* zu berechnen, hat man nach (§. 3)

$$n = \frac{H \sin xy}{\varrho}.$$

Für den *Abstand der Parallelen* $(gx - fy = H)$ und $(gx' - fg' = H')$ folgt daraus unmittelbar

$$n' - n = \frac{(H' - H)\sin xy}{\varrho}$$

Für den *Abstand* n_1 *der Geraden* $(gx - fy = H)$ *von dem Puncte* Q_1, dessen Coordinaten x_1 und y_1 sind, hat man (Fig. 3)

$$n_1 + Q_1 Q . \cos yn,$$

wo Q der Durchschnitt von $P_1 Q_1$ mit der gegebenen Geraden ist, mithin

$$g . OP_1 - f . P_1 Q + H.$$

Nun ist allgemein $P_1 Q - Q_1 Q + P_1 Q_1$, wenn man gleichgerichteten Strecken auf einer Geraden dieselben, entgegengerichteten entgegengesetzte Vorzeichen giebt. (Vergl. *Moebius* baryc. Calc. §. 1.). Folglich

$$g x_1 - f y_1 - H = f . Q_1 Q.$$

Nach (§. 3) ist dann

$$\frac{n_1}{g x_1 - f y_1 - H} = \frac{\cos yn}{f} = -\frac{n}{H} = -\frac{\sin xy}{\varrho}$$

$$n_1 = \frac{(H - g x_1 + f y_1)\sin xy}{\varrho}.$$

II. Von dem Punct, der Geraden und der Ebene im Raume.

1.

Sind $OP = x$, $PQ = y$, $QR = z$ die Coordinaten des Puncts R, parallel mit drei gegebenen Axen, und ist $OR = r$, so haben OR und die gebrochene Linie $OPQR$, auf die Richtungen r, x, y, z rechtwinklig projicirt, gleiche Projectionen, so dass

$$(1.) \qquad r = x \cos xr + y \cos yr + z \cos zr$$

$$(2.) \qquad \begin{cases} r \cos xr = x + y \cos xy + z \cos zx \\ r \cos yr = x \cos xy + y + z \cos yz \\ r \cos zr = x \cos zx + y \cos yz + z \end{cases}$$

ist. Hieraus folgt unmittelbar

$$(3.) \qquad \begin{cases} \cos xr : \cos yr : \cos zr : 1 = x + y \cos xy + z \cos zx \\ \qquad : x \cos xy + y + z \cos yz \\ \qquad : x \cos zx + y \cos yz + z \\ \qquad : r \end{cases}$$

und wenn man die vier Gleichungen beziehlich mit r, x, y, z multiplicirt und die Producte addirt:

$$(4.)\quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos xy + 2yz\cos yz + 2zx\cos zx.$$

Umgekehrt findet sich aus den Gleichungen (2):

$$(5.)\quad \begin{cases} x:y:z:r = \sin^2 yz\cos xr - \gamma\cos yr - \beta\cos zr \\ \qquad :\sin^2 rx\cos yr - \alpha\cos zr - \gamma\cos xr \\ \qquad :\sin^2 xy\cos zr - \beta\cos xr - \alpha\cos yr \\ \qquad :\delta^2, \end{cases}$$

wo $\alpha = \cos yz - \cos zx\cos xy$
$\beta = \cos zx - \cos xy\cos yz$
$\gamma = \cos xy - \cos yz\cos zx$
$\delta^2 = 1 + 2\cos xy\cos yz\cos zx - \cos^2 xy - \cos^2 yz - \cos^2 zx,$

und wenn man für x, y, z, r die proportionalen Werthe in die Gleichung (1) setzt:

$$(6.)\quad \begin{cases} \delta^2 = \sin^2 yz\cos^2 xr + \sin^2 zx\cos^2 yr + \sin^2 xy\cos^2 zr \\ \qquad - 2\gamma\cos xr\cos yr - 2\alpha\cos yr\cos zr - 2\beta\cos zr\cos xr. \end{cases}$$

Anm. Die Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, welche mit dem Coordinatensystem gegeben sind, lassen sich nach einer der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie wie folgt ausdrücken:

$$(7.)\quad \begin{cases} \alpha = \sin zx\sin xy\cos X, \\ \beta = \sin xy\sin yz\cos Y, \\ \gamma = \sin yz\sin zx\cos Z; \end{cases}$$

wo X, Y, Z die Winkel der Ecke sind, welche die positiven Axen zu Kanten hat, und zwar X der Winkel an der Kante x u. s. w. Ferner ist

$$(8.)\quad \begin{cases} \delta^2 = \sin^2 zx\sin^2 xy\sin^2 X \\ \quad = \sin^2 xy\sin^2 yz\sin^2 Y \\ \quad = \sin^2 yz\sin^2 zx\sin^2 Z \end{cases}$$

$$= 4\sin\tfrac{1}{2}(xy+yz+zx)\sin\tfrac{1}{2}(xy+yz-zx)\sin\tfrac{1}{2}(xy-yz+zx)\sin\tfrac{1}{2}(-xy+yz+zx)$$

so dass $\qquad \alpha:\beta:\gamma:\delta^2 = \cot X:\cot Y:\cot Z:1$ ist.

Diese Ausdrücke für δ bedeuten aber den Cubik-Inhalt des Rhomboëders, von welchem eine Ecke die positiven Axen zu Kanten hat und eine Kante die Längen-Einheit ist. Nimmt man z. B. als Grundfläche den in der Ebene xy enthaltenen Rhombus, dessen Quadrat-Inhalt $= \sin xy$, so ist die Höhe $= \sin zx\sin X$ oder $\sin yz\sin Y$. Dieselbe Höhe drückt auch der Sinus des Winkels aus, welchen die xy-Ebene mit der z-Richtung bildet, d. h. der Cosinus des Winkels, welchen

die z-Richtung mit der Normale auf der xy-Ebene bildet. Sind z', x', y' die Normalen auf den innern Seiten der Ebenen xy, yz, zx, welche die Ecke der positiven Axen umschliessen, so ist also auch

$$(9.)\quad \delta = \sin xy \cos zz' = \sin yz \cos xx' = \sin zx \cos yy'.$$

2.

Durch den Punct R (Fig. 4) werde eine Ebene normal auf OR gelegt, welche die Axen in K, E, M schneidet, so dass $OK = k$, $OE = l$, $OM = m$ ist. Die Flächen KEM und OEM haben gleiche Projectionen, wenn man sie rechtwinklig auf die Normal-Ebene zur x Richtung projicirt. Da nun r normal ist zu KEM, x' zu OEM (§. 1 Anm.), x zu der Projections-Ebene, so ist

$$KEM \cos xr = OEM \cos x'x \text{ u. s. w.}$$

$$(10.)\quad OEM:OMK:OKE:KEM = \frac{\cos xr}{\cos x'x}:\frac{\cos yr}{\cos y'y}:\frac{\cos zr}{\cos z'z}:1,$$

woraus sich durch Vermittelung von (9)

$$(11.)\quad OEM:OMK:OKE:KEM = \sin yz \cos xr : \sin zx \cos yr : \sin xy \cos zr : \delta$$

ergiebt. Setzt man diese Flächen für die ihnen proportionalen Werthe in die Gleichung (6), mit Rücksicht auf (7), so erhält man.

$$(12.)\quad KEM^2 = OEM^2 + OMK^2 + OKE^2 - 2OEM.OMK \cos Z \\ - 2OMK.OKE \cos X - 2OKE.OEM \cos Y.$$

Eben so haben OP und OR gleiche Projectionen, wenn man sie auf die Normale x' der Ebene PQR rechtwinklig projicirt; daher ist

$$x \cos x'x = r \cos x'r \text{ u. s. w.}$$

$$(13.)\quad x:y:z:r = \frac{\cos x'r}{\cos x'x}:\frac{\cos y'r}{\cos y'y}:\frac{\cos z'r}{\cos z'z}:1.$$

Verbindet man hiermit (10), so erhält man

$$x:y:z:r = \frac{OEM \cos x'r}{\cos xr}:\frac{OMK \cos y'r}{\cos yr}:\frac{OKE \cos z'r}{\cos zr}:KEM;$$

welche Gleichung auf die durch Elimination gefundene Gleichung (5) zurückgeführt werden kann. Wenn man nämlich die Seite rechts mit KEM multiplicirt, erhält man

$$KEM \cos x'r = OEM - OMK \cos Z - OKE \cos Y,$$

indem man KEM, OMK OKE rechtwinklig auf OEM projicirt. Nun ist

$$OKEM = \frac{1}{\sigma}.\delta klm = \tfrac{1}{3}r.KEM,$$

$$KEM = \frac{\delta klm}{2r},$$

und da
$$r = k\cos xr:$$

$$OEM = \tfrac{1}{2}lm\sin yz = \frac{klm\cos xr.\sin yz}{2r},$$

folglich

$$x:r = \sin yz(\sin yz.\cos xr - \sin zx.\cos Z.\cos yr - \sin xy.\cos Y.\cos zr):\delta^2$$

u. s. w.; was mit Rücksicht auf (7) zur Gleichung (5) führt.

Anm. Die Beziehungen, welche zwischen r, x, y, z aufgestellt wurden, sind dieselben, wie die zwischen *einer beliebigen Strecke im Raume und ihren Coordinaten*, d. h. den Projectionen der Strecke auf je eine Axe, parallel mit den beiden andern; z. B. $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$, wenn x, y, z die Coordinaten des Anfangspuncts und x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Endpuncts der Strecke sind. Dies leuchtet ein, wenn man durch den Anfangspunct der Strecke die Parallelen zu den Axen legt.

Andrerseits sind die Verhältnisse zwischen *KEM*, *OKE*, *OEM*, *OMK* auch diejenigen, in welchen *ein beliebiges Ebenenstück zu seinen Coordinaten* steht, d. h. zu den Projectionen des Ebenenstücks, parallel mit je einer Axe auf die Ebene der beiden andern. In der That ist die Entwicklung der Gleichung (10) für diesen allgemeinen Fall gültig. Wenn es sich bloss darum handelt, *KEM* aus den andern Seiten des Tetraëders *OKEM* und deren Winkeln zu berechnen, so genügen die Ausdrücke für *KEM*, *OEM* u. s. w. am Schlusse von (§. 2.) zur Aufstellung der Gleichung (11); woraus denn, wie oben, (12) abzuleiten ist; oder aber man findet die Gleichung (12), wie die analoge (4), dadurch, dass man je drei Seiten des Tetraëders auf die vierte (wie am Schlusse von §. 2) rechtwinklig projicirt.

Die Gleichungen (4 und 12) geben leicht die Beziehungen zwischen den *Diagonalen und Kanten* eines Parallelepipeds (vergl. z. B. *Légendre* Elem. der Geom. Anm. V. 5.), so wie die analogen Beziehungen zwischen *den Diagonaldreiecken und den Seiten* desselben.

Die Gleichung (6) enthält die Beziehung zwischen drei Kanten, nebst deren Winkeln, eines Tetraëders und dem Durchmesser der dem Tetraëder umgeschriebenen Kugel. Ist nämlich *OR* der Durchmesser einer Kugel, welche die Axen in *S*, *T*, *U* schneidet, und $OS = s$, $OT = t$, $OU = u$, so ist

$$\cos xr : \cos yr : \cos zr : 1 = s : t : u : r,$$ mithin nach (6):

$$n^2\delta^2 = s^2 \sin^2 yz + t^2 \sin^2 zx + u^2 \sin^2 xy - 2\gamma st - 2\alpha tu - 2\beta us.$$

(Vergl. *Légendre* Elem. d. Geom. Anm. V. 8. *Meier Hirch* geom. Aufg. II. §. 109.)

3.

Für alle Puncte (xyz) der Geraden OQ ist $x:y:z:r$ *constant.* Denn $x:r$ ist constant, weil die Ebene PQR, welche OP und OR begrenzt, immer parallel mit der yz Ebene ist u. s. w. Daher ist

$$x:y:z = f:g:h$$

die *Gleichung dieser Geraden.* Für die Coordinaten einer parallelen Strecke $x_1 - x'$, $y_1 - y'$, $z_1 - z'$ finden dieselben Verhältnisse Statt; daher ist

$$x_1 - x' : y_1 - y' : z_1 - z' = f:g:h$$

die *Gleichung einer Parallele* mit jener Geraden. Man kann sie wie folgt zerlegen:

$$gx' - fy' = H,$$
$$hy' - gz' = G,$$
$$fz' - hx' = F;$$

wo die Constanten F, G, H durch die Gleichung

$$fF + gG + hH = 0$$

verknüpft sind. Umgekehrt folgt, dass *zwei Gerade parallel* sind, wenn die Constanten ihrer Gleichungen f, g, h und f', g', h' der Gleichung

$$f':g':h' = f:g:h$$

genügen. Die *Richtung* einer Geraden ist demnach durch das Verhältniss $f:g:h$ bestimmt, und es lässt sich kurz sagen, eine Strecke habe die Richtung (fgh), wenn ihre Coordinaten sich wie $f:g:h$ verhalten.

Zur Bestimmung der *Winkel, welche die Gerade r mit den Axen bildet,* hat man, wenn eine Strecke derselben zu ihren Coordinaten sich wie $\varrho:f:g:h$ verhält, nach (4):

$$\varrho^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2fg\cos xy + 2gh\cos yz + 2hf\cos zx,$$

und nach (3):

$$\begin{aligned}\cos xr : \cos yr : \cos zr : 1 = & \, f + g\cos xy + h\cos zx \\ & : f\cos xy + g + h\cos yz \\ & : f\cos zx + g\cos yz + h \\ & : \varrho\end{aligned}$$

4.

Für alle Puncte $(x'y'z')$ einer Ebene, deren Normale durch den Anfang $OR = r$ ist und die Richtung (fgh) hat, ist

$$x'\cos xr + y'\cos yr + z'\cos zr = r;$$

wie sich ergiebt, wenn man die aus den Coordinaten eines Puncts der Ebene zusammengesetzte Linie $OP'Q'R'$ auf OR rechtwinklig projicirt. Daher ist die *Gleichung einer Ebene* von der Form

$$Ax' + Bg' + Cz' = D,$$

wobei, vermöge der Identität,

$$A:B:C:D = \cos xr : \cos yr : \cos zr : r \text{ ist.}$$

Die *Stellung der Ebene* wird durch die *Richtung* (f,g,h) *ihrer Normale* bekannt, deren Bestimmung nach (5) erfolgt, wenn man die proportionalen Werthe von $\cos xr$, $\cos yr$, $\cos zr$ einführt; nemlich:

$$\begin{aligned} f:g:h:\varrho = & A\sin^2 yz - \gamma B - \beta C \\ & :B\sin^2 zx - \alpha C - \gamma A \\ & :C\sin^2 xy - \beta A - \alpha B \\ & :\frac{\delta^2 D}{r}; \end{aligned}$$

während nach (6),

$$\frac{\delta^2 D^2}{r^2} = \left\{ \begin{array}{l} A^2\sin^2 yz + B^2\sin^2 zx + C^2\sin^2 xy \\ -2AB\gamma - 2BC\alpha - 2CA\beta \end{array} \right\} = \sigma^2,$$

folglich

$$\frac{D}{r} = \frac{\sigma}{\delta} \text{ ist.}$$

Anm. Der Werth von $\frac{\sigma}{\delta}$ verhält sich zu A, B, C wie der Durchmesser der Kugel, welche durch den Anfang geht und die Ebene berührt, zu den Strekken, welche die Kugel von den Axen abschneidet. (Vgl. §. 2. Anm.)

Der Werth von σ verhält sich zu $A\sin yz$, $B\sin zx$, $C\sin xy$ wie ein Stück der Ebene zu seinen Coordinaten (11); oder, $D\delta$ verhält sich zu $A\sin yz$, $B\sin zx$, $C\sin xy$, wie die dreifache Pyramide, deren Spitze der Anfang und deren Grundfläche ein Stück der Ebene ist, zu den Coordinaten des Ebenenstücks, weil $D\delta = r\sigma$ ist. Hieraus erklärt sich die eigenthümliche Bildung der Gleichung für die Ebene durch drei gegebene Puncte.

Ein anderer Weg, um die Gleichung einer Ebene zu finden, ist folgender. Man betrachte das Dreieck KEM (Fig. 4), welches die Ebene mit den Axen bestimmt, und einen beliebigen Punct der Ebene R. Schneidet KR die Gerade EM in S, so ist das Dreieck

$$EMR:EMK = SR:SK.$$

Da aber die Ebenen PQR und OEM parallel sind, so ist

$$SR:SK = OP:OK, \text{ u. s. w.}$$

folglich ist

$$\frac{x}{k}:\frac{y}{l}:\frac{z}{m}:1 = EMR:MKR:KER:KEM.$$

Nun ist, mit Rücksicht auf die Vorzeichen der Dreiecke, allgemein:

$$EMR+MKR+KER = KEM$$

(Vergl. *Möbius* baryc. Calc. §. 18), mithin

$$\frac{x}{k}+\frac{y}{l}+\frac{z}{m} = 1;$$

wo $k = \frac{r}{\cos xr}$ u. s. w. und

$$A:B:C:D = \frac{1}{k}:\frac{1}{l}:\frac{1}{m}:\frac{1}{r} \text{ ist.}$$

5.

Die Ebenen $(Ax+By+Cz = D)$ und $(A'x'+B'y'+C'z' = D')$ *sind parallel* und haben gleiche Stellung, wenn ihre Normalen gleiche Richtung haben; mithin ist (§. 4.)

$$A':B':C' = A:B:C.$$

Die *Stellung einer Ebene* wird demnach durch das Verhältniss $A:B:C$ bestimmt, und es lässt sich kurz sagen: eine Ebene habe die Stellung (ABC), wenn die Coordinaten eines Puncts der Ebene, der Reihe nach mit A, B, C multiplicirt, eine *constante Summe* geben, also die Cosinus der Winkel ihrer Normale mit den Axen sich wie $A:B:C$ und die Coordinaten eines Ebenenstücks wie $A\sin yz : B\sin zx : C\sin xy$ sich verhalten.

Die Richtung (fgh) ist in der Stellung (ABC) enthalten, wenn eine Gerade von der Richtung (fgh) mit einer Ebene von der Stellung (ABC) parallel ist. Legt man die Gerade und die Ebene durch den Anfang $(D = 0)$, so ist jeder Punct (xyz) der Geraden ein Punct der Ebene, mithin

$$x:y:z=f:g:h,$$
$$Ax+yB+Cz=0;$$

folglich ist

$$Af+Bg+Ch=0$$

die Bedingung, unter welcher die Richtung (fgh) in der Stellung (ABC) enthalten ist.

Ist in derselben Stellung die Richtung $(f'g'h')$ enthalten, so ist

$$Af'+Bg'+Ch'=0,$$

folglich

$$A:B:C=gh'-g'h:hf'-h'f:fg'-f'g.$$

Durch zwei Richtungen ist eine Stellung bestimmt; und umgekehrt.

Ist (fgh) die Richtung, welche die Stellungen (ABC) und $(A'B'C')$ gemein haben, so ist

$$f:g:h=BC'-B'C:CA'-C'A:AB'-A'B.$$

6.

Die Richtung (fgh) ist normal zur Stellung (ABC), wenn (§. 4.)

$$\begin{aligned} f:g:h:\varrho = & A\sin^2 yz-\gamma B-\beta C \\ & :B\sin^2 zx-\alpha C-\gamma A \\ & :C\sin^2 xy-\beta A-\alpha B \\ & :\delta\sigma, \end{aligned}$$

oder, mit Rücksicht auf (§. 3.),

$$\begin{aligned} A:B:C:\tfrac{\sigma}{\delta} = & f+g\cos xy+h\cos zx \\ & :f\cos xy+g+h\cos yz \\ & :f\cos zx+g\cos yz+h \\ & :\varrho \end{aligned}$$

ist; woraus sich

$$Af+Bg+Ch=\frac{\varrho\sigma}{\delta},$$

ergiebt.

Die Richtung (f'g'h') ist normal zur Richtung (fgh), wenn sie in der Stellung enthalten ist, welche zur Richtung (fgh) normal ist. Daher ist

$$\begin{aligned} & f'(f+g\cos xy+h\cos zx)+g'(f\cos xy+g+h\cos yz) \\ & +h'(f\cos zx'+g\cos yz+h)=0 \end{aligned}$$

oder

$$f'f + g'g + h'h + (f'g + fg')\cos xy + (g'h + gh')\cos yz + (h'f + hf')\cos zx = 0.$$

Die Stellung $(A'B'C')$ *ist normal zur Stellung* (ABC), wenn sie die Richtung enthält, welche zur Stellung (ABC) normal ist. Also ist

$$A'(A\sin^2 yz - \gamma B - \beta C) + B'(B\sin^2 zx - \alpha C - \gamma A) + C'(C\sin^2 xy - \beta A - \alpha B) = 0$$

oder

$$\begin{aligned} &AA'\sin^2 yz + BB'\sin^2 zx + CC'\sin^2 xy \\ &- \gamma(A'B + AB') - \alpha(B'C + BC') - \beta(C'A + CA') = 0. \end{aligned}$$

Anm. Die Richtungen, welche im System paralleler Coordinaten die einfachsten Beziehungen zur Stellung einer Ebene haben, sind die Richtungen der Geraden vom Anfang nach den Schwerpuncten der Dreiecke, in welchen die Axen von der Ebene und von derjenigen Kugel geschnitten werden, welche durch den Anfang geht und die Ebene berührt. Im ersten Falle ist

$$f:g:h = \frac{1}{A} : \frac{1}{B} : \frac{1}{C};$$

im zweiten Falle ist

$$f:g:h = A:B:C.$$

Denn die Richtung (fgh) ist die einer Diagonalen eines Parallelepipeds, dessen Kanten den Axen parallel sind und sich wie $f:g:h$ verhalten. Diese Kanten sind aber auch die auf den Axen von der Ebene des zugehörigen Diagonaldreiecks gemachten Abschnitte, welche sich im ersten Falle wie $\frac{1}{A} : \frac{1}{B} : \frac{1}{C}$, im andern wie $A:B:C$ verhalten. (§. 4. Anm.)

7.

Um den Winkel der Richtungen (fgh) und $(f'g'h')$ oder der zu ihnen normalen *Stellungen* (ABC) und $(A'B'C')$, z. B. ROR' (Fig. 5.) zu finden, projicire man rechtwinklig OR' und die gebrochene Linie $OP'Q'R'$ auf OR, oder OR und die gebrochene Linie $OPQR$ auf OR'. Dann entstehen die Gleichungen

$$(14.) \quad \begin{cases} r'\cos rr' = x'\cos xr + y'\cos yr + z'\cos zr, \\ r\cos rr' = x\cos xr' + y\cos yr' + z\cos zr'; \end{cases}$$

und hieraus findet man, mit Rücksicht auf (13):

$$(15.) \begin{cases} \cos rr' = \dfrac{\cos xr.\cos x'r'}{\cos xx'} + \dfrac{\cos yr.\cos y'r'}{\cos yy'} + \dfrac{\cos zr.\cos z'r'}{\cos zz'} \\ = \dfrac{\cos xr'.\cos x'r}{\cos xx'} + \dfrac{\cos yr'.\cos y'r}{\cos yy'} + \dfrac{\cos zr'.\cos z'r}{\cos zz'} \end{cases}$$

wo x', y', z' die in (§. 2) so bezeichneten normalen Richtungen zu den Coordinaten-Ebenen bedeuten. Um jedoch $\cos rr'$ durch $f, \ldots\ldots$ oder $A, \ldots\ldots$ auszudrücken, eliminire man aus einer der Gleichungen (14) entweder die $\cos xr, \ldots\ldots$ mit Hülfe von (3), welches

$$(16.)\left\{\begin{aligned} rr'\cos rr' &= -x'(x+y\cos xy+z\cos zx)\\ &\quad +y'(x\cos xy+y+z\cos yz)\\ &\quad +z'(x\cos zx+y\cos yz+z)\\ &= -xx'+yy'+zz'+(xy'+x'y)\cos xy\\ &\quad +(yz'+y'z)\cos yz+(zx'+z'x)\cos zx \end{aligned}\right.$$

giebt; oder die $x, \ldots\ldots$ mit Hülfe von (5), welches

$$(17.)\left\{\begin{aligned} \delta^2\cos rr' &= +\cos xr'(\cos xr.\sin^2 yz-\gamma\cos yr-\beta\cos zr)\\ &\quad +\cos yr'(\cos yr.\sin^2 zx-\alpha\cos zr-\gamma\cos xr)\\ &\quad +\cos zr'(\cos zr.\sin^2 xy-\beta\cos xr-\alpha\cos yr)\\ &= -\sin^2 yz\cos xr.\cos xr'+\sin^2 zx.\cos yr.\cos yr'+\sin^2 x.y\cos zr.\cos zr'\\ &\quad -\gamma(\cos xr.\cos yr'+\cos xr'.\cos yr)\\ &\quad -\alpha(\cos yr.\cos zr'+\cos yr'.\cos zr)\\ &\quad -\beta(\cos zr.\cos xr'+\cos zr'\cos xr) \end{aligned}\right.$$

giebt.

Nun ist (§. 3)

$$x:y:z:r=f:g:h:\varrho \text{ und}$$
$$x':y':z':r'=f':g':h':\varrho'$$

gegeben, folglich ist nach (16):

$$\begin{aligned}\varrho\varrho'\cos rr' &= ff'+gg'+hh'+(fg'+f'g)\cos xy\\ &\quad +(gh'+g'h)\cos yz+(hf'+h'f)\cos zx.\end{aligned}$$

Sind r und r' die Normalen der Stellungen (ABC) und $(A'B'C')$, so ist (§. 4):

$$\cos xr:\cos yr:\cos zr:1=A:B:C:\frac{\sigma}{\delta},$$

$$\cos xr':\cos yr':\cos zr':1=A':B':C':\frac{\sigma'}{\delta},$$

folglich nach (17):

$$\begin{aligned}\sigma\sigma'\cos rr' &= AA'\sin^2 yz+BB'\sin^2 zx+CC'\sin^2 xy\\ &\quad -\gamma(AB'+A'B)-\alpha(BC'+B'C)-\beta(CA'+C'A).\end{aligned}$$

Der *Winkel der Stellung* (ABC) *mit der Richtung* $(f'g'h')$ wird durch den Winkel rr' bekannt, den die Richtung $(f'g'h')$ mit der Richtung (fgh) bildet welche zur Stellung (ABC) normal ist. Dann ist

$$\cos xr : \cos yr : 1 = A : B : C : \frac{\sigma}{\delta}$$

$$x' : y' : z' : r' = f' : g' : h' : \varrho',$$

folglich nach (14)

$$\frac{\sigma\varrho'}{\delta} \cos rr' = Af' + Bg' + Ch'.$$

Diese Ausdrücke für $\cos rr'$ enthalten die früher gefundenen Bedingungen der parallelen und normalen Lage von Geraden und Ebenen.

8.

Für den Abstand r der Ebene ($Ax + By + Cz = D$) *vom Anfange,* hat man (§. 4)

$$r = \frac{D\delta}{\sigma}.$$

Für den Abstand s der parallelen Ebenen ($Ax + By + Cz = D$) und ($Ax' + By' + Cz' = D'$) folgt:

$$s = r - r' = \frac{(D - D')\delta}{\sigma}.$$

Für den Abstand s der Ebene ($Ax + By + Cz = D$) *von dem Puncte* ($x_1 y_1 z_1$) hat man, wenn $Q_1 R_1 = z_1$ von der Ebene in R geschnitten wird und r die normale Richtung zur Ebene hat:

$$s = R_1 R \cos zr.$$

Nun ist

$$Ax_1 + By_1 + C.Q_1 R = D,$$

folglich (Vergl. I. §. 5):

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 - D = C.R_1 R,$$

und da $\frac{\cos zn}{C} = \frac{\delta}{\sigma}$ (§. 4.) ist:

$$s = (D - Ax_1 - By_1 - Cz_1)\frac{\delta}{\sigma}.$$

9.

Um die übrigen hieher gehörigen Aufgaben zu lösen, sind die Ausdrücke von Ebenen nöthig, welche eine gegebene Gerade, eine Gerade und einen Punct, oder zwei Geraden enthalten.

Unter der Geraden (r) werden diejenigen verstanden, für welche

$$gx - fy = H,$$
$$hy - gz = F,$$
$$fz - hx = G$$

ist, wo $Ff + Gg + Hh = 0$ die Bedingung ist, welche die Richtung (fgh) als in der Stellung (FGH) enthalten bezeichnet (§. 5). Unter der Ebene (E) werde eine solche verstanden, deren Gleichung

$$Ax + By + Cz = D$$

ist. Die Gerade (r') und die Ebene (E') haben in ihren Gleichungen $f', g', h', F', G', H', A', B', C', D'$ statt $f, \ldots..$

Eine Ebene, welche die Gerade (r) *enthält*, hat, wie bekannt, die Gleichung

$$v(gx - fy - H) = hy - gz - F;$$

wo v eine unbestimmte Zahl ist. Damit ist (E) identisch, wenn

$$A : B : C : D = v : -\frac{vf + h}{g} : 1 : \frac{vH - F}{g}.$$

Hieraus folgt

$$Af + Bg + Ch = 0;$$

wie auch aus (§. 5) bekannt; und da $v = \frac{A}{C}$, $Ff + Gg + Hh = 0$, so ist

$$D = \frac{AH - CF}{g} = \frac{BF - AG}{h} = \frac{CG - BH}{f}.$$

Enthält die Ebene, ausser der Geraden (r), *noch den Punct* $(x_1 y_1 z_1)$, so ist auch

$$v(gx_1 - fy_1 - H) = hy_1 - gz_1 - F,$$

und die Einführung des Werths von v giebt

$$A : B : C : D = h_1 y - gz_1 - F : fz_1 - hx_1 - G : gx_1 - fy_1 - H : -(Fx_1 + Gy_1 + Hz_1).$$

Die Ebene enthält die Parallelen (r) und (r'), wenn

$$v(gx - fy - H') = hy - gz - F'$$

und daher

$$v(H' - H) = F' - F$$

ist. Dieser Werth von v giebt

$$A : B : C : D = F' - F : G' - G : H' - H : \frac{HF' - H'F}{g};$$

wo sich vermöge der Gleichungen

$$Ff + Gg + Hh = 0,$$
$$F'f + G'g + H'h = 0:$$

folgenden Ausdruck findet:

$$HF'-H'F:FG'-F'G:GH'-G'H=g:h:f.$$

Die Ebene enthält die Gerade (r) *und ist mit der Geraden* (r') *parallel*, wenn sie einer durch (r') gelegten Ebene

$$v(g'x-f'y-H')=h'y-g'z-F'$$

parallel ist, und daher ist vermöge (§. 5):

$$\frac{vf+h}{g}=\frac{vf'+h'}{g'}\quad,\quad v=\frac{gh'-g'h}{fg'-f'g}.$$

Dieser Werth von v giebt

$$A:B:C:D=gh'-g'h:hf'-h'f:fg'-f'g:Ff'+Gg'+Hh'.$$

Für die Ebene (E') durch (r'), parallel mit (r), ist

$$A':B':C':D'=g'h-gh':h'f-hf':f'g-fg':F'f+G'g+HK,$$

und daher ist die Bedingung, dass *die Geraden* (r) *und* (r') *in einer und derselben Ebene enthalten sind:*

$$Ff'+Gg'+Hh'+F'f+G'g+H'h=0.$$

Damit stimmt überein, dass zugleich

$$\frac{vf+h}{g}=\frac{vf'+h'}{g'}\quad,\quad\frac{vH-F}{g}=\frac{vH'-F'}{g'}$$

$$v=\frac{gh'-g'h}{fg'-f'g}=\frac{Fg'-F'g}{Hg'-H'g}\text{ ist.}$$

§. 10.

Der Abstand der Geraden (r) *von der parallelen Ebene* (E) ist der Abstand der Ebene (E'), welche durch (r) parallel mit (E) liegt, von (E). Es ist (§. 5 und 9):

$$D'=\frac{AH-CF}{g},$$

folglich (§. 8)

$$s=\frac{(gD-AH+CF)\delta}{g\sigma}.$$

Dasselbe ergiebt sich, wenn man in (§. 8) den Punct $(x_1y_1z_1)$ als einen Punct der Geraden (r) betrachtet.

Der Abstand der Geraden (r) *und* (r'), *welche nicht in einer und derselben Ebene enthalten sind*, ist der Abstand der Ebenen (E) und (E'), von welchen jene die Gerade (r) enthält und mit (r') parallel, diese die Gerade (r') enthält und mit (r) parallel ist.

Werden statt A, B, C die proportionalen Werthe (§. 9) $gh'-g'h$, $hf'-h'f$, $fg'-f'g$ gesetzt, so ist $(Ff'+Gg'+Hh')$ statt D und $-(F'f+G'g+H'h)$ statt D' zu setzen, folglich ist (§. 8):

$$s=(Ff'+Gg'+Hh'+F'f+G'g+H'h)\frac{\delta}{\sigma}.$$

Der Abstand des Puncts $(X_1Y_1Z_1)$ *von der Geraden* (r) ist der Abstand dieses Puncts von der Ebene (E), welche die Gerade (r) enthält und normal zur Ebene (E') des Puncts und der Geraden ist, oder welche die Richtung $(f'g'h')$ der Normale zu (E') enthält. Nun ist für die Ebene des Puncts und der Geraden (§. 9):

$$A':B':C'=hy_1-gz_1-F:fz_1-hx_1-G:gx_1-fy_1-H,$$

für ihre Normale (§. 6):

$$f':g':h'=A'\sin^2yz-\gamma B'-\beta C':B'\sin^2zx-\alpha C'-\gamma A':C'\sin^2xy-\beta A'-\gamma B',$$

und für die Ebene durch (r), welche die Richtung $(f'g'h')$ hat, (§. 9):

$$A:B:C:D=gh'-g'h:hf'-h'f:fg'-f'g:Ff'+Gg'+Hh'.$$

Hierdurch ist die Aufgabe nach (§. 8.) gelöset, indem man die proportionalen Werthe in die Gleichung

$$s=(D-Ax_1-By_1-Cz_1).\frac{\delta}{\sigma}$$

setzt.

Der Abstand der Parallelen (r) und (r') ist der Abstand der Ebenen (E) durch (r) und (E') durch (r'), welche normal zur Ebene (E'') der Geraden (r) und (r') sind, oder die Richtung $(f''g''h'')$ der Normale zu (E'') enthalten. Nun ist für (E''), nach (§. 9):

$$A'':B'':C''=F'-F:G'-G:H'-H;$$

für ihre Normale (§. 6):

$$f'':g'':h''=A''\sin^2yz-\gamma B'-\beta C':B''\sin^2zx-\alpha C''-\gamma A'':C''\sin^2xy-\beta A''-\gamma B'',$$

und für die parallelen Ebenen (E) und (E'), nach (§. 9):

$$A:B:C:D:D'=gh''-g''h:hf''-h''f:fg''-f''g:Ff''+Gg''+Hh''$$
$$:F'f''+G'g''+H'H'',$$

so dass nach (§. 8),

$$s=[(F'-F)f''+(G'-G)g''+(H'-H)h'']\frac{\delta}{\sigma} \text{ ist.}$$

Anm. Die Gerade (r'') *durch den Punct* $(x_1y_1z_1)$, *welche die Gerade* (r) *normal schneidet*, ist der Durchschnitt der Ebenen (E), normal zu (r) und (E'), durch den Punct $(x_1y_1z_1)$ und die Gerade (r). Daher ist (§§. 9. 6. 5.)

$$A':B':C'=hy_1-gz_1-F:fz_1-hx_1-G:gx_1-fy_1-H \text{ und}$$

$$A:B:C = f+g\cos xy+h\cos zx : g+h\cos yz+f\cos xy : h+f\cos zx+g\cos xz,$$
$$f'':g'':h'' = BC'-B'C : CA'-C'A : AB'-A'B\,.$$

Eine Gerade (r''), *welche die Parallelen* (r) und (r) *normal schneidet*, ist der Durchschnitt einer Normal-Ebene (E) zu (r) und der Ebene (E') der Parallelen. Daher ist

$$A':B':C':D' = F'-F : G'-G : H'-H : \frac{HF'-H'F}{g},$$
$$A:B:C = f+g\cos xy+h\cos zx : \text{u. s. w.}$$
$$f'':g'':h'' = BC'-B'C : \text{u. s. w.}$$

Dabei ist (r'') in (E') enthalten, wenn (§. 9)

$$D' = \frac{A'H''-C'F''}{g},$$

mithin

$$(F'-F)H''-(H'-H)F'' = \frac{g''}{g}(HF'-H'F) \text{ ist.}$$

Die Gerade (r''), *welche die Geraden* (r) und (r') *normal schneidet*, ist normal zu einer Ebene (E), mit welcher (r) und (r') parallel sind; daher (§§ 5. 6) sind

$$A:B:C = gh'-g'h : hf'-h'f : fg'-f'g\,,$$
$$f'':g'':h'' = A\sin^2 yz-\gamma B-\beta C : \text{u. s. w.}$$

die Bedingungen, dass (r'') die Geraden (r) und (r') schneidet, (§. 9); und

$$F''f+G''g+H''h+Ff''+Gg''+Hh'' = 0 \text{ und}$$
$$F''f'+G''g'+H''h'+F'f''+G'g''+H'h'' = 0$$

bestimmen F'', G'', H'', welche durch die Gleichung

$$F''f''+G''g''+H''h'' = 0$$

im Zusammenhange stehen.

Dresden, im October 1850.

9.

Beitrag zur Theorie der Bewegung der Räderfuhrwerke, mit Inbegriff der Dampfwagen.

(Von Herrn *J. P. G. v. Heim*, Königl. würtemb. Oberstlieutenant a. D.)

(Fortsetzung von Nr. 4 im vorigen Heft.)

Gleitende Bewegung.

§. 35.

Die Gleichungen (C) sind nicht mehr anwendbar, wenn die Reibung zwischen dem Umfange der Räder und dem Boden, oder auch zwischen dem Umfange eines Räderpaares und dem Boden, nicht mehr stark genug ist, um eine rollende Umdrehung zu gestatten. Dann muss den Gleichungen der Bewegung für den Fall, wenn zugleich $f_1 < \frac{R}{N}$ und $f_1 = \frac{R_1}{N_1}$ ist, indem R durch fN und R_1 durch $f_1 N_1$ ersetzt wird, nachfolgende, etwas veränderte Form gegeben werden.

Die *Gleichungen* (D) *der theilweise gleitenden Bewegung* des vierrädrigen Fuhrwerks erster Art sind nemlich in diesem Falle, die Achsen als am Körper des Fuhrwerks fest vorausgesetzt, für irgend einen Augenblick der Bewegung folgende:

1) $K\cos\beta - f.2N - f_1.2N_1 - (P + 2Q + 2Q_1)(\sin\alpha + X) = 0,$

2) $K\sin\beta + 2N + 2N_1 - (P + 2Q + 2Q_1)\cos\alpha = 0,$

3) $n\cos\beta.K + cP - r\sin\alpha.2Q + (e\cos\alpha + r_1\sin\alpha)2Q_1 - e.2N_1 - (hP + 2rQ + 2r_1Q_1)X - 2Q.U - 2Q_1.U_1 = 0,$

4) $2E(G + \varphi) - f.2N - 2Q(\sin\alpha + X) = 0,$

5) $-2E(1 - \varphi G) + 2N - 2Q\cos\alpha = 0,$

6) $fr.2N - \varphi\varrho.2E\sqrt{(1 + G^2)} - 2QU = 0,$

7) $2E_1(G_1 + \varphi_1) - f_1.2N_1 - 2Q_1(\sin\alpha + X) = 0,$

8) $-2E_1(1 - \varphi_1 G_1) + N2_1 - 2Q\cos\alpha = 0,$

9) $f_1 r_1.2N_1 - \varphi_1\varrho_1.2E_1\sqrt{(1 + G_1^2)} - 2Q_1U_1 = 0.$

§. 36.

Die neuen Unbekannten, zu deren Bestimmung die Gleichungen (D) dienen, sind E, E_1, G, G_1, N, N_1, U, U_1, X, und bei gleichförmiger fortschreitender Bewegung K statt X.

Nach dem Vorgange der rollenden Bewegung (§. 31) werde, um die Wurzelgrössen aus den Gleichungen (6 und 9) zu entfernen,

$$\frac{1-\varphi G}{\sqrt{(1+\varphi^2)}} \text{ statt } \sqrt{(1+G^2)} \quad , \qquad \frac{1-\varphi_1 G_1}{\sqrt{(1+\varphi_1^2)}} \text{ statt } \sqrt{(1+G_1^2)} ,$$

und zur Abkürzung

$$\frac{\varphi \varrho}{r\sqrt{(1+\varphi^2)}} = \mu , \qquad \frac{\varphi_1 \varrho_1}{r_1 \sqrt{(1+\varphi_1^2)}} = \mu_1 ,$$

$$2E(G+\varphi) = Y , \qquad 2E(1-\varphi G) = Z ,$$

$$2E_1(G_1+\varphi_1) = Y_1 , \qquad 2E_1(1-\varphi_1 G_1) = Z_1$$

gesetzt, wodurch sich

$$2E = \frac{Z+\varphi Y}{1+\varphi^2} , \qquad 2F = \frac{Y-\varphi Z}{1+\varphi^2} , \qquad G = \frac{Y-\varphi Z}{Z+\varphi Y} ,$$

$$2E_1 = \frac{Z_1+\varphi_1 Y_1}{1+\varphi_1^2} , \qquad 2F_1 = \frac{Y_1-\varphi_1 Z_1}{1+\varphi_1^2} , \qquad G_1 = \frac{Y_1-\varphi_1 Z_1}{Z_1+\varphi_1 Y_1}$$

ergiebt. Nimmt man nun bei der Entwickelung der Gleichungen zunächst die *fortschreitende Bewegung* als *gleichförmig*, oder $X = 0$ an, so ergiebt sich:

Aus (1, 4 u. 7) $Y + Y_1 = K\cos\beta - P\sin\alpha$,

Aus (2, 5 u. 8) $Z + Z_1 = P\cos\alpha - K\sin\beta$,

Aus (3, 5, 6, 8 u. 9) $[e+(f_1-\mu_1)r_1-(f-\mu)r]Z_1$

$= B + n\cos\beta . K - (f-\mu)r(P\cos\alpha - K\sin\beta)$,

wo B statt $cP - 2rQ(\sin\alpha + f\cos\alpha) - 2r_1 Q_1(\sin\alpha + f\cos\alpha)$ steht;

Aus (4 u. 5) $Y - fZ = 2Q(\sin\alpha + f\cos\alpha)$,

Aus (7 u. 8) $Y_1 - f_1 Z_1 = 2Q_1(\sin\alpha + f\cos\alpha)$;

woraus dann

$$V = \frac{\begin{matrix}[(e+(f_1-\mu_1)r_1)(\sin\alpha+f\cos\alpha)-(f-\mu)r(\sin\alpha+f_1\cos\alpha)]P-(f-f_1)B \\ +[e+(f_1-\mu_1)r_1-(f-\mu)r][2Q(\sin\alpha+f\cos\alpha)+2Q_1(\sin\alpha+f_1\cos\alpha)]\end{matrix}}{[e+(f_1-\mu_1)r_1](\cos\beta+f\sin\beta)-(f-\mu)r(\cos\beta+f_1\sin\beta)+(f-f_1)n\cos\beta} ,$$

folgt, wenn V den zur gleichförmig fortschreitenden Bewegung erforderlichen besondern Werth von K bezeichnet; und ferner:

$$Y = \frac{\begin{array}{l} f[(e+(f_1-\mu_1)r_1)P\cos(\alpha+\beta) - n\cos\beta\cdot P(\sin\alpha+f_1\cos\alpha) - B(\cos\beta+f_1\sin\beta)] \\ \quad + 2Q(\sin\alpha+f\cos\alpha)[(e+(f_1-\mu_1)r_1)\cos\beta - (f-\mu)r(\cos\beta+f_1\sin\beta) - f_1 n\cos\beta] \\ \quad - 2Q_1(\sin\alpha+f_1\cos\alpha)f[n\cos\beta + (e+(f_1-\mu_1)r_1)\sin\beta] \end{array}}{[e+(f_1-\mu_1)r_1](\cos\beta+f\sin\beta) - (f-\mu)r(\cos\beta+f_1\sin\beta) + (f-f_1)n\cos\beta},$$

$$Z = \frac{\begin{array}{l} [e+(f_1-\mu_1)r_1]P\cos(\alpha+\beta) - n\cos\beta.P(\sin\alpha+f_1\cos\alpha) - B(\cos\beta+f_1\sin\beta) \\ - [2Q(\sin\alpha+f\cos\alpha) + 2Q_1(\sin\alpha+f_1\cos\alpha)][n\cos\beta + (e+(f_1-\mu_1)r_1)\sin\beta] \end{array}}{[e+(f_1-\mu_1)r_1](\cos\beta+f\sin\beta) - (f-\mu)r(\cos\beta+f_1\sin\beta) + (f-f_1)n\cos\beta},$$

$$Y_1 = \frac{\begin{array}{l} [f(n\cos\beta.P(\sin\alpha+f\cos\alpha) - (f-\mu)rP\cos(\alpha+\beta) + B(\cos\beta+f\sin\beta)] \\ \quad + 2Q(\sin\alpha+f\cos\alpha)f_1[n\cos\beta + (f-\mu)r\sin\beta] + 2Q_1(\sin\alpha+f_1\cos\alpha) \\ \quad [(e+(f_1-\mu_1)r_1)(\cos\beta+f\sin\beta) - (f-\mu)r\cos\beta + fn\cos\beta] \end{array}}{[e+(f-\mu_1)r_1](\cos\beta+f\sin\beta) - (f-\mu)r(\cos\beta+f_1\sin\beta) + (f-f_1)n\cos\beta},$$

$$Z_1 = \frac{\begin{array}{l} n\cos\beta.P(\sin\alpha+f\cos\alpha) - (f-\mu)rP\cos(\alpha+\beta) + B(\cos\beta+f\sin\beta) \\ + [2Q(\sin\alpha+f\cos\alpha) + 2Q_1(\sin\alpha+f_1\cos\alpha)][n\cos\beta + (f-\mu)r\sin\beta] \end{array}}{[e+(f_1-\mu_1)r_1](\cos\beta+f\sin\beta) - (f-\mu)r[\cos\beta+f_1\sin\beta) + (f-f_1)n\cos\beta},$$

so wie:

Aus (5 u. 8) $2N = Z + 2Q\cos\alpha, \qquad 2N_1 = Z_1 + 2Q_1\cos\alpha,$

Aus (6 u. 9) $2QU = (f-\mu)rZ + fr\cos\alpha.2Q, \; 2Q_1U_1 = (f_1-\mu_1)r_1Z_1 + f_1r_1\cos\alpha.2Q_1.$

Die Verbesserung der Rad-Effects-Exponenten μ und μ_1 kann auf dem Wege allmähliger Annäherung wie bei der rollenden Bewegung (§. 31) geschehen, und zwar so, dass hier

$$\mathfrak{A} = 2rQ(\sin\alpha+f\cos\alpha)(\cos\beta+f_1\sin\beta),$$

$$\mathfrak{B} = f.\frac{[e+(f_1-\mu_1)r_1]P\cos(\alpha+\beta) - n\cos\beta.P(\sin\alpha+f_1\cos\alpha) - B(\cos\beta+f_1\sin\beta)}{\mathfrak{A}}$$

$$-f.\frac{2Q_1}{\mathfrak{A}}(\sin\alpha+f_1\cos\alpha)[n\cos\beta + (e+(f_1-\mu_1)r_1)\sin\beta]$$

$$+\frac{2Q}{\mathfrak{A}}(\sin\alpha+f\cos\alpha)[(e+(f_1-\mu_1)r_1)\cos\beta - fr(\cos\beta+f_1\sin\beta) - f_1n\cos\beta],$$

$$\mathfrak{C} = \frac{[e+(f_1-\mu_1)r_1]P\cos(\alpha+\beta) - n\cos\beta.P(\sin\alpha+f_1\cos\alpha) - B(\cos\beta+f_1\sin\beta)}{\mathfrak{A}}$$

$$-\left(\frac{2Q}{\mathfrak{A}}(\sin\alpha+f\cos\alpha) + \frac{2Q_1}{\mathfrak{A}}\sin\alpha + f_1\cos\alpha)\right)[n\cos\beta + e + (f_1-\mu_1)r_1\sin\beta],$$

$$\mathfrak{A}_1 = -2r_1Q_1(\sin\alpha+f_1\cos\alpha)(\cos\beta+f\sin\beta),$$

$$\mathfrak{B}_1 = f_1.\frac{n\cos\beta.P(\sin\alpha+f\cos\alpha) - (f-\mu)rP\cos(\alpha+\beta) + B(\cos\beta+f\sin\beta)}{\mathfrak{A}_1}$$

$$+f_1.\frac{2Q}{\mathfrak{A}_1}(\sin\alpha+f\cos\alpha)[n\cos\beta + (f-\mu)r\sin\beta]$$

$$+\frac{2Q_1}{\mathfrak{A}_1}(\sin\alpha+f_1\cos\alpha)[(e+f_1r_1)(\cos\beta+f\sin\beta) - (f-\mu)r\cos\beta + fn\cos\beta],$$

$$\mathfrak{C}_1 = \frac{n\cos\beta . P(\sin\alpha + f\cos\alpha) - (f-\mu) r P\cos(\alpha+\beta) + B(\cos\beta + f\sin\beta)}{\mathfrak{A}_1}$$
$$+ \left[\frac{2Q}{\mathfrak{A}_1}(\sin\alpha + f\cos\alpha) + \frac{2Q_1}{\mathfrak{A}_1}(\sin\alpha + f_1\cos\alpha)(n\cos\beta + (f-\mu) r\sin\beta)\right]$$

gesetzt wird.

§. 37.

Für die allgemeinere, *die beschleunigte Bewegung* umfassende Auflösung der Gleichungen (D) erhält man:

Aus (1, 4 und 7) $\quad Y + Y_1 = K\cos\beta - P(\sin\alpha + X)$,

Aus (2, 5 und 8) $\quad Z + Z_1 = P\cos\alpha - K\sin\beta$,

Aus (3, 5, 6, 8 u. 9) $\quad [e + (f_1 - \mu_1) r_1 - (f-\mu) r] Z_1 = C - (f-\mu) r (P\cos\alpha - K\sin\beta) - (hP + 2rQ + 2r_1 Q_1) X$,

wo C statt $n\cos\beta . K + cP - 2rQ(\sin\alpha + f\cos\alpha) - 2r_1 Q_1(\sin\alpha + f_1\cos\alpha)$ steht;

Aus (4 u. 5) $\quad Y - fZ = 2Q(\sin\alpha + f\cos\alpha + X)$,

Aus (7 u. 8) $\quad Y_1 - f_1 Z_1 = 2Q(\sin\alpha + f_1\cos\alpha + X)$,

und findet hieraus

$$X = \frac{[e + (f_1 - \mu_1) r_1 - (f-\mu) r][K(\cos\beta + f\sin\beta) - (P+2Q)(\sin\alpha + f\cos\alpha) - 2Q_1(\sin\alpha + f_1\cos\alpha)] + (f - f_1)[C - (f-\mu) r (P\cos\alpha - K\sin\beta)]}{[e + (f_1 - \mu_1) r_1 - (f-\mu) r](P + 2Q + 2Q_1) + (f - f_1)(hP + 2rQ + 2r_1 Q_1)},$$

$$Y = \frac{\begin{aligned} & f(P + 2Q_1)[(e + (f_1 - \mu_1) r_1)(P\cos\alpha - K\sin\beta) - C) + f(hP + 2rQ + 2r_1 Q_1)(K(\cos\beta + f_1\sin\beta) \\ & - (P + 2Q_1)(\sin\alpha + f_1\cos\alpha)] + 2Q[(e + (f_1 - \mu_1) r_1 - (f-\mu) r][K\cos\beta + fP\cos\alpha + (f - f_1) 2Q_1\cos\alpha] \\ & + f_1(f-\mu) r (P\cos\alpha - K\sin\beta) - fC - f(hP + 2rQ + 2r_1 Q_1)(\sin\alpha + f\cos\alpha)] \end{aligned}}{[e + (f_1 - \mu_1) r_1 - (f-\mu) r](P + 2Q + 2Q_1) + (f - f_1)(hP + 2rQ + 2r_1 Q_1)},$$

$$Z = \frac{\begin{aligned} & (P + 2Q + 2Q_1)[(e + (f_1 - \mu_1) r_1)(P\cos\alpha - K\sin\beta) - C] + (hP + 2rQ + 2r_1 Q_1)(K(\cos\beta + f\sin\beta) \\ & - (P + 2Q_1)(\sin\alpha + f\cos\alpha) - 2Q(\sin\alpha + f\cos\alpha)] \end{aligned}}{(e + (f_1 - \mu_1) r_1 - (f-\mu) r)(P + 2Q + 2Q_1) + (f - f_1)(hP + 2rQ + 2r_1 Q_1)},$$

$$Y_1 = \frac{\begin{aligned} & f_1(P + 2Q)[C - (f-\mu) r (P\cos\alpha - K\sin\beta)] - f(hP + 2rQ + 2r_1 Q_1)[K(\cos\beta + f\sin\beta) - (P + 2Q)(\sin\alpha + f\cos\alpha)] \\ & + 2Q_1[fC - f(e + (f_1 - \mu_1) r_1](P\cos\alpha - K\sin\beta) + (e + (f_1 - \mu_1) r_1 - (f-\mu) r)(K\cos\beta + f_1 P\cos\alpha \\ & - (f - f_1) 2Q\cos\alpha) + f(hP + 2rQ + 2r_1 Q_1)(\sin\alpha + f_1\cos\alpha)] \end{aligned}}{(e + (f_1 - \mu_1) r_1 - (f-\mu) r)(P + 2Q + 2Q_1) + (f - f_1)(hP + 2rQ + 2r_1 Q_1)},$$

$$Z_1 = \frac{\begin{aligned} & (P + 2Q + 2Q_1)[C - (f-\mu) r (P\cos\alpha - K\sin\beta)] - (hP + 2rQ + 2r_1 Q_1)[K(\cos\beta + f\sin\beta) \\ & - (P + 2Q)(\sin\alpha + f\cos\alpha) - 2Q_1(\sin\alpha + f_1\cos\alpha)] \end{aligned}}{[e + (f_1 - \mu_1) r_1 - (f-\mu) r](P + 2Q + 2Q_1) + (f - f_1)(hP + 2rQ + 2r_1 Q_1)};$$

wozu vermöge der Gleichungen (5, 6, 8 u. 9) noch

$$2N = Z + 2Q\cos\alpha \qquad 2N_1 = Z_1 + 2Q_1\cos\alpha,$$
$$2QU = (f-\mu)rZ + fr_1 2Q\cos\alpha \quad , \quad 2Q_1U_1 = (f_1-\mu_1)r_1Z_1 + f_1r_1.2Q_1\cos\alpha$$
kommt.

Zur Verbesserung der Exponenten μ und μ_1 auf dem (§. 31) angezeigten Wege ist hier:

$$\mathfrak{A} = 2rQ[K(\cos\beta + f_1\sin\beta) + (f-f_1)(P+2Q_1)\cos\alpha],$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{B} = {} & f.\frac{P+2Q_1}{\mathfrak{A}}[(e+(f_1-\mu_1)r_1)(P\cos\alpha - K\sin\beta) - C] \\ & + f.\frac{hP+2rQ+2r_1Q_1}{\mathfrak{A}}[K(\cos\beta + f_1\sin\beta) - (P+2Q_1)(\sin\alpha + f_1\cos\alpha)] \\ & + \frac{2Q}{\mathfrak{A}}[e+(f_1-\mu_1)r_1-fr)(K\cos\beta + fP\cos\alpha + (f-f_1)2Q_1\cos\alpha] + ff_1r(P\cos\alpha - K\sin\beta) \\ & - f_1C - f_1(hP + 2rQ + 2r_1Q_1)(\sin\alpha + f\cos\alpha)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{C} = {} & \frac{P+2Q+2Q_1}{\mathfrak{A}}[(e+(f_1-\mu_1)r_1)(P\cos\alpha - K\sin\beta) - C] \\ & + \frac{hP+2rQ+2r_1Q_1}{\mathfrak{A}}[K(\cos\beta + f_1\sin\beta) - (P+2Q_1)(\sin\alpha + f_1\cos\alpha) - 2Q(\sin\alpha + f\cos\alpha)],\end{aligned}$$

$$\mathfrak{A}_1 = -2r_1Q_1[K(\cos\beta + f\sin\beta) - (f-f_1)(P+2Q)\cos\alpha],$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_1 = {} & f.\frac{P+2Q}{\mathfrak{A}_1}[C - (f-\mu)r(P\cos\alpha - K\sin\beta)] \\ & - f_1.\frac{hP+2rQ+2r_1Q_1}{\mathfrak{A}}[K(\cos\beta + f\sin\beta) - (P+2Q)(\sin\alpha + f\cos\alpha)] \\ & + \frac{2Q_1}{\mathfrak{A}_1}[fC - f(e+f_1r_1)(P\cos\alpha - K\sin\beta) + (e+f_1r_1-(f-\mu)r)(K\cos + f_1P\cos\alpha) \\ & - (f-f_1)2Q\cos\alpha) + f(hP + 2rQ + 2r_1Q_1)(\sin\alpha + f\cos\alpha)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_1 = {} & \frac{P+2Q+2Q_1}{\mathfrak{A}_1}[C - (f-\mu)r(P\cos\alpha - K\sin\beta)] \\ & - \frac{hP+2rQ+2r_1Q_1}{\mathfrak{A}_1}[K(\cos\beta + f\sin\beta) - (P+2Q)(\sin\alpha + f\cos\alpha) \\ & - 2Q_1(\sin\alpha + f_1\cos\alpha)]\end{aligned}$$

zu setzen.

§. 38.

Wenn in den Ausdrücken des vorigen Paragraphen für beschleunigte fortschreitende Bewegung die Zugkraft K den Werth V für gleichförmige fortschreitende Bewegung erhält, so ist $X = 0$ und es müssen die übrigen jener Ausdrücke in die entsprechenden der letzteren Bewegung übergehen.

Auf Fuhrwerke, deren Achsen an den Rädern fest sind, findet die gleiche, sie betreffende Bemerkung, wie bei der rollenden Bewegung (§. 33), Anwendung.

Für das *Gleichgewicht der Ruhe* ergeben sich die Ausdrücke, aus denen (§. 36), wenn man in ihnen f, f_1 und φ, φ_1, also auch μ, μ_1, gleich Null setzt; ganz eben so, wie sie aus den Ausdrücken für die gleichförmige rollende Bewegung (§. 33) hervorgingen.

Wie die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ der fortschreitenden Bewegung und die Winkelgeschwindigkeiten u und u_1 der Räder für irgend einen Augenblick der Bewegung aus den Gleichungen $\frac{d^2x}{dt^2} = gX$, $\frac{du}{dt} = \frac{gU}{k^2}$ und $\frac{du_1}{dt} = \frac{gU_1}{k_1^2}$ sich finden, erläutert (§. 23).

Bei der Anwendung der aus den Gleichungen (D) entwickelten Ausdrücke wird man in den meisten Fällen $f = f_1$ setzen können. Dadurch werden diese Ausdrücke einfacher und es wird z. B.

$$X = \frac{K(\cos\beta + f\sin\beta) - (P + 2Q + 2Q_1)(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{P + 2Q + 2Q_1}, \quad V = (P + 2Q + 2Q_1)\frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\beta + f\sin\beta},$$

unabhängig von φ, r, ϱ, e u. s. w.; so wie die beiden letzteren Ausdrücke für $f = f_1$, aus den Gleichungen (D) (1 und 2) sich ergeben. Da jedoch der Reibungscoëfficient $f = f_1$ Werthe haben kann, bei denen die Bewegung des einen Räderpaars rollend, die des andern theilweise gleitend ist, in welchem Falle bei den Vorder- und Hinterrädern verschiedene Werthe desselben in Betracht kommen (§. 39), so müssen die Coëfficienten f und f_1 der beiden Räderpaare von Anfang an bei der Berechnung unterschieden werden.

Die Ausdrücke von X und V für $f = f_1$ zeigen, dass, wenn f zur theilweise gleitenden Bewegung klein genug und die Bahn stärker geneigt ist, als unter dem Winkel α, den die Gleichung $\sin\alpha + f\cos\alpha = 0$ giebt: dass dann das abwärts gehende vierrädrige Fuhrwerk, wie das zweirädrige, sich selbst überlassen, eine beschleunigte Bewegung annimmt.

§. 39.

Setzt man in den Gleichungen $U = (s - r)X$ und $U_1 = (s_1 - r_1)X$, welche aus den Bedingungsgleichungen der rollenden Bewegung $\frac{dx}{dt} = ru = r_1 u_1$ unmittelbar folgen, für U, U_1 und X die entsprechenden Ausdrücke (§. 37), so werden aus diesen beiden verbundenen Gleichungen $f = \frac{R}{N}$ und $f_1 = \frac{R_1}{N_1}$ gleich den Rei-

bungsquotienten für beschleunigte rollende Bewegung gefunden, und eben so finden sich aus den Gleichungen $U = U_1 = 0$, wenn U und U_1 die bezüglichen Ausdrücke (§. 36) bedeuten, $f = \frac{R}{N}$ und $f_1 = \frac{R_1}{N_1}$, gleich den Reibungsquotienten für gleichförmige rollende Bewegung.

Umgekehrt müssen daher die abgeleiteten Ausdrücke (§. 37), wenn man in ihnen anstatt f und f_1 die Reibungsquotienten $\frac{R}{N}$ und $\frac{R_1}{N_1}$ für beschleunigte rollende Bewegung, und eben so die Ausdrücke (§. 36), wenn man in ihnen statt f und f_1 die Quotienten $\frac{R}{N}$ und $\frac{R_1}{N_1}$ für gleichförmige rollende Bewegung setzt, in die entsprechenden Ausdrücke der beschleunigten oder gleichförmigen rollenden Bewegung übergehen.

Nach Beschaffenheit der Werthe von f und f_1 kann aber, die fortschreitende Bewegung mag beschleunigt oder gleichförmig sein, das eine Räderpaar eine rollende Bewegung annehmen, während das andere mit theilweise gleitender Umdrehung sich bewegt. Wenn z. B. bei beschleunigter fortschreitender Bewegung $\frac{R}{N} < \frac{R_1}{N_1}$ ist, und für einen bestimmten Werth von f_1, der kleiner ist als $\frac{R_1}{N_1}$, der Coefficient f, aus der Gleichung $U = (s - r)X$ berechnet, kleiner sich ergiebt als der wirkliche, der Reibung am Boden entsprechende Werth desselben, so ist die Umdrehung der Hinterräder rollend, und es ist bei der Anwendung der entwickelten Ausdrücke jener kleinere berechnete an die Stelle des grösseren wirklichen Werths zu setzen, weil nur solche Werthe des Reibungscoefficienten, welche den Reibungsquotienten für rollende Bewegung nicht übersteigen, zur Geltung kommen können (§. 2). Auf gleiche Weise muss man in dem Falle $\frac{R_1}{N_1} < \frac{R}{N}$, in Bezug auf die Vorderräder, wenn die Art ihrer Bewegung zweifelhaft ist, indem man den Coefficienten f_1 für bestimmte Werthe von f und K aus der Gleichung $U_1 = (s_1 - r_1)X$ berechnet, verfahren; und zu demselben Zwecke ist, wenn es sich um eine gleichförmige fortschreitende Bewegung handelt, von den beiden Gleichungen $U = 0$ und $U_1 = 0$ (unter U und U_1 die Ausdrücke (§. 36) verstanden), die eine, oder die andere anzuwenden. Die so berechneten Werthe dieser Coefficienten entsprechen demgemäss, auch wenn wie gewöhnlich $f = f_1$ ist, bei allmähliger Zunahme von f und f_1, Uebergängen aus der theilweise gleitenden in die rollende Bewegung, denen die beiden Räderpaare einzeln unterliegen; oder auch umgekehrt, bei allmähliger Abnahme von

f und f_1, Uebergängen der einzelnen Räderpaare aus der rollenden in die theilweise gleitende Bewegung; woraus zugleich erhellet, dass die Gleichungen (D) von allgemeinerer Geltung sind, als die Gleichungen (C).

Nur wenn zufällig $\frac{R}{N} = \frac{R_1}{N_1}$ und demnach $\frac{R}{N} = \frac{R+R_1}{N+N_1}$ oder vermöge der Gleichungen (C, 1 u. 2) $X = \frac{K\cos\beta - (P+2Q+2Q_1)(\sin\alpha + X)}{(P+2Q+2Q_1)\cos\alpha - K\sin\beta}$ ist, welche Gleichheit irgend eine besondre Beziehung zwischen den gegebenen Grössen der Gleichungen (C) voraussetzt, kann der Uebergang aus der theilweise gleitenden Bewegung in die rollende, und umgekehrt, bei beiden Räderpaaren zugleich Statt finden; und in diesem Falle werden durch $f = \frac{R}{N}$ die Ausdrücke von X für beiderlei Bewegungen (§. 32 u. 37), und eben so die Ausdrücke von V (§ 30 u. 36), einander gleich, weil sie es durch $f = \frac{R+R_1}{N+N_1}$ werden.

Für $f = f_1$ findet sich, X und V auf die theilweise gleitende Bewegung bezogen:

$$\frac{dX}{df} = \frac{K\sin\beta - (P+2Q+2Q_1)\cos\alpha}{P+2Q+2Q_1} \text{ wesentlich } negativ \text{ und}$$

$$\frac{dV}{df} = \frac{(P+2Q+2Q_1)\cos(\alpha+\beta)}{(\cos\beta + f\sin\beta)^2} \; positiv;$$

wonach mit abnehmendem f die Kraft V ebenfalls kleiner, X aber grösser wird.

Wie beim zweirädrigen Fuhrwerk (§. 25), kann auch beim vierrädrigen aus der beschleunigten rollenden Bewegung leichter ein Gleiten werden, als aus der gleichförmigen (§. 33); und eben so muss ferner Das, was in (§. 25) vom zweirädrigen Fuhrwerk in Betreff der Veränderungen der fortschreitenden und umdrehenden Bewegung, welche eine Abnahme des Reibungscoefficienten f zur Folge hat, über die Wirkung negativer Werthe von U, des Ueberganges der theilweise gleitenden Bewegung in die ganz gleitende und der nach diesem Uebergange eintretenden Verhältnisse gesagt ist, im Allgemeinen und beziehungsweise auch vom vierrädrigen Fuhrwerk gelten.

§. 40.

Für die *ganz gleitende* Bewegung *mit gesperrten Rädern* ist das vierrädrige Fuhrwerk erster Art, wenn nur ein Räderpaar gesperrt ist, als aus zwei Systemen, und wenn es beide sind, als aus einem einzigen Systeme bestehend zu betrachten. In letztem Falle bleiben nur die Gleichungen (D) (1, 2 u. 3), in

welchen U und U_1 gleich Null sind und welche zur Bestimmung der drei Grössen X, N, N_1 oder K, N, N_2 dienen, bestehen. Im ersten Falle fallen die drei Gleichungen, welche sich auf das gesperrte Räderpaar beziehen, weg, und es bleiben demnach sechs Gleichungen, welche gleichfalls zur Bestimmung der Unbekannten ausreichen, und nothwendig sind. Ist in eben diesem Falle die Bewegung der nicht gesperrten Räder, nach Massgabe des Werths des entsprechenden Reibungscoefficienten, wie sie es gewöhnlich sein wird, rollend, so muss man den sechs Gleichungen, in Uebereinstimmung mit den Grundsätzen, welche für die rollende Bewegung gelten (§. 28), eine etwas veränderte Gestalt geben. Eine vollständigere Auflösung dieser verschiedenen Fälle, welche dem Vorhergehenden nach keine Schwierigkeiten hat, übergehen wir, und bemerken nur, dass für $f=f_1$, vermöge der Gleichungen (D) (1 und 2), bei ganz oder theilweise (§. 38) gleitender Bewegung, oder auch bei ganz gleitender des einen und theilweise gleitender des andern Räderpaares,

$$X=\frac{K(\cos\beta+f\sin\beta)-(P+2Q+2Q_1)(\sin\alpha+f\cos\alpha)}{P+2Q+2Q_1},\quad V=(P+2Q+2Q_1)\frac{\sin\alpha+f\cos\alpha}{\cos\beta+f\sin\beta}$$

sich ergiebt.

Drittes Capitel.

Das vierrädrige Fuhrwerk zweiter Art (mit beweglicher Verbindung der Gestelle).

Bezeichnungen.

§. 41.

Das vierrädrige Fuhrwerk zweiter Art kann als aus zwei hinter einander angehängten zweirädrigen Fuhrwerken bestehend, oder jedes der beiden Gestelle desselben als ein vom andern trennbares zweirädriges Fuhrwerk angesehen werden.

Dieser Ansicht gemäss wird nach (§. 8) der Körper des einen oder des andern Gestelles mit der Last und den Rädern desselben als das erste, das Räderpaar als das zweite System des Gestelles angenommen, und es werden, indem man das Gewicht jedes Gestelles für sich in die Rechnung einführt, für das Hintergestell dieselben Bezeichnungen wie für das zweirädrige Fuhrwerk angewendet werden.

Die gegenseitige Einwirkung der beiden Gestelle auf einander findet an zwei verschiedenen Flächen und Berührungspuncten Statt.

An der einen, gewöhnlich in einigem Abstande hinter der Vorder-Achse befindlichen Fläche, liegt der vordere Theil des Hintergestells auf dem Vordergestell auf, und es trägt dieses einen Theil D des Gewichts P. Die Richtung des Drucks D wird, unabhängig von der Lage der Bahnlinie gegen den Horizont, lothrecht genommen, und die Lage des Stütz- oder Berührungspuncts durch die Abstände l, m, a, b in der Bedeutung wie beim zweirädrigen Fuhrwerk (§. 7) bestimmt.

Vermittels der andern Berührung übt das Vordergestell einen, als Zugkraft K auf das Hintergestell wirkenden Druck auf dieses auf. Die auf der Berührungsfläche normale Richtung dieses Drucks schneidet die Richtung der fortschreitenden Bewegung unter dem Winkel β, und trifft die beiden Geraden, welche in den Berührungspuncten des Hinterrades und des Vorderrades mit der Bahnlinie senkrecht auf dieser stehen, beziehungsweise in den Abständen n und $n_{,,}$ von den Berührungspuncten.

Der Winkel β ist, wie der Winkel α, in dem Sinne wie beim zweirädrigen Fuhrwerk (§. 7) genommen, und der Buchstabe e bedeutet, wie beim vierrädrigen Fuhrwerk erster Art (§. 27), den in seiner Projection auf die Bahnlinie genommenen Abstand zwischen den beiden Axenlinien. Demnach ist

$$n_{,,} - n = e \tang \beta.$$

Für das Vordergestell sollen ganz dieselben Bezeichnungen wie für das Hintergestell, nur zur Unterscheidung mit einem Beistrich wie z. B. P_{1}, dienen.

Rollende Bewegung.

§. 42.

Die auf die beiden Gestelle bezüglichen Gleichungen werden nach den (§. 8 u. 9) angeführten Grundsätzen, wie wenn jedes für sich ein zweirädriges Fuhrwerk wäre, gebildet, und der gegenseitigen Verbindung der Gestelle wird durch die in die Gleichungen beider zugleich eingehenden Grössen Rechnung getragen.

Die *Gleichungen* (E) *der rollenden Bewegung* des vierrädrigen Fuhrwerks zweiter Art, bei welcher Bewegung $\frac{dx}{dt} = ru = r_{1}u_{1}$ ist, sind daher, die Achse jedes Gestelles als mit dessen Körper fest verbunden vorausgesetzt, für irgend einen Augenblick der Bewegung folgende:

Hintergestell;

(1 bis 6) wie beim zweirädrigen Fuhrwerk (§. 9.)

Vordergestell;

$$(7)\ K_1\cos\beta_1 - K\cos\beta - (P_1 + 2Q_1 - D_1 + D)\sin\alpha - 2R_1 - (P_1 + 2Q_1)X = 0,$$
$$(8)\ K_1\sin\beta_1 - K\sin\beta - (P_1 + 2Q_1 - D_1 + D)\cos\alpha + 2N_1 = 0,$$
$$(9)\ n_1\cos\beta_1 . K_1 - n_{,,}\cos\beta . K + c_1 P_1 - r_1\sin\alpha . 2Q_1 - a_1 D_1 - (e\cos\alpha - a)D - (h_1 P_1 + 2s_1 Q_1)X = 0,$$
$$(10)\ 2E_1(G_1 + \varphi_1) - 2R_1 - 2Q_1(\sin\alpha + X) = 0,$$
$$(11)\ -2E_1(1 - \varphi_1 G_1) + 2N_1 - 2Q_1\cos\alpha = 0,$$
$$(12)\ 2r_1 R_1 - \varphi_1\varrho_1 . 2E_1\sqrt{(1 + G_1^2)} - 2Q_1(s_1 - r_1)X = 0.$$

§. 43.

Die Gleichungen (1 bis 6), welche ganz dieselben sind wie die Gleichungen (A. §. 9), und welche die sechs Unbekannten X, D, R, N, E, G enthalten, sind sowohl für beschleunigte als für gleichförmige Bewegung im Vorigen (§. 10 bis 14) vollständig aufgelöset, und der dabei befolgte Weg scheint ebenfalls der geeignetste zu der nun nöthigen Auflösung der Gleichungen (7 bis 12).

Die zu suchenden Grössen dieser Gleichungen sind X_1, D_1, R_1, N_1, E_1, G_1, von welchen X den Gleichungen beider Gestelle gemeinsam ist und dadurch bei beschleunigter Bewegung zur Elimination der weitern Unbekannten K dient.

Indem wieder $\sqrt{(1 + G_1^2)} = \frac{1 - \varphi_1 G_1}{\sqrt{(1 + \varphi_1^2)}}$ angenommen und

$$\mu_1 = \frac{\varphi_1 \varrho_1}{r_1\sqrt{(1 + \varphi_1^2)}},\quad Y_1 = 2E_1(G_1 + \varphi_1),\quad Z_1 = 2E_1(1 - \varphi_1 G_1)$$

eingeführt wird, wodurch sich

$$2E_1 = \frac{Z_1 + \varphi_1 Y_1}{1 + \varphi_1^2},\qquad 2F_1 = \frac{Y_1 - \varphi_1 Z_1}{1 + \varphi_1^2},\qquad E_1 = \frac{Y_1 - \varphi_1 Z_1}{Z_1 + \varphi_1 Y_1}$$

ergiebt, hat man, um zunächst zur Auflösung der Gleichungen (7 bis 12) in Bezug auf *gleichförmige Bewegung* zu schreiten, bei welcher Bewegung statt der als verschwindend wegfallenden Grösse X die Kraft K zu suchen und die aus den Gleichungen (1 bis 6) entwickelte Kraft K oder V, so wie D, als gegeben zu betrachten ist:

$$\text{Nach (7 u. 10)}\quad +Y_1 = K_1\cos\beta_1 - V\cos\beta - (P_1 + D - D_1)\sin\alpha,$$
$$\text{Nach (8 u. 11)}\quad -Z_1 = K_1\sin\beta_1 - V\sin\beta - (P_1 + D - D_1)\cos\alpha,$$

Nach (9) $\quad a_1(P_1 + D - D_1) = B_1 + n_{\prime\prime} \cos\beta . V - n_1 \cos\beta_1 . K_1,$

wo B_1 statt $b_1 P_1 + r_1 \sin\alpha . 2Q_1 + (a_1 - a + e\cos\alpha) D$ steht,

Nach (10 u. 12) $\quad Y_1 - \mu_1 Z_1 = 2Q_1 \sin\alpha$;

und findet hieraus, wenn V_1 den zur gleichförmigen Bewegung erforderlichen Werth von K_1 bezeichnet:

$$V_1 = \frac{[a_1(\cos\beta + \mu_1 \sin\beta) + n_{\prime\prime} \cos\beta(\sin\alpha + \mu_1 \cos\alpha)]\, V + (\sin\alpha + \mu_1 \cos\alpha) B_1 + a \sin\alpha . 2Q_1}{a_1(\cos\beta_1 + \mu_1 \sin\beta_1) + n_1 \cos\beta_1 (\sin\alpha + \mu_1 \cos\alpha)},$$

so wie

$$D_1 = P_1 + D - \frac{\begin{matrix}(\cos\beta_1 + \mu_1 \sin\beta_1) B_1 + [n_{\prime\prime} \cos\beta(\cos\beta_1 + \mu \sin\beta_1) \\ - n_1 \cos\beta_1 (\cos\beta + \mu_1 \sin\beta)]\, V - n_1 \cos\beta_1 . 2Q_1 \sin\alpha\end{matrix}}{a_1(\cos\beta_1 + \mu_1 \sin\beta_1) + n_1 \cos\beta_1 (\sin\alpha + \mu \cos\alpha)},$$

$$Y_1 = \frac{\begin{matrix}\mu_1 B_1 \cos(\alpha + \beta_1) + \mu_1 V[a_1 \sin(\beta - \beta_1) + n_{\prime\prime} \cos\beta \cos(\alpha + \beta_1) - r_1 \cos\beta_1 \cos(\alpha + \beta)] \\ + 2Q_1 \sin\alpha \cos\beta_1 (a_1 + n_1 \sin\alpha)\end{matrix}}{a_1(\cos\beta_1 + \mu_1 \sin\beta_1) + n_1 \cos\beta_1 (\sin\alpha + \mu_1 \cos\alpha)},$$

$$Z_1 = \frac{\begin{matrix}B_1 \cos(\alpha + \beta_1) + V[a_1 \sin(\beta - \beta_1) + n'' \cos\beta \cos(\alpha + \beta_1) - n_1 \cos\beta_1 \cos(\alpha + \beta)] \\ - 2Q_1 \sin\alpha (a_1 \sin\beta_1 + n_1 \cos\beta_1 \cos\alpha)\end{matrix}}{a_1(\cos\beta_1 + \mu_1 \sin\beta_1) + n_1 \cos\beta_1 (\sin\alpha + \mu_1 \cos\alpha)};$$

wozu vermöge (10 und 12) noch $\; 2R_1 = Y_1 - 2Q_1 \sin\alpha = \mu_1 Z_1$,

und vermöge (11) $\quad 2N_1 = Z_1 + 2Q_1 \cos\alpha$

kommt. Auch werden die hier entwickelten Ausdrücke, in welchen der Kürze wegen durchweg

$$V \text{ statt } \frac{(bP - r\sin\alpha . 2Q)(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + a\sin\alpha . 2Q}{a(\cos\beta + \mu\sin\beta) + n\cos\beta(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} \text{ und}$$

$$D \text{ statt } P - \frac{(bP + r\sin\alpha . 2Q)(\cos\beta + \mu\sin\beta) - n\cos\beta\sin\alpha . 2Q}{a(\cos\beta + \mu\sin\beta) + n\cos\beta(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$$

beibehalten ist, für jeden Werth des Winkels α *genau*, wenn man den Exponenten μ_1 durch das in (§. 13) angegebene Verfahren ergänzt, so dass die Buchstaben $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, von welchen

$$\mathfrak{A}_1 = B_1 \cos(\alpha + \beta_1) + [a_1 \sin(\beta - \beta_1) + n_{\prime\prime} \cos\beta \cos(\alpha + \beta_1) - n_1 \cos\beta_1 \cos(\alpha + \beta)] V,$$

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{2Q_1}{\mathfrak{A}_1} \sin\alpha \cos\beta_1 (a_1 + n_1 \sin\alpha),$$

$$\mathfrak{C}_1 = 1 - \frac{2Q_1}{\mathfrak{A}_1} \sin\alpha (a_1 \sin\beta_1 + n_1 \cos\beta_1 \cos\alpha)$$

ist, in demselben Sinne auf die Vorderräder bezogen werden, wie die $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ dort auf die Hinterräder bezogen wurden; und wenn man zugleich beachtet, für den in V und in D vorkommenden Exponenten μ selbst, das nach (§. 13) ergänzte μ zu setzen.

§. 44.

Sollen die Gleichungen (7 bis 12) allgemeiner in Bezug auf *beschleunigte Bewegung* aufgelöset werden, so geben, indem man die Grössen K und D als gegeben betrachtet, die Gleichungen

(7. u. 10.) $$+Y_1 = K_1\cos\beta_1 - K\cos\beta - (P_1+D-D_1)\sin\alpha - P_1 X,$$

(8. u. 11.) $$-Z_1 = K_1\sin\beta_1 - K\sin\beta - (P_1+D-D_1)\cos\alpha,$$

(9.) $$a_1(P_1+D-D_1) = C_1 + n_{\prime\prime}\cos\beta.K + (h_1 P_1 + 2s_1 Q_1)X,$$

(wo C_1 statt $b_1 P_1 + r_1\sin\alpha.2Q + (a_1 - a + e\cos\alpha)D - n_1\cos\beta_1.K_1$ gesetzt ist,)

(10. u. 12.) $$Y_1 - \mu_1 Z_1 = 2Q_1\left(\sin\alpha + \frac{s_1}{r_1}X\right),$$

und es findet sich hieraus:

$$X = \frac{a_1(\cos\beta_1+\mu_1\sin\beta_1)K_1 - [a_1(\cos\beta+\mu_1\sin\beta) + n_{\prime\prime}\cos\beta(\sin\alpha+\mu_1\cos\alpha)]K - C_1(\sin\alpha+\mu_1\cos\alpha) - a_1\sin\alpha.2Q_1}{-a_1\left(P_1+2\frac{s_1}{r_1}Q_1\right) + (h_1 P_1 + 2s_1 Q_1)(\sin\alpha+\mu_1\cos\alpha)},$$

$$D_1 = P_1 + D - \frac{\left(P_1+2\frac{s_1}{r_1}Q_1\right)(C_1 + n_{\prime\prime}\cos\beta.K) + (h_1 P_1 + 2s_1 Q_1)[K_1(\cos\beta_1+\mu_1\sin\beta_1) - K(\cos\beta+\mu_1\sin\beta) - 2Q\sin\alpha]}{a_1\left(P_1+2\frac{s_1}{r_1}Q_1\right) + (h_1 P_1 + 2s_1 Q_1)(\sin\alpha+\mu_1.\cos\alpha)},$$

$$Y_1 = \frac{n_1 P_1[C_1\cos\alpha + (a_1\sin\beta + n_{\prime\prime}\cos\beta.\cos\alpha)K - a_1\sin\beta_1 K_1] + \mu_1(h_1 P_1 + 2s_1 Q_1)[K_1\cos(\alpha+\beta_1) - K\cos(\alpha+\beta)] + 2Q_1[\sin\alpha(a_1 P_1 + (h_1 P_1 + 2s_1 Q_1)\sin\alpha] - \frac{s_1}{r_1}[C_1\sin\alpha + (a_1\cos\beta + n_{\prime\prime}\cos\beta\sin\alpha)K - a_1\cos\beta_1 K_1)]}{a_1\left(P_1+2\frac{s_1}{r_1}Q_1\right) + (h_1 P_1 + 2s_1 Q_1)(\sin\alpha+\mu_1\cos\alpha)},$$

$$Z_1 = \frac{\left(P_1+2\frac{s_1}{r_1}Q_1\right)[C_1\cos\alpha + (a_1\sin\beta + n_{\prime\prime}\cos\beta.\cos\alpha)K - a_1\sin\beta_1.K_1] + (h_1 P_1 + 2sQ_1)[K_1\cos(\alpha+\beta_1) - K\cos(\alpha+\beta) - 2Q_1\sin\alpha\cos\alpha]}{a_1\left(P_1+2\frac{s_1}{r_1}Q_1\right) + (h_1 P_1 + 2s_1 Q_1)(\sin\alpha+\mu_1\cos\alpha)};$$

durch welche Ausdrücke, worin

$$D \text{ nach (§. 14)} = P - \frac{\left(P+2\frac{s}{r}Q\right)C + (hP+2sQ)(K\cos\beta+\mu\sin\beta) - 2Q\sin\alpha)}{a\left(P+2\frac{s}{r}Q\right) + (hP+2sQ)(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}$$

ist, vermöge der Gleichungen (10, 11, 12) zugleich

$$2R_1 = Y_1 - 2Q_1(\sin\alpha + X) = \mu_1 Z_1 + 2Q_1\left(\frac{s_1}{r_1} - 1\right)X, \text{ und}$$
$$2N_1 = Z_1 - 2Q_1\cos\alpha$$

entwickelt werden.

Um endlich die Unbekannte K zu finden, hat man, da die beiden für das Hintergestell und das Vordergestell abgeleiteten Ausdrücke von X einander gleich sein müssen, die Gleichung:

$$\frac{\eta K-\zeta}{\varepsilon}=\frac{\eta_1 K_1-\eta' K-\zeta_1-(a_1-a+e\cos\alpha)D(\sin\alpha+\mu_1\cos\alpha)}{\varepsilon_1},$$

wenn der Kürze wegen

$$\begin{array}{lll}
\varepsilon & \text{statt} & a\left(P+2\frac{s}{r}Q\right)+(hP+2sQ)(\sin\alpha+\mu\cos\alpha), \\
\varepsilon_1 & „ & a_1\left(P_1+2\frac{s_1}{r_1}Q_1\right)+(h_1P_1+2s_1Q_1)(\sin\alpha+\mu_1\cos\alpha), \\
\zeta & „ & (bP+r\sin\alpha.2Q)\sin\alpha+\mu\cos\alpha)+a\sin\alpha.2Q, \\
\zeta_1 & „ & (b_1P_1+r_1\sin\alpha.2Q_1)(\sin\alpha+\mu_1\cos\alpha)+a_1\sin\alpha.2Q_1, \\
\eta & „ & a(\cos\beta+\mu\sin\beta)+n\cos\beta(\sin\alpha+\mu\cos\alpha), \\
\eta' & „ & a_1(\cos\beta+\mu_1\sin\beta)+n_{,,}\cos\beta(\sin\alpha+\mu_1\cos\alpha); \\
\eta_1 & „ & a_1(\cos\beta_1+\mu_1\sin\beta_1)+n_1\cos\beta_1(\sin\alpha+\mu_1\cos\alpha)
\end{array}$$

gesetzt, und D in der so eben angegebenen Bedeutung genommen wird; woraus sich

$$K=\frac{\begin{array}{c}\varepsilon(\eta_1K_1-\zeta_1)+\varepsilon_1\zeta-(a_1-a+e\cos\alpha)(\sin\alpha+\mu_1\cos\alpha)P\left[(a-b)\left(P+2\frac{s}{s}Q\right)+(h-r)\sin\alpha\cdot 2Q\right. \\ \left.+(hP+2sQ)(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)\right]\end{array}}{\varepsilon\eta'+\varepsilon_1\eta+(a_1-a+e\cos\alpha)(\sin\alpha+\mu_1\cos\alpha)\left[n\cos\beta\left(P+2\frac{s}{r}Q\right)-(hP+2sQ)(\cos\beta+\mu\sin\beta)\right]},$$

$$X=\frac{\begin{array}{c}\eta\eta_1K_1-\eta'\zeta-\eta\zeta_1-(a_1-a+e\cos\alpha)(\sin\alpha+\mu_1\cos\alpha)[((a-b)(\cos\beta+\mu\sin\beta)+n\cos\beta(\sin\alpha+\mu\cos\alpha))P \\ +(n\cos\beta-(r\cos\beta+\mu\sin\beta))\sin\alpha.2Q]\end{array}}{\varepsilon\eta'+\varepsilon_1\eta+(a_1-a+e\cos\alpha)(\sin\alpha+\mu_1\cos\alpha)\left[n\cos\beta\left(P+2\frac{s}{r}Q\right)-(hP+2sQ)(\cos\beta+\mu\sin\beta)\right]},$$

und sodann für $X=0$, wie es sein soll, $K_1=V_1$ (§. 43) findet.

Nachdem K eliminirt ist und die Ausdrücke von Y, Z, Y_1, Z_1, demgemäss auf die entsprechende Form mit gleichem Nenner gebracht sind, könnte man die Werthe der Exponenten μ und μ_1 mittels der beiden Gleichungen

$$(\mathfrak{B}_2+\mathfrak{C}^2)y^2+2\frac{\varphi\varrho}{r}\mathfrak{B}y=(1+\varphi^2)\mathfrak{C}^2-\left(\frac{\varphi\varrho}{r}\right)^2,$$

$$(\mathfrak{B}_1^2+\mathfrak{C}_1^2)y_1^2+2\frac{\varphi_1\varrho_1}{r_1}\mathfrak{B}_1y_1=(1+\varphi_1^2)\mathfrak{C}_1^2-\left(\frac{\varphi_1\varrho_1}{r_1}\right)^2 \quad (§.\ 31)$$

entweder durch gemeinschaftliche Auflösung derselben, oder durch das in (§. 31) angedeutete Näherungsverfahren genauer zu bestimmen suchen. Es wird jedoch zu Vermeidung grösserer Weitläufigkeit bei numerischen Berechnungen besser sein, ohne die Grösse K wirklich zu eliminiren, die Werthe $\mu=\frac{\varphi\varrho}{r\sqrt{(1+\varphi^2)}}$ und $\mu_1=\frac{\varphi_1\varrho_1}{r_1\sqrt{(1+\varphi_1^2)}}$ in ihr fürs erste beizubehalten, unter Anwendung des so berechneten Werthes von K die Exponenten mittels der beiden letzteren nach (§. 13) einzeln aufgelöseten Gleichungen zu verbessern, dann K genauer zu be-

rechnen, und so auf dem Wege allmähliger Annäherung, wenn es nöthig ist, weiter fortzuschreiten. Die auf das Hintergestell bezüglichen Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sind in (§. 14) angegeben, und in Bezug auf das Vordergestell hat man bei diesem Verfahren:

$$\mathfrak{A}_1 = P_1[C_1\cos\alpha + (a_1\sin\beta + n_{,,}\cos\beta\cos\alpha)K - a_1\sin\beta_1 . K_1) + (h_1P_1 + 2s_1Q_1)(K_1\cos(\alpha+\beta_1) - K\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{2Q_1}{\mathfrak{A}_1}[\sin\alpha(a_1P_1 + (h_1P_1 + 2s_1Q_1)\sin\alpha) + \frac{s_1}{r_1}[a_1\cos\beta_1 K_1 - (a_1 + n_{,,}\sin\alpha)\cos\beta . K - C_1\sin\alpha)],$$

$$\mathfrak{C}_1 = 1 - \frac{2Q_1}{\mathfrak{A}_1}[\sin\alpha\cos\alpha(h_1P_1 + 2s_1Q_1) - \frac{s_1}{r_1}(C_1\cos\alpha + (a_1\sin\beta + n_{,,}\cos\beta\cos\alpha)K - a_1\sin\beta_1 K)]$$

zu setzen.

§. 45.

Die erläuternden Bemerkungen (§§. 15 bis 19) in Betreff des zweirädrigen Fuhrwerks gelten zunächst für das Hintergestell und finden ohne wesentliche Schwierigkeit ihre beziehungsweise Anwendung auch auf das Vordergestell, oder auf das ganze vierrädrige Fuhrwerk zweiter Art.

Durch die Zerlegung von K_1 in $V_1 + v_1$ findet sich nach (§. 15), wenn $[\mathfrak{Z}_1]$ der Zähler, ε_1 der Nenner der Grösse Z_1 (§. 43), $\mathfrak{Z}_1$ der Zähler der Grösse Z_1 (§. 44) ist:

$$\frac{R_1}{N_1} = \left[\frac{R_1}{N_1}\right] + 2Q_1\varrho_1 . \frac{(\frac{s_1}{r_1} - 1)([\mathfrak{Z}_1] + 2Q_1 . \varepsilon_1\cos\alpha) + \mu_1\cos\alpha\frac{d\mathfrak{Z}_1}{dK_1}}{\left[a_1(P_1 + 2\frac{s_1}{r_1}Q_1) + (h_1P_1 + 2s_1Q_1)(\sin\alpha + \mu_1\cos\alpha)\right][2N_1]^2}$$

$$= \left[\frac{R_1}{N_1}\right] + 2Q_1\varrho_1 . \frac{\begin{array}{l}(\frac{s_1}{r_1} - 1)[(B_1\cos(\alpha+\beta_1) + (a_1\sin(\beta-\beta_1) + n_{,,}\cos\beta\cos(\alpha+\beta_1) - n_1\cos\beta_1\cos(\alpha+\beta))V \\ + a_1\cos(\alpha+\beta_1) . 2Q_1] + [\mu_1\cos\alpha((h_1P_1 + 2s_1Q_1)\cos(\alpha+\beta_1) \\ - (a_1\sin\beta_1 + n_1\cos\beta_1\cos\alpha)(P_1 + 2Q_1)]\end{array}}{\left[a_1(P_1 + 2\frac{s_1}{r}Q_1) + (h_1P_1 + 2s_1Q_1)(\sin\alpha + \mu_1\cos\alpha)\right][2N_1]^2}$$

Da unter den aus den Gleichungen (E) entwickelten Ausdrücken nur die von E_1 und F_1 den Reibungscoefficienten φ_1 für sich (anders als in μ_1) enthalten, so hat dieser Umstand nur auf die beiden letzteren, wenn die Achsen an den Rädern fest sind, Einfluss. (Wegen der Bedeutung von P, P_1, Q, Q_1, s und s_1 ist indessen hier Aehnliches wie zu (§. 16) zu bemerken.)

Welche Grössen bei der Anwendung der Ausdrücke auf die Bewegung rückwärts ihre Vorzeichen ändern, erhellet aus (§. 18 u. 34).

§. 46.

Der besondere Fall, wenn D_1 gleich Null ist, erheischt noch eine nähere Betrachtung.

Eine einfache Ueberlegung zeigt, dass wenn $D_1 = 0$ ist, d. h. wenn die Lastverhältnisse des vierrädrigen Fuhrwerks zweiter Art so beschaffen sind, dass

das Vordergestell ausser den Rädern keiner weitern Unterstützung bedarf, dass man die Art des Zusammenhanges beider Gestelle, wodurch die beiden Arten der vierrädrigen Fuhrwerke sich unterscheiden, keinen Einfluss weder auf die Bewegung dieser Fuhrwerke und die dazu erforderliche Zugkraft, noch auf die sonstigen Gleichgewichtsverhältnisse derselben haben kann; und eben Dies lässt sich, was die rollende Bewegung der beiderlei Fuhrwerke betrifft, durch eine vergleichende Zusammenstellung der Gleichungen (C) und (E) nachweisen.

Wenn nämlich, um die abweichenden Bedeutungen der gleichen Zeichen in diesen beiden Gruppen von Gleichungen zu unterscheiden, in den Gleichungen (C) (§. 28)

n durch n', p durch p', c durch c', h durch h', K durch K_1, β durch β_1 ersetzt wird, so sind die Gleichungen (C 1, 2 u. 3) wie folgt zu schreiben:

(1) $K_1 \cos\beta_1 - 2R - 2R_1 - (P' + 2Q + 2Q_1)(\sin\alpha + X) = 0,$

(2) $K_1 \sin\beta_1 + 2N + 2N_1 - (P' + 2Q + 2Q_1)\cos\alpha \qquad = 0,$

(3) $n' \cos\beta_1 K_1 + c'P' - r\sin\alpha 2Q + (e\cos\alpha - r_1 \sin\alpha) 2Q_1 - e.2N_1 - (h'P' + 2sQ + 2s_1 Q_1)X = 0.$

Für $D_1 = 0$ erhält man aus den Gleichungen (E) (1 u. 7) durch Addition:

$$K_1 \cos\beta_1 - 2R - 2R_1 - (P + P_1 + 2Q + 2Q_1)(\sin\alpha + X) = 0;$$

eben so aus den Gleichungen (E) (2 u. 8):

$$K_1 \sin\beta_1 + 2N + 2N_1 - (P + P_1 + 2Q + 2Q_1)\cos\alpha = 0,$$

und aus der Summe der Gleichungen (E) (3 und 9), nämlich aus

$$n_1 \cos\beta_1 K_1 - (n_{\prime\prime} - n)\cos\beta . K + cP + c_1 P_1 - 2(rQ + r_1 Q_1)\sin\alpha - e\cos\alpha . D - (hP + h_1 P_1 + 2sQ + 2s_1 Q_1)X = 0,$$

wenn man das Product der Gleichung (E) (8) in den Abstand e, d. h.

$$e \sin\beta_1 . K_1 - e\sin\beta . K - e\cos\alpha . P_1 - e\cos\alpha . 2Q_1 - e\cos\alpha . D + e.2N_1 = 0,$$

davon abzieht, die Restgleichung:

$$(n_1 \cos\beta_1 - e\sin\beta_1) K_1 + (e\sin\beta - (n_{\prime\prime} - n)\cos\beta) K + cP + (e\cos\alpha + c_1) P_1 - r\sin\alpha . 2Q$$
$$+ (e\cos\alpha - r_1 \sin\alpha) 2Q_1 - e.2N_1 - (hP + h_1 P_1 + 2sQ + 2s_1 Q_1) X = 0;$$

und diese drei abgeleiteten Gleichungen fallen mit den obigen Gleichungen (C) (1, 2 u. 3) zusammen. Denn es ist $P + P_1 = P'$, $cP + (e\cos\alpha + c_1)P_1 = c'P'$, $hP + h_1 P_1 = hP''$, $e\sin\beta = (n_{\prime\prime} - n)\cos\beta = 0$ (§. 41), $n_1 \cos\beta_1 - e\sin\beta_1 = n'\cos\beta_1$, da $n_1 - \operatorname{ctang}\beta_1 = n'$ ist; und β_1 und K_1 (§. 42) bedeuten eben Das, wie β und K in (§. 28 u. folg.)

Die Gleichungen (E) lassen sich demnach, da die den Rädersystemen angehörigen sechs Gleichungen in den beiden Gruppen dieselben sind, für $D_1 = 0$ ganz auf die Gleichungen (C) zurückführen.

Hieraus folgt aber, dass, wenn die Werthe der in den Gleichungen (E) enthaltenen Grössen so beschaffen sind, dass sie die Grösse D_1 zu Null machen, der aus den Gleichungen (E), sei es für beschleunigte, oder für gleichförmige Bewegung entwickelte Ausdruck irgend einer der gesuchten Grössen mit dem entsprechenden Ausdruck der gleichnamigen Grösse, wie er aus den Gleichungen (C) sich ergiebt, gleichbedeutend sein und bei der Anwendung der für diese Gleichungen so eben angenommenen Bezeichnungen auf denselben zurückgehen muss, so dass die in den Gleichungen (C) nicht vorkommenden Grössen der Gleichungen (E), welche Werthe auch die gesuchten Grössen D und K oder V der letzteren Gleichungen erhalten mögen, aus jenem Ausdrucke herausfallen. Ist z. B. $\mathfrak{Z}$ der Zähler, $\mathfrak{N}$ der Nenner des Ausdrucks von X in (§. 32) und $\mathfrak{Z}_1$ der Zähler, $\mathfrak{N}_1$ der Nenner des Ausdrucks von X in (§. 44), und stellt $\mathfrak{D}_1$ eine mit D_1 zugleich verschwindende Function von D_1 vor, so muss $\mathfrak{Z}_1\mathfrak{N} = \mathfrak{Z}\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{D}_1$ sein, so dass, wenn $D_1 = 0$ ist, $\frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{N}_1} = \frac{\mathfrak{Z}_1\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}}$ in $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{N}}$ übergeht. Es folgt, dass diese Uebergänge der dem vierrädrigen Fuhrwerk zweiter Art angehörigen Ausdrücke in die des vierrädrigen Fuhrwerks erster Art für $D_1 = 0$ Statt finden müssen, die Verhältnisszahlen μ, μ_1 mögen näherungsweise gleich $\frac{\varphi\varrho}{r\sqrt{(1+\varphi^2)}}$, $\frac{\varphi_1\varrho_1}{r_1(\sqrt{1+\varphi_1^2})}$, oder in der ergänzten und den Gleichungen (C) und (E genau entsprechenden Bedeutung angenommen werden, und dass daher die aus den Gleichungen (C) abgeleiteten Ausdrücke, wenn $D_1 = 0$ ist, ebenfalls auf das vierrädrige Fuhrwerk zweiter Art anwendbar sind; dass aber umgekehrt auch die aus den Gleichungen (E) hervorgehenden Ausdrücke der unbekannten Grössen auf das vierrädrige Fuhrwerk erster Art sich müssen anwenden lassen, indem man eine der beiden Grössen P, P_1, deren Summe gegeben ist, oder eine andere, von den in die Gleichungen (C) nicht eingehenden Grössen, welche die Gleichungen (E) als bekannt voraussetzen, der durch die Gleichung $D_1 = 0$ gegebenen Beziehung zwischen diesen Grössen gemäss, und übrigens eben diese Grössen, mit Rücksicht jedoch auf deren gegenseitige Abhängigkeit, willkührlich annimmt; wodurch nach (§. 43) ein Mittel gegeben ist, die Exponenten μ und μ_1 für den Zustand der gleichförmigen Bewegung auch des vierrädrigen Fuhrwerks erster Art, welches als ein besonderer Fall des vierrädrigen Fuhrwerks zweiter Art betrachtet werden kann, so zu bestimmen, dass sie den Gleichungen (C) vollkommen genügen.

Und eben diese Folgerungen müssen, wie leicht erhellet, auch dann noch ihre Richtigkeit behalten, wenn die Druckkräfte D, D_1 in einer andern als der verticalen Richtung wirkend angenommen werden.

§. 47.

Bei dem vierrädrigen Fuhrwerk zweiter Art wird, wenn im Zustande der Ruhe D_1 gleich Null ist, das statische Gleichgewicht zwischen den beiden Gestellen durch Vermittlung des Drucks D hergestellt, den sie an einer bestimmten kleinen Fläche, welche als ihr Berührungspunct gelten kann, auf einander ausüben. Bei dem vierrädrigem Fuhrwerke erster Art kann man dagegen irgend einen beliebigen Punct zwischen den beiden Achsenlinien als denjenigen betrachten, in welchem dieser das Gleichgewicht der Gestelle vermittelnde gegenseitige Druck Statt hat, und zu eben dieser Art auch diejenige Art von Fuhrwerken zählen, welche, wie die Fuhrwerke mit sogenannten *Reibscheiten*, zwei verschiedene, in einigem Abstande von einander liegende, dergleichen Berührungs- oder Stützpuncte haben. Jedem zwischen den Axenlinien befindlichen Puncte des vierrädrigen Fuhrwerks entspricht nämlich ein gewisses Verhältniss zwischen den Gewichten P, P_1, Q, Q_1, durch welches diese sich, mittels des Drucks D an demselben, für sich allein, ohne die Beihülfe eines andern vor der Vorderachse (am Tragepunct des Gespanns) wirkenden Drucks D_1, das Gleichgewicht halten; und bei den vierrädrigen Fuhrwerken erster Art kann man dieses Verhältniss, wodurch im Zustande der Ruhe D_1 gleich Null wird, als für jeden der zwischen den Axlinien enthaltenen Puncte, bei den Fuhrwerken mit *Reibscheiten* aber als für jeden der zwischen den beiden Stützpuncten liegenden Puncte, so wie für diese Stützpuncte selbst, bestehend betrachten. Für die Fuhrwerke zweiter Art giebt es nur ein einziges Gleichgewichtsverhältniss der Gewichte P, P_1, Q,Q_1, oder nur eine sehr beschränkte Zahl solcher Verhältnisse; für die Fuhrwerke erster Art dagegen liegen diese Gleichgewichtsverhältnisse innerhalb eines gewissen grössern oder kleinern Bereichs, den ihre Gesammtheit einnimmt.

Zugleich mag hier noch erwähnt werden, dass nach Art des Baues der vierrädrigen Fuhrwerke zweiter Art, nicht selten die Abstände e und m, oder auch e und a, zusammenfallen, und dass ferner bei einem und demselben Fuhrwerk die Berührungspuncte beider Gestelle selbst, nach der Neigung des Bodens, der Art der Belastung und andern Umständen einigem Wechsel der Stellung unterworfen sein können.

Gleitende Bewegung.

§. 48.

Für das vierrädrige Fuhrwerk zweiter Art gestalten sich

Die *Gleichungen* (F.) *der theilweise gleitenden Bewegung*

aus denen der rollenden Bewegung (E), indem man in diesen allgemeiner fN und $f_1 N_1$ statt R und R_1 setzt, wie folgt:

Hintergestell

(1 bis 6), wie beim zweirädrigen Fuhrwerk (§. 20).

Vordergestell

(7.) $K_1 \cos\beta_1 - K\cos\beta - (P_1 + 2Q_1 - D_1 + D)\sin\alpha - f_1 . 2N_1 - (P_1 + 2Q_1)X = 0,$

(8.) $K_1 \sin\beta_1 - K\sin\beta - (P_1 + 2Q_1 - D_1 + D)\cos\alpha + 2N_1 \qquad = 0,$

(9.) $n_1 \cos\beta_1 . K_1 - n_{,,} \cos\beta . K + c_1 P_1 - r_1 \sin\alpha . 2Q - a_1 D_1$
$\qquad - (e\cos\alpha - a)D - (h_1 P_1 + 2r_1 Q_1)X - 2Q_1 . U_1 = 0,$

(10.) $2E_1(G_1 + \varphi_1) - f_1 . 2N_1 - 2Q_1(\sin\alpha + X) = 0,$

(11.) $-2E_1(1 - \varphi_1 G_1) + 2$ [illegible] $_1 - 2Q_1 \cos\alpha \qquad = 0,$

(12.) $f_1 r_1 . 2N_1 - \varphi_1 \varrho_1 . 2L$ [illegible] $1 + G_1^2) - 2Q_1 . U_1 = 0.$

§. 49.

Die Gleichungen (F.) (1 bis 6) finden sich, als mit den Gleichungen (B) des zweirädrigen Fuhrwerks (§. 20) völlig übereinstimmend, im Vorigen bereits aufgelöset, und der gleiche Gang der Entwickelung, welcher zu dieser Auflösung geführt hat, wird hier auch auf die übrigen Gleichungen (7 bis 12) angewendet werden.

Wird in der Gleichung (12) wieder $\frac{1 - \varphi_1 G_1}{\sqrt{(1 + \varphi_1^2)}}$ statt $\sqrt{(1 + G_1^2)}$ gesetzt und von den Buchstaben μ_1, Y_1 und Z_1 wie in (§. 43) Gebrauch gemacht, so findet sich zunächst für *gleichförmige fortschreitende Bewegung*, oder für $X = 0$, indem man die aus den Gleichungen (1 bis 6) entwickelten Grössen K oder V und D (§. 21) als gegeben betrachtet:

Aus (7 und 10) $\qquad Y_1 = K_1 \cos\beta_1 - V\cos\beta - (P_1 + D - D_1)\sin\alpha,$

Aus (8 und 11) $\qquad -Z_1 = K_1 \sin\beta_1 - V\sin\beta - (P_1 + D - D_1)\cos\alpha,$

Aus (9, 11 und 12) $a_1(P_1 + D - D_1) = B_1 + n_{,,}\cos\beta . V - n_1 \cos\beta_1 . K_1 + (f_1 - \mu_1) r_1 Z_1,$

wo B_1 für $b_1 P_1 + r_1(\sin\alpha + f_1\cos\alpha) 2Q_1 + (a_1 - a + e\cos\alpha)D$ gesetzt ist;

Aus (10 und 11) $\qquad Y_1 - f_1 Z_1 = 2Q_1(\sin\alpha + f_1 \cos\alpha),$

und durch Auflösung dieser vier abgeleiteten Gleichungen:

$$V_1 = \frac{[a(\cos\beta + f_1 \sin\beta) + n_{\prime\prime} \cos\beta(\sin\alpha + f_1 \cos\alpha) - (f_1 - \mu_1) r_1 \cos(\alpha+\beta)]V + (\sin\alpha + f_1\cos\alpha)[B_1 + (a_1 - (f_1 - \mu_1) r_1 \cos\alpha) 2Q]}{a_1(\cos\beta_1 + f_1 \sin\beta_1) + n_1 \cos\beta_1(\sin\alpha + f_1 \cos\alpha) - (f_1 - \mu_1) r_1 \cos(\alpha+\beta)},$$

und wenn V_1 den der gleichförmigen fortschreitenden Bewegung zugehörigen Werth von K_1 bedeutet:

$$D_1 = P_1 + D - \frac{[n_1\cos\beta(\cos\beta_1 + f_1\sin\beta_1) - n_1\cos\beta_1(\cos\beta + f_1\sin\beta) + (f_1 - \mu_1) r_1 \sin(\beta - \beta_1)]V + B_1(\cos\beta_1 + f_1\sin\beta_1) - 2Q(\sin\alpha + f_1\cos\alpha)[n_1\cos\beta_1 + (f_1 - \mu_1) r_1 \sin\beta_1]}{a_1(\cos\beta_1 + f_1\sin\beta_1) + n_1\cos\beta_1(\sin\alpha + f_1\cos\alpha) - (f_1 - \mu_1) r_1 \cos(\alpha + \beta_1)},$$

$$Y_1 = \frac{f_1 V[a_1 \sin(\beta - \beta_1) + n_{\prime\prime}\cos\beta\cos(\alpha + \beta_1) - n_1\cos\beta_1]\cos(\alpha+\beta_1) + f_1 B_1 \cos(\alpha + \beta_1) + 2Q_1(\sin\alpha + f_1\cos\alpha)[a_1\cos\beta_1 + n_1\cos\beta_1\sin\alpha - (f_1 - \mu_1) r_1 \cos(\alpha+\beta_1)]}{a_1(\cos\beta_1 + f_1\sin\beta_1) + n_1\cos\beta_1(\sin\alpha + f_1\cos\alpha) - (f_1 - \mu_1) r_1\cos(\alpha+\beta_1)},$$

$$Z_1 = \frac{V[a_1\sin(\beta - \beta_1) + n_{\prime\prime}\cos\beta\cos(\alpha+\beta_1) - n_1\cos\beta_1\cos(\alpha+\beta)] + B_1\cos(\alpha+\beta_1) - 2Q_1(\sin\alpha + f_1\cos\alpha)(a_1\sin\beta_1 + n_1\cos\beta_1\cos\alpha)}{a_1(\cos\beta_1 + f_1\sin\beta_1) + n_1\cos\beta_1(\sin\alpha + f_1\cos\alpha) - (f - \mu_1) r_1\cos(\alpha+\beta_1)};$$

womit nach (11) zugleich $\quad 2N_1 = Z_1 + 2Q_1\cos\alpha$,
und nach (11 und 12) $\quad 2Q_1 . U_1 = (f_1 - \mu_1) r_1 Z_1 + f_1 r_1 . 2Q_1 \cos\alpha$
entwickelt sind.

Und alle diese, den Gleichungen (F) nur näherungsweise genügenden, Ausdrücke werden *genau*, wenn man den Exponenten μ_1 wie bei der rollenden Bewegung (§. 43) ergänzt, so dass hier

$$\mathfrak{A}_1 = 2Q_1 r_1(\sin\alpha + f_1\cos\alpha)\cos(\alpha+\beta),$$

$$\mathfrak{B}_1 = f_1 . \frac{V}{\mathfrak{A}_1}[a_1\sin(\beta - \beta_1) + n_{\prime\prime}\cos\beta\cos(\alpha+\beta_1) - n_1\cos\beta_1\cos(\alpha+\beta)]$$
$$+ f_1 . \frac{B_1}{\mathfrak{A}_1}\cos(\alpha+\beta_1) + \frac{2Q_1}{\mathfrak{A}_1}(\sin\alpha + f_1\cos\alpha)[a_1\cos\beta_1 + n_1\cos\beta_1\sin\alpha - f_1 r_1\cos(\alpha+\beta_1)],$$

$$\mathfrak{C}_1 = \frac{V}{\mathfrak{A}_1}[a_1\sin(\beta - \beta_1) + n_{\prime\prime}\cos\beta\cos(\alpha+\beta_1) - n_1\cos\beta_1\cos(\alpha+\beta)]$$
$$+ \frac{B_1}{\mathfrak{A}_1}\cos(\alpha+\beta_1) - \frac{2Q_1}{\mathfrak{A}_1}(\sin\alpha + f_1\cos\alpha)(a_1\sin\beta_1 + n_1\cos\beta_1\cos\alpha),$$

gesetzt wird; und wenn man eben so für den Exponenten der Hinterräder das nach (§. 21) ergänzte μ setzt.

§. 50.

Soll die Auflösung der Gleichungen (F) zugleich die *beschleunigte fortschreitende Bewegung* umfassen, so folgt

Aus (7u.10) $+Y_1 = K_1 \cos\beta_1 - K\cos\beta - (P_1 + D - D_1)\sin\alpha - P_1 X$,

Aus (8 u. 11) $-Z_1 = K_1 \sin\beta_1 - K\sin\beta - (P_1 + D - D_1)\cos\alpha$,

Aus (9, 11 u. 12) $\quad [a_1 - (f_1 - \mu_1) r_1 \cos\alpha](P_1 + D - D_1)$

$$= C_1 - (f_1 - \mu_1) r_1 \sin\beta_1 . K_1 + [n_{,,} \cos\beta + (f_1 - \mu_1) r_1 \sin\beta] K + (h_1 P_1 + 2 r_1 Q_1) X,$$

wo $C_1 = b_1 P_1 + r_1(\sin\alpha + f_1\cos\alpha) 2Q_1 + (a_1 - a + e\cos\alpha) D - n_{,}\cos\beta_1 . K_1$ ist,

Aus (10 u. 11) $\quad Y_1 - f_1 Z_1 = 2Q_1(\sin\alpha + f_1\cos\alpha + X)$;

woraus dann ferner

$$X = \frac{\begin{array}{c}[a_1(\cos\beta_1 + f_1\sin\beta_1) - (f_1 - \mu_1) r_1 \cos(\alpha - \beta_1)] K_1 - [a_1(\cos\beta + f_1 \sin\beta) + n_{,,}\cos\beta(\sin\alpha + f_1\cos\alpha) \\ - (f_1 - \mu_1) r_1 \cos(\alpha + \beta)] K - (\sin\alpha + f_1\cos\alpha)[C_1 + (a_1 - (f_1 - \mu_1) r_1 \cos\alpha) 2Q_1]\end{array}}{(a_1 - (f_1 - \mu_1) r_1 \cos\alpha)(P_1 + 2Q_1) + (h_1 P_1 + 2 r_1 Q_1)(\sin\alpha + f_1\cos\alpha)},$$

$$D_1 = P_1 + D - \frac{\begin{array}{c}(P_1 + 2Q_1)[C_1 - (f_1 - \mu_1) r_1 \sin\beta_1 K_1 + (n_{,,}\cos\beta + (f_1 - \mu_1) r_1 \sin\beta) K] \\ + (h_1 P_1 + 2 r_1 Q_1)[K_1(\cos\beta_1 + f_1 \sin\beta_1) - K(\cos\beta + f_1\sin\beta) - 2Q_1(\sin\alpha + f_1\cos\alpha)]\end{array}}{[a_1 - (f_1 - \mu_1) r_1 \cos\alpha](P_1 + 2Q_1) + (h_1 P_1 + 2 r_1 Q_1)(\sin\alpha + f_1\cos\alpha)},$$

$$Y_1 = \frac{\begin{array}{c}f_1 P_1 [C_1 \cos\alpha - a_1 \sin\beta_1 K_1 + (a_1 \sin\beta_1 + n_{,,}\cos\beta\cos\alpha) K] + f_1 (h_1 P_1 + 2 r_1 Q_1)[K_1 \cos(\alpha + \beta_1) - K\cos(\alpha + \beta)] \\ + 2Q_1[(a_1 \cos\beta_1 - (f_1 - \mu_1) r_1 \cos(\alpha + \beta_1)] K_1 - (a_1\cos\beta + n_{,,}\cos\beta\sin\alpha - (f_1 - \mu_1) r_1 \cos(\alpha + \beta)] K \\ - C_1 \sin\alpha + (\sin\alpha + f_1\cos\alpha)[(a_1 - (f_1 - \mu_1) r_1 \cos\alpha) P_1 + (h_1 P_1 + 2 r_1 Q_1)\sin\alpha)]\end{array}}{[a_1 - (f_1 - \mu_1) r_1 \cos\alpha](P_1 + 2Q_1) + (h_1 P_1 + 2 r_1 Q_1)(\sin\alpha + f_1\cos\alpha)},$$

$$Z_1 = \frac{\begin{array}{c}(P_1 + 2Q_1)[C_1 \cos\alpha - a_1 \sin\beta_1 K_1 + (a_1 \sin\beta + n_{,,}\cos\beta\cos\alpha) K] + (h_1 P_1 + 2 r_1 Q\;)[K_1 \cos(\alpha + \beta_1) \\ - K\cos(\alpha + \beta) - 2Q_1 \cos\alpha(\sin\alpha + f_1\cos\alpha)]\end{array}}{[a_1 - (f_1 - \mu_1) r_1 \cos\alpha](P_1 + 2Q_1) + (h_1 P_1 + 2 r_1 Q_1)(\sin\alpha + f_1\cos\alpha)},$$

und nach (11 und 12) zugleich

$$2N_1 = Z_1 + 2Q_1\cos\alpha \text{ und}$$

$$2Q_1 U_1 = (f_1 - \mu_1) r_1 Z_1 + f_1 r_1 \cos\alpha . 2Q_1$$

gefunden wird.

In diesen, auf die beschleunigte fortschreitende Bewegung bezüglichen Ausdrücken ist für D der in (§. 22) entwickelte Ausdruck zu nehmen, die Kraft K aber mittels der Gleichung, welche die für das Hintergestell und das Vordergestell gefundenen beiden Ausdrücke von X geben, erst zu eliminiren.

Diese Gleichung ist nämlich

$$\frac{\eta K - \zeta}{\varepsilon} = \frac{\eta_1 K_1 - \eta' K - \zeta_1 - (a_1 - a + e\cos\alpha) D(\sin\alpha + f_1\cos\alpha)}{\varepsilon_1},$$

wenn hier zur Abkürzung

ε statt $(a - (f - \mu) r\cos\alpha)(P + 2Q) + (hP + 2rQ)(\sin\alpha + f\cos\alpha)$,

ε_1 » $(a_1 - (f_1 - \mu_1) r_1 \cos\alpha)(P_1 + 2Q_1) + (h_1 P_1 + 2 r_1 Q_1)(\sin\alpha + f_1\cos\alpha)$,

ζ » $(\sin\alpha + f\cos\alpha)[bP + (a + r(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)] 2Q)$,

ζ_1 » $(\sin\alpha + f_1\cos\alpha)[b_1 P_1 + (a_1 + r_1(\sin\alpha + \mu_1\cos\alpha)] 2Q_1$,

$$\begin{aligned}
\eta &\text{ statt } a(\cos\beta+f\sin\beta)+n\cos\beta(\sin\alpha+f\cos\alpha)-(f-\mu)r\cos(\alpha+\beta),\\
\eta' &\text{ » } a_1(\cos\beta+f_1\sin\beta)+n_{,,}\cos\beta(\sin\alpha+f_1\cos\alpha)-(f_1-\mu_1)r_1\cos(\alpha+\beta),\\
\eta_1 &\text{ » } a_1(\cos\beta_1+f_1\sin\beta_1)+n_1\cos\beta_1(\sin\alpha+f_1\cos\alpha)-(f_1-\mu_1)r_1\cos(\alpha+\beta_1)
\end{aligned}$$

gesetzt und D in der Bedeutung wie in (§. 22) genommen wird, und es ergiebt sich aus ihr

$$K=\frac{\varepsilon(\eta_1K_1-\zeta_1)+\varepsilon_1\zeta-(a_1-a+e\cos\alpha)(\sin\alpha+f_1\cos\alpha)[a-b-(f-\mu)r\cos\alpha+h(\sin\alpha+f\cos\alpha)]P(P+2Q)}{\varepsilon\eta'+\varepsilon_1\eta+(a_1-a+e\cos\alpha)(\sin\alpha+f_1\cos\alpha)[(n\cos\beta+(f-\mu)r\sin\beta)(P+2Q)-(hP+2rQ)(\cos\beta+f\sin\beta)]},$$

folglich

$$X=\frac{\begin{array}{c}\eta\eta K-\eta'\zeta-\eta\zeta_1-(a_1-a+e\cos\alpha)(\sin\alpha+f_1\cos\alpha)[\eta P-bP(\cos\beta+f\sin\beta)\\+(\sin\alpha+f\cos\alpha)(n\cos\beta-r(\cos\beta+\mu\sin\beta))2Q]\end{array}}{\begin{array}{c}\varepsilon\eta'+\varepsilon_1\eta+(a_1-a+e\cos\alpha)(\sin\alpha+f_1\cos\alpha)[(n\cos\beta+(f+\mu)r\sin\beta)(P+2Q)\\-(hP+2rQ)(\cos\beta+f\sin\beta)]\end{array}},$$

und für $X=0$, wie es sein soll, $K_1=V_1$ (§. 49).

Auch können noch die Exponenten μ und μ_1 durch allmählige Annäherung, wie für rollende Bewegung (§. 44), genauer bestimmt werden; wozu in Bezug auf das Hintergestell die Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ wie in (§. 22) und in Bezug auf das Vordergestell,

$$\mathfrak{A}_1=2r_1Q_1[K_1\cos(\alpha+\beta_1)-K\cos(\alpha+\beta)+P_1\cos\alpha(\sin\alpha+f_1\cos\alpha)],$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_1=f_1\cdot\frac{P_1}{\mathfrak{A}_1}&[C_1\cos\alpha-a_1\sin\beta_1.K+(a_1\sin\beta+n_{,,}\cos\beta.\cos\alpha)K]\\
&+f_1\cdot\frac{h_1P_1+2r_1Q_1}{\mathfrak{A}_1}[K_1\cos(\alpha+\beta_1)-K\cos(\alpha+\beta)]\\
&+\frac{2Q_1}{\mathfrak{A}_1}[(a_1\cos\beta_1-f_1r_1\cos(\alpha+\beta_1))K_1-(a_1\cos\beta+n_{,,}\cos\beta\sin\alpha-f_1r\cos(\alpha+\beta)]K\\
&-C_1\sin\alpha+(\sin\alpha+f_1\cos\alpha)[(a_1-f_1r_1\cos\alpha)P_1+(h_1P_1+2r_1Q_1)\sin\alpha)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}_1=\frac{P_1+2Q_1}{\mathfrak{A}_1}&[C_1\cos\alpha-a_1\sin\beta_1.K_1+(a_1\sin\beta+n_{,,}\cos\beta.\cos\alpha)K]\\
&+\frac{h_1P_1+2r_1Q_1}{\mathfrak{A}_1}[K_1\cos(\alpha+\beta_1)-K\cos(\alpha+\beta)-(\sin\alpha+f_1\cos\alpha)2Q_1\cos\alpha]
\end{aligned}$$

zu setzen sind.

§. 51.

Bei näherer Betrachtung der Ergebnisse der Auflösung der Gleichungen (F) bieten sich ähnliche Bemerkungen dar, wie die in (§§. 23 bis 26) in Bezug auf das zweirädrige Fuhrwerk, und die in (§§. 38 bis 40) in Bezug auf das vierrädrige Fuhrwerk erster Art gemachten; und aus einer Zusammenstellung jener Ergebnisse mit denen der Gleichungen (B und D) zeigt sich von selbst, in wie weit die Bemerkungen der angeführten Paragraphen sich auf das vierrädrige Fuhrwerk zweiter Art beziehen lassen.

Es lässt sich ferner, ganz auf gleiche Weise wie es in (§. 46) für rollende Bewegung geschah, nachweisen, dass, wenn $D_1 = 0$ ist, die Gleichungen der theilweise gleitenden Bewegung des vierrädrigen Fuhrwerks zweiter Art (F) auf die des vierrädrigen Fuhrwerks erster Art (D) zurückgehen; woraus dann zugleich erhellet, dass die in (§§. 46 und 47) weiter dargelegten Folgerungen ebenfalls für gleitende Bewegung gültig sind.

Mehrere hinter einander angehängte vierrädrige Fuhrwerke erster Art.

§. 52.

Die Untersuchung wird sich auf die Beschleunigung der rollenden Bewegung, welche durch eine gegebene, die Fuhrwerke bewegende Kraft hervorgebracht wird, und auf die zur gleichförmigen rollenden Bewegung erforderliche Zugkraft beschränken, und voraussetzen, bei jedem Fuhrwerke seien die Räder unter sich gleich und es habe der Rad-Effects-Exponent für beide Räderpaare denselben Werth.

Zunächst wird angenommen, zwei hinter einander folgende, von derselben Kraft K_1 bewegte vierrädrige Fuhrwerke erster Art seien so unter sich verbunden, dass die Richtung der Kraft K, mit welcher der vordere Wagen den hintern nach sich zieht, mit der Bahnlinie den Winkel β bildet. X sei wie in (§. 27) $= \frac{1}{g} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$, und die Buchstaben P, Q, μ, β, r, s sollen sich, in der (§. 27 und 30) festgesetzten Bedeutung, auf den nachfolgenden, die Zeichen mit Beistrich P_1, Q_1, μ_1, β_1, r_1, s_1, in derselben Bedeutung, auf den vorausgehenden Wagen beziehen.

Nach den Ergebnissen der dem vierrädrigen Fuhrwerke erster Art zugehörigen Gleichungen (C) ist für den hintern Wagen (§. 32):

$$X = \frac{K(\cos\beta + \mu\sin\beta) - (P + 4\,Q)\sin\alpha - \mu P\cos\alpha}{P + 4\frac{s}{r}Q}.$$

In Bezug auf den vordern Wagen hat man dagegen folgende Gleichungen:

$$(1.)\quad K_1\cos\beta_1 - K\cos\beta - 2R - 2R_1 - ({}_1P + 4Q_1)(\sin\alpha + X) = 0,$$

$$(2.)\quad K_1\sin\beta_1 - K\sin\beta + 2N + 2N_1 - (P_1 + 4\,Q_1)\cos\alpha = 0,$$

$$(3.)\quad n_1\cos\beta_1 . K_1 - n\,\mathrm{eos}\,\beta\;K + c_1P_1 + (e\cos\alpha - 2r_1\sin\alpha)2\,Q_1 - e.2\,N_1 - (h_1P_1 + 4sQ_1)X = 0,$$

u. s. w.

wo $n_1 \cos\beta_1 . K_1$ und $n \cos\beta . K$ die auf den Berührungspunct zwischen dem Hinterrade des vordern Wagens und der Bahnlinie bezogenen Momente der Kräfte K_1 und K sind, und die Bedeutung der übrigen, nicht so eben angeführten, Buchstaben R, N etc., so wie auch die den zwei Systemen der beiden Räderpaare angehörigen Gleichungen (4 bis 9), aus den Gleichungen (C) von selbst sich ergeben.

Man findet aus diesen Gleichungen des vorausgehenden Fuhrwerks:

$$X = \frac{K_1(\cos\beta_1 + \mu_1 \sin\beta_1) - K(\cos\beta + \mu_1 \sin\beta) - (P_1 + 4\,Q_1)\sin\alpha - \mu_1 P_1 \cos\alpha}{P_1 + 4\frac{s_1}{r_1}Q_1},$$

und da die beiden Ausdrücke von X für das vordere und das hintere Fuhrwerk einander gleich sein müssen, so ergiebt sich hieraus:

$$K = \frac{(P + 4\frac{s}{r}Q)[K_1(\cos\beta_1 + \mu_1 \sin\beta_1) - (P_1 + 4Q_1)\sin\alpha - \mu_1 P_1 \cos\alpha] + (P_1 + 4\frac{s_1}{r_1}Q_1)[(P + 4Q)\sin\alpha + \mu P \cos\alpha]}{(P + 4\frac{s}{r}Q)(\cos\beta + \mu \sin\beta) + (P_1 + 4\frac{s_1}{r_1}Q_1)(\cos\beta + \mu \sin\beta)},$$

und sodann

$$X = \frac{\begin{array}{c} K_1(\cos\beta + \mu \sin\beta)(\cos\beta_1 + \mu_1 \sin\beta_1) - [(P + 4Q)\sin\alpha + \mu P \cos\alpha](\cos\beta + \mu_1 \sin\beta) \\ - [(P_1 + 4\,Q_1)\sin\alpha + \mu_1 P_1 \cos\alpha](\cos\beta + \mu \sin\beta) \end{array}}{(P + 4\frac{s}{r}Q)(\cos\beta + \mu_1 \sin\beta) + (P_1 + 4\frac{s_1}{r_1}Q_1)(\cos\beta + \mu \sin\beta)};$$

woraus weiter für $X = 0$ oder für die gleichförmige rollende Bewegung der beiden Fuhrwerke,

$$K_1 \text{ oder } V_1 = \frac{(P_1 + 4Q)\sin\alpha + \mu_1 P_1 \cos\alpha}{\cos\beta_1 + \mu_1 \sin\beta_1} + \frac{[(P + 4Q)\sin\alpha + \mu P \cos\alpha](\cos\beta + \mu_1 \sin\beta)}{(\cos\beta_1 + \mu_1 \sin\beta_1)(\cos\beta + \mu \sin\beta)}$$

folgt.

Befindet sich vor den beiden Fuhrwerken, in gleicher Verbindung mit ihnen, noch ein drittes von derselben Art, an welchem die bewegende Kraft $K_{\prime\prime}$ angebracht ist, und auf welches die Zeichen mit doppeltem Beistrich $P_{\prime\prime}$, $Q_{\prime\prime}$ etc. sich beziehen, so hat man folgenden Ausdruck von X für das vordere Fuhrwerk,

$$X = \frac{K_{\prime\prime}(\cos\beta_{\prime\prime} + \mu_{\prime\prime} \sin\beta_{\prime\prime}) - K_1(\cos\beta_1 + \mu_{\prime} \sin\beta_1) - (P_{\prime\prime} + 4\,Q_{\prime\prime})\sin\alpha - \mu_{\prime\prime} P_{\prime\prime} \cos\alpha}{P_{\prime\prime} + \frac{s_1}{r_1}Q_1}$$

zu setzen; wodurch dann für drei Fuhrwerke wieder K_1 und X, und für $X = 0$ ferner $K_{\prime\prime}$ oder $V_{\prime\prime}$ sich finden.

Wenn bei zwei verbundenen Fuhrwerken $\mu = \mu_1$, und β entweder gleich Null oder gleich β_1 ist, so wird

$$X = \frac{K_1(\cos\beta_1 + \mu_1 \sin\beta_1) - (P + P_1 + 4Q + 4\,Q_1)\sin\alpha - \mu_1(P + P_1)\cos\alpha}{P + P_1 + 4\frac{s}{r}Q + 4\frac{s_1}{r_1}Q + 4\frac{s_1}{r_1}Q_1},$$

und für $X = 0$:

$$K_1 \text{ oder } V_1 = \frac{(P + P_1 + 4Q + 4Q_1)\sin\alpha + \mu_1(P + P_1)\cos\alpha}{\cos\beta_1 + \mu_1 \sin\beta_1},$$

wie wenn im vordern Fuhrwerk die ganze Last $P + P_1$ vereinigt und die vier Räderpaare an ihm angebracht wären; und so ebenfalls bei einer grössern Zahl verbundener Fuhrwerke; vorausgesetzt nämlich, dass für alle der Exponent μ denselben Werth hat, und dass für die auf das vorausgehende folgenden Fuhrwerke der Winkel β entweder gleich Null, oder auch dem Winkel β_1 gleich ist, unter welchem die Zugkraft am vordern Fuhrwerk wirkt.

Schluss-Anmerkung zu dem Bisherigen.

§. 53.

Die obige Lehre von den *dynamischen* Verhältnissen der Fuhrwerke beruht auf der Voraussetzung, dass die Bewegung auf einer Bahn von *regelmässiger* und *gleichförmiger* Beschaffenheit erfolge, auf welcher nur die Hindernisse der Reibung zwischen den Rädern und dem Boden und derjenigen zwischen den Achsen und ihren Lagern zu überwinden sind. Auf gewöhnlichen Strassen wird dagegen die Bewegung sehr häufig noch durch andere Hindernisse erschwert, welche in vielen Fällen einen weit beträchtlicheren Widerstand verursachen, als der durch die genannten Ursachen entstehende; nämlich durch grössere Unebenheiten des Bodens, durch das Einsinken der Räder in weichen Boden, vermehrtes Gewicht und Trägheitsmoment der Räder durch anhängende Erde u. s. w.

Sollten diese Widerstände in die Gleichungen der Bewegung aufgenommen werden, so müsste ebenfalls die Eigenthümlichkeit der rollenden, und die Unterscheidung zwischen dieser und der gleitenden Bewegung zur Grundlage für die Bildung, die Entwickelung und den Gebrauch der Gleichungen dienen. Da es jedoch beinahe eben so unmöglich scheint, einigermassen sichere Werthe der Widerstände zu ermitteln, als die einem steten Wechsel unterworfenen Einwirkungen derselben auf den Gang der Fuhrwerke mit hinreichender Genauigkeit in Rechnung zu bringen, so dürfte von einem Versuch, die genannten Hindernisse als wirkende Elemente der Bewegung zu behandeln, kaum irgend ein entsprechender Erfolg zu erwarten sein. Man wird sich darauf beschränken müssen, das *statische* Gleichgewicht der Fuhrwerke unter gegebenen Umständen, mit Rücksicht auf jene weiteren Widerstände zu suchen; wie es verschiedentlich geschehen ist.

(Die Fortsetzung folgt im nächsten Heft.)

10.

Zur Theorie der elliptischen Functionen.

(Von Herrn *R. Krusemarck*, Cand. der phil. zu Berlin.)

Eisenstein hat im Jahre 1850 in einer Vorlesung über elliptische Functionen gezeigt, wie sich die Functionen $\sin\text{am}\frac{\omega x}{\pi}$, $\cos\text{am}\frac{\omega x}{\pi}$, $\Delta\text{am}\frac{\omega x}{\pi}$ durch die trigonometrischen Reihen

$$(1.)\qquad \vartheta(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^s\varepsilon^{s^2}.e^{2six},$$

$$(2.)\qquad \eta(x) = 2\sum_{0}^{\infty}(-1)^s\varepsilon^{(s+\frac{1}{2})^2}\sin(2s+1)x,$$

wo $\varepsilon = e^{-\tau}$, $i = \sqrt{(-1)}$ gesetzt ist, ausdrücken lassen, insofern τ eine positive reelle Grösse ist. Es lässt sich aber zeigen, dass dieses τ auf eine ganz bestimmte Art von den beiden *complementären elliptischen Quadranten* abhangt; und ausserdem lässt sich leicht aus den Eigenschaften der Function ϑ beweisen, dass der Logarithmus dieser Function das bestimmte Integral einer elliptischen Function *erster* Gattung ist. Wenn man die *Eisenstein*sche Methode durch die hierzu dienende Betrachtung ergänzt, so ist man im Stande, die gesammte Theorie der elliptischen Functionen aus den Eigenschaften der Function ϑ abzuleiten; wie es aus dem Folgenden erhellen wird.

Ehe ich aber hiermit beginne, wird es gut sein, mit wenigen Worten die Fundamental-Eigenschaften von ϑ zu berühren.

Wenn man zwei Reihen von der Form (1) mit einander multiplicirt und der Einfachheit wegen x und y beide um $\frac{1}{2}\pi$ vermehrt, so erhält man:

$$(3.)\qquad \vartheta(x+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta(y+\tfrac{1}{2}\pi) = \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty}\sum_{t=-\infty}^{t=+\infty}\varepsilon^{s^2+t^2}.e^{2i(sx+ty)}.$$

Das allgemeine Glied $\varepsilon^{s^2+t^2}.e^{2i(sx+ty)}$ lässt sich, wenn man $s = p+q$, $t = p-q$ setzt, wodurch $s^2+t^2 = 2(p^2+q^2)$ wird, auch folgendermassen schreiben: $\varepsilon^{2(p^2+q^2)}.e^{2pi(x+y)+2qi(x-y)}$, und da s und t, folglich auch $s+t$ und $s-t$, alle ganzen Zahlenwerthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so müssen $p = \frac{1}{2}(s+t)$ und

$q=\frac{1}{2}(s-t)$ in denjenigen Gliedern der Doppelsumme (3), in denen s und t gleichzeitig grade oder ungrade, wo also $s+t$ und $s-t$ stets grade sind, alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$, in dem andern Theile dagegen alle Zahlen von der Form $n+\frac{1}{2}$ durchlaufen; wo n der Reihe nach alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ vorstellt. Man kann also, wenn m und n zwei ganze Zahlen sind, die Gleichung (3) auch folgendermassen schreiben:

$$\vartheta(x+\tfrac{1}{2}\pi)\,\vartheta(y+\tfrac{1}{2}\pi)=\sum_{n=+\infty}^{n=-\infty}\sum_{m=+\infty}^{m=-\infty}\varepsilon^{2(n^2+m^2)}.e^{2ni(x+y)+2mi(x-y)}$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\varepsilon^{2\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\right\}}.e^{2\left(n+\frac{1}{2}\right)i(x+y)+2\left(m+\frac{1}{2}\right)i(x-y)}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\varepsilon^{2n^2}.e^{2ni(x+y)}.\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\varepsilon^{2m^2}.e^{2mi(x-y)}$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\varepsilon^{2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}.e^{(2n+1)i(x+y)}.\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}.\varepsilon^{2\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}.e^{(2m+1)i(x-y)}.$$

Setzt man also:

$$(4.)\qquad \sum_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon^{2n^2}.e^{2nix}=\chi(x),$$

so ist:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon^{2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}.e^{(2n+1)ix}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon^{2n^2}.e^{-2n\tau+2nix}.\sqrt{\varepsilon}.e^{ix}$$

$$=\sqrt{\varepsilon}.e^{ix}.\chi(x+i\tau),$$

und man hat, wegen $i(x+y)+i(x-y)=2ix$, die Gleichung

$$(5.)\quad \vartheta(x+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta(y+\tfrac{1}{2}\pi)=\chi(x+y)\chi(x-y)+\varepsilon.e^{2ix}\chi(x+y+i\tau)\chi(x-y+i\tau).$$

Setzt man ferner:

$$(6.)\qquad \eta(x)=-i\sqrt[4]{\varepsilon}.e^{ix}\,\vartheta(x+\tfrac{1}{2}i\tau),$$

so ist:

$$\eta(x)=-i\sqrt[4]{\varepsilon}.e^{ix}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^s.\varepsilon^{s^2}.e^{2six-s\tau}=-i\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^s.\varepsilon^{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2}.e^{(2s+1)ix}$$

$$=-i\left\{\sum_{0}^{\infty}(-1)^s\varepsilon^{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2}.e^{(2s+1)ix}+\sum_{1}^{\infty}(-1)^s\varepsilon^{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2}.e^{(1-2s)ix}\right\},$$

oder, wenn man in der zweiten Reihe $s+1$ statt s schreibt:

$$\eta(x)=\frac{1}{i}\left\{\sum_{0}^{\infty}(-1)^s.\varepsilon^{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2}.e^{(2s+1)ix}-\sum_{0}^{\infty}(-1)^s.\varepsilon^{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2}.e^{-(2s+1)ix}\right\}$$

$$=2\sum_{0}^{\infty}(-1)^s.\varepsilon^{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2}.\frac{1}{2i}\left\{e^{(2s+1)ix}-e^{-(2s+1)ix}\right\};$$

welches genau die Reihe (2) ist. Man hat also, da in (1) der imaginäre Theil verschwindet:

$$(7.)\quad \begin{cases} \vartheta(x) = \sum_{+\infty}^{-\infty}(-1)^s.\varepsilon^{s^2}.\cos 2sx; \\ \eta(x) = 2\sum_{0}^{\infty}(-1)^s.\varepsilon^{(s+\frac{1}{2})^2}.\sin(2s+1)x. \end{cases}$$

Hieraus folgt unmittelbar:

$$(8.)\quad \begin{cases} \vartheta(-x) = \vartheta(x) \quad ; \quad \vartheta(x+\pi) = \vartheta(x) \quad ; \quad \vartheta(\pi-x) = \vartheta(x); \\ \eta(-x) = -\eta(x) \quad ; \quad \eta(x+\pi) = -\eta(x) \quad ; \quad \eta(\pi-x) = \eta(x); \\ \vartheta(x+2\pi) = \vartheta(x) \quad ; \quad \eta(x+2\pi) = \eta(x) \quad ; \quad \eta(0) = 0 \quad ; \quad \vartheta(0) > 0. \end{cases}$$

Aus (1) folgt:

$$\vartheta(x+i\tau) = \sum_{+\infty}^{-\infty}(-1)^s.\varepsilon^{s^2}.e^{2six-2s\tau} = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^s.\varepsilon^{s(s+2)}.e^{2six}.$$

Diese Reihe ändert sich nicht, wenn man $s-1$ statt s schreibt. Dadurch wird der Exponent von ε zu $(s-1)(s+1) = (s^2-1)$, und man erhält:

$$(9.)\qquad \vartheta(x+i\tau) = -\frac{1}{\varepsilon}.e^{-2ix}.\vartheta(x).$$

Auf dieselbe Art erhält man

$$(10.)\qquad \eta(x+i\tau) = -\frac{1}{\varepsilon}.e^{-2ix}.\eta(x),$$

$$(11.)\quad \eta(x+\tfrac{1}{2}i\tau) = \frac{i}{\sqrt[4]{\varepsilon}}.e^{-ix}.\vartheta(x) \quad ; \quad \vartheta(x+\tfrac{1}{2}i\tau) = \frac{i}{\sqrt[4]{\varepsilon}}.e^{-ix}.\eta(x).$$

Aus (9, 10 u. 11) folgt:

$$(12.)\quad \begin{cases} \eta(\tfrac{1}{2}i\tau) = \frac{i}{\sqrt[4]{\varepsilon}}.\vartheta(0) \quad ; \quad \eta(i\tau) = 0 \quad ; \quad \eta(\tfrac{1}{2}\pi+i\tau) = \frac{1}{\varepsilon}.\eta(\tfrac{1}{2}\pi); \\ \vartheta(\tfrac{1}{2}i\tau) = 0 \quad ; \quad \vartheta(i\tau) = -\frac{1}{\varepsilon}.\vartheta(0); \quad \vartheta(\tfrac{1}{2}\pi+i\tau) = \frac{1}{\varepsilon}.\vartheta(\tfrac{1}{2}\pi). \end{cases}$$

Der Gleichung (5) kann man, wenn man $\frac{1}{2}\pi$ statt τ schreibt, folgende Form geben:

$$\begin{aligned} \vartheta(x+\tfrac{1}{2}\pi,\tfrac{1}{2}\tau)\,\vartheta(y+\tfrac{1}{2}\pi,\tfrac{1}{2}\tau) &= \vartheta(x+y+\tfrac{1}{2}\pi,\tau)\,\vartheta(x-y+\tfrac{1}{2}\pi,\tau) \\ &+ \sqrt{\varepsilon}\,e^{2ix}\vartheta(x+y+\tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{1}{2}i\tau,\tau)\,\vartheta(x-y+\tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{1}{2}i\tau,\tau) \end{aligned}$$

oder wegen (11.), da $e^{i(x+y+\frac{1}{2}\pi)+i(x-y+\frac{1}{2}\pi)} = e^{2ix+i\pi} = -e^{2ix}$ ist, die Form

$$\begin{aligned} \vartheta(x+\tfrac{1}{2}\pi,\tfrac{1}{2}\tau)\,\vartheta(y+\tfrac{1}{2}\pi,\tfrac{1}{2}\tau) &= \vartheta(x+y+\tfrac{1}{2}\pi,\tau)\,\vartheta(x-y+\tfrac{1}{2}\pi,\tau) \\ &+ \eta(x+y+\tfrac{1}{2}\pi,\tau)\,\eta(x-y+\tfrac{1}{2}\pi,\tau) \end{aligned}$$

oder endlich, wenn man $\theta(z)$ statt $\vartheta(z, \frac{1}{2}\tau)$ schreibt, x in $\frac{1}{2}\tau + x$ verwandelt und in der hierdurch erhaltenen Gleichung nachher x mit y vertauscht, die Form

$$(13.)\quad \theta(x)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi) = \vartheta(x+y)\vartheta(x-y) + \eta(x+y)\eta(x-y);$$

$$(14.)\quad \theta(y)\theta(x+\tfrac{1}{2}\pi) = \vartheta(x+y)\vartheta(x-y) - \eta(x+y)\eta(x-y).$$

Lässt man hier x um $\frac{1}{2}\pi$ wachsen, so erhält man:

$$(15.)\quad \theta(x)\theta(y) = \vartheta(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta(x-y+\tfrac{1}{2}\pi) - \eta(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\eta(x-y+\tfrac{1}{2}\pi);$$

$$(16.)\quad \theta(x+\tfrac{1}{2}\pi)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi) = \vartheta(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta(x-y+\tfrac{1}{2}\pi) + \eta(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\eta(x-y+\tfrac{1}{2}\pi).$$

Aus (13) (14) folgt, addendo und subtrahendo:

$$(17.)\quad 2\vartheta(x+y)\vartheta(x-y) = \theta(x)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi) + \theta(y)\theta(x+\tfrac{1}{2}\pi);$$

$$(18.)\quad 2\eta(x+y)\eta(x-y) = \theta(x)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi) - \theta(y)\theta(x+\tfrac{1}{2}\pi).$$

Eben so aus (15, 16)

$$(19.)\quad 2\vartheta(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta(x-y+\tfrac{1}{2}\pi) = \theta(x+\tfrac{1}{2}\pi)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi) + \theta(x)\theta(y);$$

$$(20.)\quad 2\eta(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\eta(x-y+\tfrac{1}{2}\pi) = \theta(x+\tfrac{1}{2}\pi)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi) - \theta(x)\theta(y).$$

Aus (13, 15, 16) folgt noch, wenn man $x = y = 0$ setzt:

$$(21.)\quad \theta(0)\theta(\tfrac{1}{2}\pi) = \vartheta^2(0);\quad \theta^2(0) = \vartheta^2(\tfrac{1}{2}\pi) - \eta^2(\tfrac{1}{2}\pi);\quad \theta^2(\tfrac{1}{2}\pi) = \vartheta^2(\tfrac{1}{2}\pi) + \eta^2(\tfrac{1}{2}\pi).$$

Setzt man in (20) $y = 0$ und multiplicirt die beiden so erhaltenen Gleichungen mit einander, so ergiebt sich

$$(22.)\quad 4\vartheta^2(x+\tfrac{1}{2}\pi)\eta^2(x+\tfrac{1}{2}\pi) = \theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\theta^2(x+\tfrac{1}{2}\pi) - \theta^1(0)\theta^2(x).$$

Eine andere Gruppe von Gleichungen erhält man, wenn man in (13 und 14) gleichzeitig x und y um $\frac{1}{4}i\tau$ vermehrt; wodurch $x+y$ um $\frac{1}{2}i\tau$ wächst, $x-y$ dagegen ungeändert bleibt. Dadurch wird:

$$\vartheta(x+y+\tfrac{1}{2}i\tau) = \frac{i}{\sqrt[4]{\varepsilon}}e^{-i(x+y)}\eta(x+y)\quad;\quad \eta(x+y+\tfrac{1}{2}i\tau) = \frac{i}{\sqrt[4]{\varepsilon}}e^{-i(x+y)}\vartheta(x+y).$$

Andrerseits erhält man $\theta(x)$ aus $\vartheta(x)$, wenn man τ in $\frac{1}{2}\tau$, also ε in $\sqrt{\varepsilon}$ verwandelt. Setzt man daher $y(x) = \eta(x_1 \frac{1}{2}\tau)$, so geht die Gleichung

$$\vartheta(x+\tfrac{1}{2}i\tau) = \frac{ie^{-ix}}{\sqrt[4]{\varepsilon}}\eta(x),$$

wenn man überall τ in $\frac{1}{2}\tau$, also ε in $\sqrt{\varepsilon}$ verwandelt, in

$$\theta(x+\tfrac{1}{4}i\tau) = \frac{ie^{-ix}}{\sqrt[8]{\varepsilon}}y(x)$$

über. Man erhält also aus (13):

$$-\frac{e^{-i(x+y+\frac{1}{2}\pi)}}{\sqrt[4]{\varepsilon}}y(x)y(y+\tfrac{1}{2}\pi) = \frac{ie^{-i(x+y)}}{\sqrt[4]{\varepsilon}}\{\eta(x+y)\vartheta(x-y) + \vartheta(x+y)\eta(x-y)\},$$

oder, da $e^{-\frac{1}{2}\pi i} = -i$ ist und für (14) das Entsprechende gilt:

$$(23.)\quad \gamma(x)\gamma(y+\tfrac{1}{2}\pi) = \eta(x+y)\vartheta(x-y) + \vartheta(x+y)\eta(x-y);$$
$$(24.)\quad \gamma(y)\gamma(x+\tfrac{1}{2}\pi) = \eta(x+y)\vartheta(x-y) - \vartheta(x+y)\eta(x-y).$$

Hieraus folgt, addendo und subtrahendo:

$$(25.)\quad 2\eta(x+y)\vartheta(x-y) = \gamma(x)\gamma(y+\tfrac{1}{2}\pi) + \gamma(y)\gamma(x+\tfrac{1}{2}\pi);$$
$$(26.)\quad 2\vartheta(x+y)\eta(x-y) = \gamma(x)\gamma(y+\tfrac{1}{2}\pi) - \gamma(y)\gamma(x+\tfrac{1}{2}\pi).$$

Setzt man hierin $y = 0$, so erhält man, (da die Gleichungen (8) offenbar auch für die Functionen θ, γ gelten), wenn man noch nachher x um $\frac{1}{2}\pi$ vermehrt:

$$(27.)\quad 2\eta(x)\vartheta(x) = \gamma(\tfrac{1}{2}\pi)\gamma(x)\;;\; 2\eta(x+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta(x+\tfrac{1}{2}\pi) = \gamma(\tfrac{1}{2}\pi)\gamma(x+\tfrac{1}{2}\pi).$$

Setzt man den hieraus sich ergebenden Werth $\gamma^2(\frac{1}{2}\pi)\gamma^2(x+\frac{1}{2}\pi)$ von $4\eta^2(x+\frac{1}{2}\pi)\vartheta^2(x+\frac{1}{2}\pi)$ in (22), so hat man:

$$\theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\theta^2(x+\tfrac{1}{2}\pi) - \theta^2(0)\theta^2(x) = \gamma^2(\tfrac{1}{2}\pi)\gamma^2(x+\tfrac{1}{2}\pi),$$

oder wenn man τ in 2τ verwandelt:

$$(28.)\quad \vartheta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^2(x+\tfrac{1}{2}\pi) - \vartheta^2(0)\vartheta^2(x) = \eta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\eta^2(x+\tfrac{1}{2}\pi).$$

Hieraus folgt für $x = 0$:

$$\vartheta^4(\tfrac{1}{2}\pi) = \vartheta^4(0) + \eta^4(\tfrac{1}{2}\pi),\ \text{also}\ \frac{\eta^4(\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta^4(\frac{1}{2}\pi)} + \frac{\vartheta^4(0)}{\vartheta^4(\frac{1}{2}\pi)} = 1.$$

Setzt man daher

$$(29.)\quad \frac{\eta(\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta(\frac{1}{2}\pi)} = \sqrt{k}\ \text{und}\ \frac{\vartheta(0)}{\vartheta(\frac{1}{2}\pi)} = \sqrt{k'},\quad \text{so ist}\ k^2 + k'^2 = 1.$$

Es sei jetzt

$$(\text{I.})\quad \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\eta(x)}{\vartheta(x)} = \psi(x);$$

$$(\text{II.})\quad \sqrt{\left(\frac{k'}{k}\right)}\cdot\frac{\eta(x+\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta(x)} = \varphi(x);$$

$$(\text{III.})\quad \sqrt{k'}\,\frac{\vartheta(x+\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta(x)} = f(x),$$

so folgt aus (28 und 29):

$$f^2(x) = k'\frac{\vartheta^2(x+\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta^2(x)} = \frac{\vartheta^2(0)}{\vartheta^2(\frac{1}{2}\pi)}\cdot\frac{\vartheta^2(x+\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta^2(x)} = \frac{\vartheta^4(0)}{\vartheta^4(\frac{1}{2}\pi)} + \frac{\eta^2(\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta^2(\frac{1}{2}\pi)}\cdot\frac{\vartheta^2(0)}{\vartheta^2(\frac{1}{2}\pi)}\cdot\frac{\eta^2(x+\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta^2(x)}$$
$$= k'^2 + kk'.\frac{k}{k'}\varphi^2(x) = k'^2 + k^2\varphi^2(x) = 1 - k^2[1-\varphi^2(x)],\ \text{oder:}$$

$$(\text{IV.})\quad f(x) = \sqrt{[1 - k^2(1-\varphi^2(x))]}.$$

Verwandelt man x in $x+\frac{1}{2}\pi$, so folgt aus (III): $\sqrt{k'}\frac{\vartheta(x)}{\vartheta(x+\frac{1}{2}\pi)}=f(x+\frac{1}{2}\pi)=\frac{k'}{f(x)}$ und aus (II) $\varphi(x+\frac{1}{2}\pi)=-\sqrt{\left(\frac{k'}{k}\right)}\cdot\frac{\eta(x)}{\vartheta(x+\frac{1}{2}\pi)}=-\sqrt{\left(\frac{k'}{k}\right)}\cdot\frac{\eta(x)}{\vartheta(x)}\cdot\frac{\vartheta(x)}{\vartheta(x+\frac{1}{2}\pi)}=-\frac{k'\psi(x)}{f(x)}$; endlich aus (I) $\psi(x+\frac{1}{2}\pi)=\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, und man hat

$$\text{(V.)}\quad \psi(x+\tfrac{1}{2}\pi)=\frac{\psi(x)}{f(x)}\ ;\quad \varphi(x+\tfrac{1}{2}\pi)=\frac{-k'\psi(x)}{f(x)}\ ;\quad f(x+\tfrac{1}{2}\pi)=\frac{k'}{f(x)}.$$

Eben so folgt aus (I, (II, III):

$$\psi(0)=0\ ;\quad \varphi(0)=\sqrt{\left(\frac{k'}{k}\right)}\cdot\frac{\eta(\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta(0)}=\sqrt{\left(\frac{k'}{k}\right)}\cdot\sqrt{\left(\frac{k}{k'}\right)}=1,\ \text{etc.}$$

und man hat:

$$\text{(VI.)}\quad \begin{cases} \psi(0)=0\ ;\quad \varphi(0)=1\ ;\quad f(0)=1\ ;\quad \vartheta(\pi)=\vartheta(0+\pi)=\vartheta(0); \\ \psi(-x)=-\psi(x)\ ;\quad \varphi(-x)=\varphi(x)\ ;\quad f(-x)=f(x)\ ; \\ \psi(\pi)=0\ ;\quad \varphi(\pi)=-1\ ;\quad f(\pi)=1\ ; \\ \psi(\frac{1}{2}\pi)=1\ ;\quad \varphi(\frac{1}{2}\pi)=0\ ;\quad f(\frac{1}{2}\pi)=k'. \end{cases}$$

Verwandelt man nun x in $x+\frac{1}{2}\pi$, so folgt aus (IV):

$$\frac{k'}{f(x)}=\sqrt{\left[1-k^2\left(1-\frac{k'^2\psi^2(x)}{f^2(x)}\right)\right]}=\frac{1}{f(x)}\sqrt{[f^2(x)-k^2f^2(x)+k^2k'^2\psi^2(x)]}$$
$$=\frac{k'}{f(x)}\sqrt{[f^2(x)+k^2\psi^2(x)]}\ ;\quad \text{mithin } 1=f^2(x)+k^2\psi^2(x)$$

oder $f^2(x)=1-k^2\psi^2(x)$. Wenn man Dies mit (IV) vergleicht, so erhält man:

$$\text{(VII.)}\quad \varphi^2(x)=1-\psi^2(x)\ ;\quad f^2(x)=1-k^2\psi^2(x).$$

Man kann also die drei Quotienten (I, (II, III) durch den einen $\psi(x)$ ausdrükken, und es genügt daher, die Natur des ψ zu erforschen.

In (25) sind x und y zwei von einander unabhängige Veränderliche, und $x\pm y$ ist eine Function von beiden: also, wenn eine von ihnen constant wird, nur von der andern abhängig. Wird daher z. B. y constant, so geht $\partial(x\pm y)$ in ∂x über. Wenn man nun (25) nach y differentiirt, so erhält man

$$\gamma(x)\frac{\partial\gamma(y+\frac{1}{2}\pi)}{\partial y}+\gamma(x+\tfrac{1}{2}\pi)\frac{\partial\gamma(y)}{\partial y}=2\left\{\vartheta(x-y)\frac{\partial\eta(x+y)}{\partial y}+\eta(x+y)\frac{\partial\vartheta(x-y)}{\partial y}\right\},$$

oder, da $\partial y=\partial(y+\frac{1}{2}\pi)=\partial(x+y)=-\partial(x-y)$ ist:

$$\gamma(x)\gamma'(y+\tfrac{1}{2}\pi)+\gamma(x+\tfrac{1}{2}\pi)\gamma'(y)=2\{\vartheta(x-y)\eta'(x+y)-\eta(x+y)\vartheta'(x-y)\}.$$

Setzt man hierin $y=0$, so geht $\frac{\partial\eta(x+y)}{\partial(x+y)}$ in $\frac{\partial\eta(x)}{\partial x}$ und $\frac{\partial\vartheta(x-y)}{\partial(x-y)}$ in $\frac{\partial\vartheta(x)}{\partial x}$ über und man hat:

$$\gamma(x)\gamma'(\tfrac{1}{2}\pi)+\gamma'(0)\gamma(x+\tfrac{1}{2}\pi)=2\{\vartheta(x)\eta'(x)-\eta(x)\vartheta'(x)\}.$$

Nun ist $\varphi(x)$ eine Reihe, deren sämmtliche Glieder mit Sinus ungrader Multipla von x multiplicirt sind: es haben also sämmtliche Glieder von $\varphi'(x)$ Cosinus ungrader Multipla von x zu Factoren; mithin ist $\varphi'(\frac{1}{2}\pi)=0$, dagegen $\varphi'(0)$ von Null verschieden. Auf dieselbe Art zeigt sich die Richtigkeit der Gleichungen

$$(30.)\quad \gamma'(\tfrac{1}{2}\pi)=0\quad;\quad \eta'(\tfrac{1}{2}\pi)=0\quad;\quad \gamma''(0)=0\quad;\quad \eta''(0)=0\quad;\quad \text{etc.}$$

Die letzte Gleichung reducirt sich dadurch auf

$$(31.)\quad \gamma'(0)\gamma(x+\tfrac{1}{2}\pi)=2[\vartheta(x)\eta'(y)-\eta(x)\vartheta'(x)],$$

was man auch folgendermaassen schreiben kann:

$$\gamma'(0)\gamma(x+\tfrac{1}{2}\pi)=2\vartheta^2(x)\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\eta(x)}{\vartheta(x)}\right\}.$$

Wegen (27) ist aber:

$$\gamma(x+\tfrac{1}{2}\pi)=\frac{2\eta(x+\frac{1}{2}\pi)\vartheta(x+\frac{1}{2}\pi)}{\gamma(\frac{1}{2}\pi)},$$

folglich hat man:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\eta(x)}{\vartheta(x)}\right\}=\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\gamma'(0)}{\gamma(\frac{1}{2}\pi)}\cdot\sqrt{\left(\frac{k}{k'}\right)}\cdot\sqrt{\left(\frac{k'}{k}\right)}\cdot\frac{\eta(x+\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta(x)}\cdot\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k'}}\cdot\frac{\vartheta(x+\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta(x)},$$

d. h. wegen (I, II, III):

$$(\text{VIII.})\quad \psi'(x)=\frac{1}{k'}\cdot\frac{\gamma'(0)}{\gamma(\frac{1}{2}\pi)}\varphi(x)f(x)\,..$$

Setzt man also $\psi(x)=v$, so hat man, wegen (VII):

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{k'}\cdot\frac{\gamma'(0)}{\gamma(\frac{1}{2}\pi)}\sqrt{(1-v^2)}\sqrt{(1-k^2v^2)},$$

woraus sich durch Integration, da gleichzeitig $v=0$, $x=0$ ist,

$$x=\frac{k'\gamma(\frac{1}{2}\pi)}{\gamma'(0)}\int_0^v\frac{\partial v}{\sqrt{(1-v^2)}\sqrt{(1-k^2v^2)}}=\frac{k'\gamma(\frac{1}{2}\pi)}{\gamma'(0)}\int_0^{\psi(x)}\frac{\partial\psi(x)}{\partial(x)f(x)}$$

ergiebt. Setzt man hierin $x=\frac{1}{2}\pi$, so wird $v=1$ und man hat, wenn man noch

$$(\text{IX.})\quad \int_0^1\frac{\partial v}{\sqrt{(1-v^2)}\sqrt{(1-k^2v^2)}}=\tfrac{1}{2}\varpi\;;\;\int_0^1\frac{\partial v}{\sqrt{(1-v^2)}\sqrt{(1-k'^2v^2)}}=\tfrac{1}{2}\varpi'$$

setzt:

$$\tfrac{1}{2}\pi = \frac{k'\gamma(\frac{1}{2}\pi)}{\gamma(0)}\cdot\tfrac{1}{2}w, \quad \text{also } \frac{k'\gamma(\frac{1}{2}\pi)}{\gamma(0)} = \frac{\pi}{w}; \text{ folglich ist:}$$

$$(\psi) \qquad \frac{wx}{\pi} = \int_0^x \frac{\psi'(x)\partial x}{\sqrt{[1-\psi^2(x)]}.\sqrt{[1-k^2.\psi^2(x)]}}.$$

Aus der Gleichung $\psi^2(x) + \varphi^2(x)$ folgt, dass man $\psi(x) = \sin\theta$ setzen darf: wo θ eine noch zu bestimmende Function von x ist. Dann hat man, wegen (VIII):

$$\frac{w}{\pi}\varphi(x)f(x) = \cos\theta.\frac{\partial\theta}{\partial x}, \text{ woraus sich ergiebt:}$$

$$\frac{w}{\pi}\partial x = \frac{\cos\theta.\partial\theta}{\sqrt{(1-\sin^2\theta)}.\sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)}} = \frac{\partial\theta}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)}},$$

folglich:

$$(\theta) \qquad \frac{wx}{\pi} = \int_0^\theta \frac{\partial\theta}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)}}, \text{ wo } \psi(x) = \sin\theta \text{ ist.}$$

Bezeichnet man das Integral $\frac{wx}{\pi}$ mit $F(\theta)$ und die umgekehrte Function von F mit χ, so ist $\theta = \chi\left(\frac{wx}{\pi}\right)$. *Jacobi* bezeichnet χ durch die Anfangsbuchstaben des Wortes: *„amplitudo"*, indem θ die obere Grenze (Amplitude), eines Integrals ist. Nach ihm ist $\theta = \operatorname{am}\frac{wx}{\pi}$, mithin $\psi(x) = \sin\theta = \sin\operatorname{am}\frac{wx}{\pi}$, und die Gleichungen (I, II, III) geben

$$(\text{X.}) \quad \sin\operatorname{am}\frac{wx}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\eta(x)}{\vartheta(x)}; \qquad (\text{XI.}) \quad \cos\operatorname{am}\frac{wx}{\pi} = \sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot\frac{\eta(x+\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta(x)};$$

$$(\text{XII.}) \qquad \Delta\operatorname{am}\frac{wx}{\pi} = \sqrt{k'}\frac{\vartheta(x+\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta(x)},$$

wo $\Delta\operatorname{am}u$ die Wurzel $\sqrt{\left(1-k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{wx}{\pi}\right)}$ bezeichnet. Aus (θ) folgt noch:

$$\frac{\partial\operatorname{am}\frac{wx}{\pi}}{\partial x} = \partial\theta = \frac{wx}{\pi}\Delta\operatorname{am}\frac{wx}{\pi}, \text{ oder, wenn man } \frac{wx}{\pi} = u \text{ setzt:}$$

$$(\text{XIII.}) \qquad \frac{\partial\operatorname{am}u}{\partial u} = \Delta\operatorname{am}u,$$

woraus sich Folgendes ergiebt:

$$(\text{XIV}) \begin{cases} \dfrac{\partial\sin\operatorname{am}u}{\partial u} = \cos\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}u \;;\; \dfrac{\partial\cos\operatorname{am}u}{\partial u} = -\sin\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}u; \\ \dfrac{\partial\Delta\operatorname{am}u}{\partial u} = -k^2\sin\operatorname{am}u.\cos\operatorname{am}u. \end{cases}$$

Setzt man nun allgemein $\int_0^a f(\varrho)\partial\varrho = F(\alpha)$, wo $f(\varrho)$ eine Function bezeichnet, die sich nicht ändert, wenn ϱ in $-\varrho$ verwandelt wird, so hat man:

$$F(-\alpha) = \int_0^{-a} f(\varrho)\partial\varrho = -\int_0^a f(\varrho)\,d\varrho = -F(\alpha).$$

Hieraus zeigt sich, dass auch, wenn $f(\varrho) = \{(1-\varrho^2)(1-k^2\varrho^2)\}^{-\frac{1}{2}}$ ist, $F(-\alpha) = -F(\alpha)$ sein muss. Setzt man daher $\alpha = \psi(y)$, so erhält man: $F(\alpha) = \frac{wy}{\pi}$, also $F(-\alpha) = -F(\alpha) = -\frac{wy}{\pi}$, oder, wenn Φ die umgekehrte Function von F ist: $-\alpha = \Phi\left(-\frac{wy}{\pi}\right)$. Es ist aber $\alpha = \sin\text{am}\frac{wy}{\pi}$, mithin ist $-\sin\text{am}\frac{wy}{\pi}\Phi = \Phi\left(-\frac{wy}{\pi}\right) = \sin\left\{-\text{am}\frac{wy}{\pi}\right\}$; ausserdem ist $\Phi(u) = \sin\text{am}\,u$, also $\Phi\left(-\frac{wy}{\pi}\right) = \sin\text{am}\left(-\frac{wy}{\pi}\right)$, mithin ist $\sin\text{am}\left(-\frac{wy}{\pi}\right) = \sin\left\{-\text{am}\frac{wy}{\pi}\right\}$, folglich:

(XV.) $\text{am}(-u) = -\text{am}\,u$.

Zur Bestimmung der Constanten $\vartheta(0)$, $\vartheta(\frac{1}{2}\pi)$, $\eta(\frac{1}{2}\pi)$ differentiire man die Gleichungen (27) und setze nachher $x = 0$. Dies giebt

$$\gamma(\tfrac{1}{2}\pi)\gamma'(0) = 2\vartheta(0)\eta'(0).$$

Setzt man darauf in der ersten der Gleichungen (27) selbst, $x = \frac{1}{2}\pi$, so erhält man

$$\gamma^2(\tfrac{1}{2}\pi) = 2\eta(\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta(\tfrac{1}{2}\pi),$$

und dividirt man hierdurch die vorige Gleichung, so wird

$$\frac{\gamma'(0)}{\gamma(\frac{1}{2}\pi)} = \frac{\vartheta(0)\eta'(0)}{\eta(\frac{1}{2}\pi)\vartheta(\frac{1}{2}\pi)}.$$

Dividirt man endlich diese Gleichung durch die erste der Formeln (21), so wird

$$(32.)\qquad \frac{\gamma'(0)}{\theta(0)\theta(\frac{1}{2}\pi)\gamma(\frac{1}{2}\pi)} = \frac{\eta'(0)}{\vartheta(0)\vartheta(\frac{1}{2}\pi)\eta(\frac{1}{2}\pi)}.$$

Nun sind η, ϑ dieselben Functionen von ε^2, wie φ, θ von ε. Bezeichnet man also den Quotienten (32) links mit $f(\varepsilon)$, so erhält man aus (32): $f(\varepsilon) = f(\varepsilon^2)$, und setzt man hierin ε^2 statt ε: $f(\varepsilon^2) = f(\varepsilon^4)$, also $f(\varepsilon) = f(\varepsilon^4)$; u. s. w. Allgemein muss also, für jede noch so grosse Zahl n,

$$f(\varepsilon) = f(\varepsilon^{2^n}).$$

sein. Nun ist aber $\varepsilon = e^{-\tau}$, wo τ positiv und reell ist: also ist ε ein positiver echter Bruch, und es nähert sich demnach, wenn man n ins Unendliche wachsen lässt, ε^{2^n} sehr stark der Null und es ist:

$$f(\varepsilon) = f(0).$$

Aus (7) folgt nun:

$$\eta(x) = 2.\sqrt[4]{\varepsilon}.\sin x - 2.\sqrt[4]{\varepsilon^9}.\sin 3x + \dots$$

$$\eta'(x) = 2.\sqrt[4]{\varepsilon}.\cos x - 2.3.\varepsilon\sqrt[4]{\varepsilon^{\frac{9}{4}}}\cos 3x + \dots$$

$$\vartheta(x) = 1 - 2\varepsilon.\cos 2x + 2\varepsilon^4\cos 4x - \dots, \text{ also}$$

$$\eta'(0) = 2\{\sqrt[4]{\varepsilon} - 3\varepsilon^{\frac{9}{4}} + 5\varepsilon^{\frac{25}{4}} - \dots\} = 2\sqrt[4]{\varepsilon}\{1 - 3\varepsilon^2 + 5\varepsilon^6 - \dots\}$$

$$\eta(\tfrac{1}{2}\pi) = 2\{\sqrt[4]{\varepsilon} + \varepsilon^{\frac{9}{4}} + \varepsilon^{\frac{25}{4}} + \dots\} = 2\sqrt[4]{\varepsilon}\{+\varepsilon^2 + \varepsilon^6 + \dots\}$$

$$\vartheta(0) = 1 - 2\varepsilon + 2\varepsilon^4 - 2\varepsilon^9 + \dots \quad ; \quad \vartheta(\tfrac{1}{2}\pi) = 1 + 2\varepsilon + 2\varepsilon^4 + 2\varepsilon^9 + \dots$$

mithin:

$$f(\varepsilon) = \frac{\eta'(0)}{\vartheta(0)\vartheta(\frac{1}{2}\pi)\eta(\frac{1}{2}\pi)} = \frac{2\sqrt[4]{\varepsilon}\{1 - 3\varepsilon^2 + \dots\}}{2\sqrt[4]{\varepsilon}\{1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^6 + \dots\}} \cdot \frac{1}{\{1 - 2\varepsilon + \dots\}\{1 + 2\varepsilon + \dots\}}$$

$$= \frac{1 - 3\varepsilon^2 + 5\varepsilon^6 - 7\varepsilon^{12} + \dots}{\{1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^6 + \dots\}\{1 - 2\varepsilon + \dots\}\{1 + 2\varepsilon + \dots\}}.$$

Lässt man hierin ε der Null sich nähern, so ergiebt sich $f(0) = 1$. Wir sahen aber, dass für jedes beliebige ε : $f(0) = f(\varepsilon)$ ist; folglich hat $f(\varepsilon)$ den constanten Werth 1 und es folgt aus (32):

$$(33.) \quad \frac{\eta'(0)}{\eta(\frac{1}{2}\pi)} = \vartheta(0).\vartheta(\tfrac{1}{2}\pi) \quad ; \quad \frac{\gamma'(0)}{\gamma(\frac{1}{2}\pi)} = \theta(0).\theta(\tfrac{1}{2}\pi).$$

Hiernach ergiebt sich aus (21), wenn man für $\theta(0).\theta(\frac{1}{2}\pi)$ seinen Werth $\vartheta^2(0)$ setzt:

$$\frac{\gamma'(0)}{\gamma(\frac{1}{2}\pi)} = \vartheta^2(0) \quad , \quad \text{mithin } \frac{1}{k'}\cdot\frac{\gamma'(0)}{\gamma(\frac{1}{2}\pi)} = \vartheta^2(\tfrac{1}{2}\pi) = \frac{\varpi}{\pi},$$

und man erhält:

$$(34.) \quad \vartheta(\tfrac{1}{2}\pi) = \sqrt{\frac{\varpi}{\pi}} \quad ; \quad \vartheta(0) = \sqrt{\left(\frac{k'\varpi}{\pi}\right)} \quad ; \quad \eta(\tfrac{1}{2}\pi) = \sqrt{\left(\frac{k\varpi}{\pi}\right)}.$$

Durch diese Ausdrücke reduciren sich die Gleichungen (12) auf:

$$(35.) \begin{cases} \eta(\frac{1}{2}i\tau) = \frac{i}{\sqrt[4]{\varepsilon}}\cdot\sqrt{\frac{k'\varpi}{\pi}} \quad ; \quad \eta(i\tau) = 0 \quad ; \quad \eta(\frac{1}{2}\pi + i\tau) = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\sqrt{\left(\frac{k\varpi}{\pi}\right)}; \\ \vartheta(\frac{1}{2}i\tau) = 0 \quad ; \quad \vartheta(i\tau) = -\frac{1}{\varepsilon}\cdot\sqrt{\left(\frac{k'\varpi}{\pi}\right)} \quad ; \quad \vartheta(\frac{1}{2}\pi + i\tau) = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\sqrt{\frac{\varpi}{\pi}}. \end{cases}$$

Setzt man jetzt

$$F(x,y)=\frac{\sin\operatorname{am}\frac{wx}{\pi}\cos\operatorname{am}\frac{wy}{\pi}\Delta\operatorname{am}\frac{wy}{\pi}+\sin\operatorname{am}\frac{wy}{\pi}\cos\operatorname{am}\frac{wx}{\pi}\Delta\operatorname{am}\frac{wx}{\pi}}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{wx}{\pi}\sin^2\operatorname{am}\frac{wy}{\pi}},$$

so hat man, wegen (X, XI, XII):

$$F(x,y)=\frac{\frac{k'}{k}\left\{\frac{\eta(x)}{\vartheta(x)}\cdot\frac{\eta(y+\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta(y)}\cdot\frac{\vartheta(y+\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta(y)}+\frac{\eta(y)}{\vartheta(y)}\cdot\frac{\eta(x+\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta(y)}\cdot\frac{\vartheta(x+\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta(x)}\right\}}{1-\frac{\eta^2(x)}{\vartheta^1(x)}\cdot\frac{\eta^2(y)}{\vartheta^2(y)}}$$

$$=\frac{k'}{k}\cdot\frac{\eta(x)\vartheta(x).\eta(y+\frac{1}{2}\pi)\vartheta(y+\frac{1}{2}\pi)+\eta(y)\vartheta(y).\eta(x+\frac{1}{2}\pi)\vartheta(x+\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta^2(x)\vartheta^2(y)^2-\eta^2(x)\eta^2(y)}.$$

Hierin ist, wegen (27):

$$\eta(x)\vartheta(x)=\tfrac{1}{2}\gamma(\tfrac{1}{2}\pi)\gamma(x)\;;$$
$$\eta(y)\vartheta(y)=\tfrac{1}{2}\gamma(\tfrac{1}{2}\pi)\gamma(y):$$
$$\eta(y+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta(y+\tfrac{1}{2}\pi)=\tfrac{1}{2}\gamma(\tfrac{1}{2}\pi)\gamma(y+\tfrac{1}{2}\pi),$$
$$\eta(x+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta(x+\tfrac{1}{2}\pi)=\tfrac{1}{2}\gamma(\tfrac{1}{2}\pi)\gamma(x+\tfrac{1}{2}\pi);$$

also ist der Ausdruck im Zähler von $F(x, y)$ gleich

$$\tfrac{1}{2}\gamma^2(\tfrac{1}{2}\pi)\{\gamma(x)\gamma(y+\tfrac{1}{2}\pi)+\gamma(y)\gamma(x+\tfrac{1}{2}\pi)\},$$

und Dies ist, wegen (25), gleich

$$\text{(N.)}\qquad \tfrac{1}{2}\gamma^2(\tfrac{1}{2}\pi)\eta(x+y)\vartheta(x-y).$$

Für den Nenner folgt, wenn man $y=0$ setzt, aus (17, 18):

$$(\vartheta.)\quad 2\vartheta^2(x)=\theta(\tfrac{1}{2}\pi)\theta(x)+\theta(0)\theta(x+\tfrac{1}{2}\pi);$$
$$2\vartheta^2(y)=\theta(\tfrac{1}{2}\pi)\theta(y)+\theta(0)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi);$$
$$(\eta.)\quad 2\eta^2(x)=\theta(\tfrac{1}{2}\pi)\theta(x)+\theta(0)\theta(x+\tfrac{1}{2}\pi);$$
$$2\eta^2(y)=\theta(\tfrac{1}{2}\pi)\theta(y)-\theta(0)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi).$$

Hieraus folgt, multiplicando:

$$4\vartheta^2(x)\vartheta^2(y)=\theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\theta(x)\theta(y)+\theta^2(0)\theta(x+\tfrac{1}{2}\pi)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi)$$
$$+\theta(0)\theta(\tfrac{1}{2}\pi)\{\theta(y)\theta(x+\tfrac{1}{2}\pi)+\theta(x)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi)\}$$

$$4\eta^2(x)\eta^2(y)=\theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\theta(x)\theta(y)+\theta^2(0)\theta(x+\tfrac{1}{2}\pi)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi)$$
$$-\theta(0)\theta(\tfrac{1}{2}\pi)\{\theta(y)\theta(x+\tfrac{1}{2}\pi)+\theta(x)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi)\},$$

mithin ist:

$$4[\vartheta^2(x)\vartheta^2(y)-\eta^2(x)\eta^2(y)]=2\theta(0)\theta(\tfrac{1}{2}\pi)[\theta(y)\theta(x+\tfrac{1}{2}\pi)+\theta(y)\theta(x+\tfrac{1}{2}\pi)].$$

Der Ausdruck rechts ist, wegen (17), gleich $4\theta(0)\theta(\frac{1}{2}\pi)\vartheta(x+y)\vartheta(x-y)$; folglich ist der Nenner von $F(x,y)$, wenn man noch erwägt, dass wegen (21) $\theta(0)\theta(\frac{1}{2}\pi) = \vartheta^2(0)$ ist:

$$(36.)\quad \vartheta^2(x)\vartheta^2(y) - \eta^2(x)\eta^2(y) = \vartheta^2(0)\vartheta(x+y)\vartheta(x-y).$$

Aus (N.) und (36) folgt:

$$F(x,y) = \frac{k'}{k}\cdot\frac{\gamma^2(\frac{1}{2}\pi)}{2.\vartheta^2(0)}\cdot\frac{\eta(x+y)\vartheta(x-y)}{\vartheta(x+y)\vartheta(x-y)} = \frac{k'}{k}\cdot\frac{\eta(\frac{1}{2}\pi)\vartheta(\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta^2(0)}\cdot\frac{\eta(x+y)}{\vartheta(x+y)},$$

oder, da $\frac{k'}{k}\cdot\frac{\eta(\frac{1}{2}\pi)\vartheta(\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta^2(0)} = \frac{\vartheta^2(0)}{\vartheta^2(\frac{1}{2}\pi)}\cdot\frac{\vartheta^2(\frac{1}{2}\pi)}{\eta^2(\frac{1}{2}\pi)}\cdot\frac{\eta(\frac{1}{2}\pi)\vartheta(\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta^2(0)} = \frac{\vartheta(\frac{1}{2}\pi)}{\eta(\frac{1}{2}\pi)} = \frac{1}{\sqrt{k}}$ ist:

$$F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\eta(x+y)}{\vartheta(x+y)} = \sin\operatorname{am}\frac{w}{\pi}(x+y).$$

Man hat also:

$$(37.)\quad \sin\operatorname{am}\frac{w}{\pi}(x+y) = \frac{\sin\operatorname{am}\frac{wx}{\pi}\cos\operatorname{am}\frac{wy}{\pi}\Delta\operatorname{am}\frac{wy}{\pi} + \sin\operatorname{am}\frac{wy}{\pi}\cos\operatorname{am}\frac{wx}{\pi}\Delta\operatorname{am}\frac{wx}{\pi}}{1 - k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{wx}{\pi}\sin^2\operatorname{am}\frac{wy}{\pi}}.$$

Dividirt man (36) durch $\vartheta^2(x).\vartheta^2(y)$, so erhält man

$$\frac{\vartheta(x+y).\vartheta(x-y)}{\vartheta^2(x).\vartheta^2(y)} = \frac{1}{\vartheta^2(0)}\left\{1 - \frac{\eta^2(x)}{\vartheta^2(x)}\cdot\frac{\eta^2(y)}{\vartheta^2(y)}\right\},$$

folglich, da $\frac{\eta(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{k}.\sin\operatorname{am}\frac{wy}{\pi}$, $\frac{\eta(y)}{\vartheta(y)} = \sqrt{k}.\sin\operatorname{am}\frac{wy}{\pi}$ und $\vartheta(0) = \sqrt{\left(\frac{k'w}{\pi}\right)}$ ist:

$$(38.)\quad \frac{\vartheta(x+y).(x-y)}{\vartheta^2(x).\vartheta^2(y)} = \frac{\pi}{k'w}\cdot\left\{1 - k^2.\sin^2\operatorname{am}\frac{wx}{\pi}\sin^2\operatorname{am}\frac{wy}{\pi}\right\}.$$

Setzt man in (36) $x+\frac{1}{2}i\tau$ statt x, so erhält man

$$(39.)\quad \eta^2(x)\vartheta^2(y) - \vartheta^2(x)\eta^2(y) = \vartheta^2(0)\eta(x+y)\eta(x-y),$$

oder

$$(40.)\quad \frac{\eta(x+y).(x-y)}{\vartheta^2(x).\vartheta^2(y)} = \frac{k\pi}{k'w}\cdot\left\{\sin^2\operatorname{am}\frac{wx}{\pi} - \sin^2\operatorname{am}\frac{wy}{\pi}\right\}.$$

Aus (38 und 40) folgt, dividendo:

$$(41.)\quad \sin\operatorname{am}\frac{w}{\pi}(x+y)\sin\operatorname{am}\frac{w}{\pi}(x-y) = \frac{\sin^2\operatorname{am}\frac{wx}{\pi} - \sin^2\operatorname{am}\frac{wy}{\pi}}{1 - k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{wx}{\pi}\sin^2\operatorname{am}\frac{wy}{\pi}}.$$

Aus der Formel (37) könnte man vermöge der Gleichungen

$$\cos^2\operatorname{am} = 1 - \sin^2\operatorname{am}\quad\text{und}\quad \Delta^2\operatorname{am} = 1 - k^2\sin^2\operatorname{am},$$

leicht den Werth von $\cos\text{am}(u+v)$ und $\Delta^2\text{am}(u+v)$ ableiten. Da aber die hierzu nöthige Rechnung weitläuftig und nicht elegant ist, wird es besser sein, auch diese Formeln *direct* abzuleiten; was sich auf eine einfache Weise vermöge der obigen Formeln thun lässt. Zunächst erhält man, wenn man zwei Gleichungen von der Form (28) mit einander multiplicirt:

$$\eta^4(\tfrac{1}{2}\pi)\eta^2(\alpha+\tfrac{1}{2}\pi)\eta^2(\beta+\tfrac{1}{2}\pi) = \vartheta^4(\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^2(\alpha+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^2(\beta+\tfrac{1}{2}\pi)+\vartheta^4(0)\vartheta^2(\alpha)\vartheta^2(\beta)$$
$$-\vartheta^2(0)\vartheta^2(\tfrac{1}{2}\pi)[\vartheta^2(\alpha)\vartheta^2(\beta+\tfrac{1}{2}\pi)+\vartheta^2(\alpha+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^2(\beta)]$$

$$= \vartheta^4(\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^4(\alpha+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^2(\beta+\tfrac{1}{2}\pi) \pm 2\vartheta^2(0)\vartheta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta(\alpha)\vartheta(\beta)\vartheta(\alpha+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta(\beta+\tfrac{1}{2}\pi)$$
$$+\vartheta^4(0)\vartheta^2(\alpha)\vartheta^2(\beta)-\vartheta^2(0)\vartheta^2(\tfrac{1}{2}\pi)[\vartheta^2(\alpha)\vartheta^2(\beta+\tfrac{1}{2}\pi)$$
$$\pm 2\vartheta(\alpha)\vartheta(\beta+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta(\beta)\vartheta(\alpha+\tfrac{1}{2}\pi)+\vartheta^2(\alpha+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^2(\beta)]$$

oder:

$$(42.)\qquad \eta^4(\tfrac{1}{2}\pi)\eta^2(\alpha+\tfrac{1}{2}\pi)\eta^2(\beta+\tfrac{1}{2}\pi) = [\vartheta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta(\alpha+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta(\beta+\tfrac{1}{2}\pi)$$
$$\pm\vartheta^2(0)\vartheta(\alpha)\vartheta(\beta)]^2-\vartheta^2(0)\vartheta^2(\tfrac{1}{2}\pi)[\vartheta(\alpha)\vartheta(\beta+\tfrac{1}{2}\pi)$$
$$\pm\vartheta(\beta)\vartheta(\alpha+\tfrac{1}{2}\pi)]^2.$$

Aus den Formeln (35) $(\vartheta),(\eta)$ folgt nun:

$$\vartheta(x)\vartheta(y) = \tfrac{1}{2}\sqrt{[\theta(\tfrac{1}{2}\pi)\theta(x)+\theta(0)\theta(x+\tfrac{1}{2}\pi)]}.\sqrt{[\theta(\tfrac{1}{2}\pi)\theta(y)+\theta(0)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi)]},$$

und hieraus, durch Verwandlung von x, y resp. in $x+\frac{1}{2}\pi$, $y+\frac{1}{2}\pi$:

$$\vartheta(x+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta(y+\tfrac{1}{2}\pi) = \tfrac{1}{2}\sqrt{[\theta(\tfrac{1}{2}\pi)\theta(x+\tfrac{1}{2}\pi)+\theta(0)\theta(x)]}.\sqrt{[\theta(\tfrac{1}{2}\pi)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi)+\theta(0)\theta(y)]}.$$

Das Product beider Ausdrücke ist:

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{\{\theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\theta(x)\theta(y)+\theta^2(0)\theta(x+\tfrac{1}{2}\pi)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi)+\theta(0)\theta(\tfrac{1}{2}\pi)[\theta(x)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi)+\theta(y)\theta(x+\tfrac{1}{2})]\}}$$
$$\times\sqrt{\{\theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\theta(x+\tfrac{1}{2}\pi)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi)+\theta^2(0)\theta(x)\theta(y)+\theta(0)\theta(\tfrac{1}{2}\pi)[\theta(x)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi)+\theta(y)\theta x+\tfrac{1}{2}\pi)]\}}$$

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{\{[\theta^4(\tfrac{1}{2}\pi)+\theta^4(0)]\theta(x)\theta(y)\theta(x+\tfrac{1}{2}\pi)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi)}$$
$$+\theta^2(0)\theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)[\theta(x)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi)+\theta(y)\theta(x+\tfrac{1}{2}\pi)]^2$$
$$+\theta^2(0)\theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)[\theta^2(x)\theta^2(y)+\theta^2(x+\tfrac{1}{2}\pi)\theta^2(y+\tfrac{1}{2}\pi)]$$
$$+\theta(0)\theta(\tfrac{1}{2}\pi)[\theta^2(0)+\theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)][\theta(x)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi)+\theta(y)\theta(x+\tfrac{1}{2}\pi)]$$
$$\times[\theta(x)\theta(y)+\theta(x+\tfrac{1}{2}\pi)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi)]\},$$

oder, wenn man der Reihe nach die Formeln (15 u. 16; 17, 15 u. 16; 13 u. 14; 15 u. 16) berücksichtigt:

$$=\tfrac{1}{4}\surd\{[\theta^4(\tfrac{1}{2}\pi)+\theta^4(0)][\vartheta^2(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^2(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)-\eta^2(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\eta^2(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)]$$
$$+2\theta^2(0)\theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^2(x+y)\vartheta^2(x-y)$$
$$+2\theta^2(0)\theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)[\vartheta^2(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^2(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)+\eta^2(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\eta^2(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)]$$
$$+4\theta(0)\theta(\tfrac{1}{2}\pi)[\theta^2(0)+\theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)]\vartheta(x+y)\vartheta(x-y)\vartheta(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)\}$$

$$=\tfrac{1}{4}\surd\{[\theta^2(0)+\theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)]^2\vartheta^2(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^2(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)$$
$$-[\theta^2(0)-\theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)]^2\eta^2(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\eta^2(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)+2\theta^2(0)\theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^2(x+y)\vartheta^2(x-y)$$
$$+2\theta(0)\theta(\tfrac{1}{2}\pi)[\theta^2(0)+\theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)]\vartheta(x+y)\vartheta(x-y)\vartheta(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)\}.$$

Wegen (21) ist aber $\theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)+\theta^2(0)=2\vartheta^2(\tfrac{1}{2}\pi)$,

$$\theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)-\theta^2(0)=-2\eta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\ \text{ und }\ 2\theta(0)\theta(\tfrac{1}{2}\pi)=2\vartheta^2(0),$$

folglich ist unser Ausdruck:

$$=\tfrac{1}{4}\surd\{4\vartheta^4(\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^2(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^2(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)+4\vartheta^4(0)\vartheta^2(x+y)\vartheta^2(x-y)$$
$$+8\vartheta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^2(0)\vartheta(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta(x+y)\vartheta(x-y)$$
$$-4\eta^4(\tfrac{1}{2}\pi)\eta^2(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\eta^2(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)\}$$
$$=\tfrac{1}{4}\surd\{[2\vartheta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)+2\vartheta^2(0)\vartheta(x+y)\vartheta(x-y)]^2$$
$$-4\eta^4(\tfrac{1}{2}\pi)\eta^2(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\eta^2(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)\}.$$

Setzt man aber in (42) $\alpha=x+y$, $\beta=x-y$, so ist:

$$4\eta^4(\tfrac{1}{2}\pi)\eta^2(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\eta^2(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)$$
$$=[2\vartheta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)+2\vartheta^2(0)\vartheta(x+y)\vartheta(x-y)]^2$$
$$-4\vartheta^2(0)\vartheta^2(\tfrac{1}{2}\pi)[\vartheta(x+y)\vartheta(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)+\vartheta(x-y\ \vartheta(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)]^2,$$

mithin ist:

$$\textbf{(43.)}\qquad 2\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(x+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta(y+\tfrac{1}{2}\pi)$$
$$=\vartheta(0)\vartheta(\tfrac{1}{2}\pi)[\vartheta(x+y)\vartheta(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)+\vartheta(x-y)\vartheta(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)].$$

Vergrössert man hier x und y je um $\tfrac{1}{2}i\tau$, so erhält man, wegen (10) u. (9):

$$\vartheta(x+\tfrac{1}{2}i\tau)\vartheta(y+\tfrac{1}{2}i\tau)\vartheta(x+\tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{1}{2}i\tau)\vartheta(y+\tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{1}{2}i\tau)$$
$$=\tfrac{1}{8}e^{-2i(x+y)+\pi i}\eta(x)\eta(y)\eta(x+\tfrac{1}{2}\pi)\eta(y+\tfrac{1}{2}\pi)=-\tfrac{1}{8}\eta(x)\eta(y)\eta(x+\tfrac{1}{2}\pi)\eta(y+\tfrac{1}{2}\pi).e^{-2i(x+y)}.$$

Die Seite rechts giebt

$$-\frac{\vartheta(0)\vartheta(\tfrac{1}{2}\pi)}{8}.[e^{-2i(x+y)}\vartheta(x+y)\vartheta(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)+e^{-2i(x+y+\frac{1}{2}\pi)}\vartheta(x-y)\vartheta(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)]$$
$$=-\tfrac{1}{8}[\vartheta(x+y)\vartheta(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)-\vartheta(x-y)\vartheta(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)]e^{-2i(x+y)};$$

man hat also:

$$(44.)\qquad 2\eta(x)\eta(y)\eta(x+\tfrac{1}{2}\pi)\eta(y+\tfrac{1}{2}\pi)$$
$$=\vartheta(0)\vartheta(\tfrac{1}{2}\pi)[\vartheta(x+y)\vartheta(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)-\vartheta(x-y)\vartheta(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)].$$

Setzt man nun

$$F(x,y)=\frac{\Delta\operatorname{am}\frac{wx}{\pi}\Delta\operatorname{am}\frac{wy}{\pi}-k^2\sin\operatorname{am}\frac{wx}{\pi}\sin\operatorname{am}\frac{wy}{\pi}\cos\operatorname{am}\frac{wx}{\pi}\cos\operatorname{am}\frac{wy}{\pi}}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{wx}{\pi}\sin^2\operatorname{am}\frac{wy}{\pi}},$$

so ist

$$F(x,y)=k'.\frac{\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(x+\frac{1}{2}\pi)\vartheta(y+\frac{1}{2}\pi)-\eta(x)\eta(y)\eta(x+\frac{1}{2}\pi)\eta(y+\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta^2(x)\vartheta^2(y)-\eta^2(x)\eta^2(y)},$$

mithin, wegen (43, 44 und 36):

$$F(x,y)=k'.\frac{\vartheta(0)\vartheta(\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta^2(0)}.\frac{\vartheta(x+y+\frac{1}{2}\pi)\vartheta(x-y)}{\vartheta(x+y)\vartheta(x-y)}=\sqrt{k'}.\frac{\vartheta(x+y+\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta(x+y)},$$

oder:
$$F(x,y)=\Delta\operatorname{am}\frac{w}{\pi}(x+y).$$

Man hat also:

$$(45.)\quad \Delta\operatorname{am}\frac{w}{\pi}(x+y)=\frac{\Delta\operatorname{am}\frac{wx}{\pi}\Delta\operatorname{am}\frac{wy}{\pi}-k^2\sin\operatorname{am}\frac{wx}{\pi}\sin\operatorname{am}\frac{wy}{\pi}\cos\operatorname{am}\frac{wx}{\pi}\cos\operatorname{am}\frac{wy}{\pi}}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{wx}{\pi}\sin^2\operatorname{am}\frac{wy}{\pi}}.$$

Endlich folgt noch aus (28):

$$(46.)\qquad \vartheta^4(\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^2(\alpha+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^2(\beta+\tfrac{1}{2}\pi)$$
$$=[\vartheta^2(0)\vartheta(\alpha)\vartheta(\beta)\pm\eta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\eta(\alpha+\tfrac{1}{2}\pi)\eta(\beta+\tfrac{1}{2}\pi)]^2$$
$$+\eta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^2(0)[\vartheta(\alpha)\eta(\beta+\tfrac{1}{2}\pi)\mp\vartheta(\beta)\eta(\alpha+\tfrac{1}{2}\pi)]^2$$

und aus (35) (ϑ), (η):

$$\eta(x+\tfrac{1}{2}\pi)\eta(y+\tfrac{1}{2}\pi)=\tfrac{1}{2}\sqrt{[\theta(\tfrac{1}{2}\pi)\theta(x+\tfrac{1}{2}\pi)-\theta(0)\theta(x)]}$$
$$\times\sqrt{[\theta(\tfrac{1}{2}\pi)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi)-\theta(0)\theta(y)]}$$

$$\vartheta(x)\vartheta(y)=\tfrac{1}{2}\sqrt{[\theta(\tfrac{1}{2}\pi)\theta(x)+\theta(0)\theta(x+\tfrac{1}{2}\pi)]}.\sqrt{[\theta(\tfrac{1}{2}\pi)\theta(y)+\theta(0)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi)]}.$$

Das Product dieser beiden Ausdrücke ist:

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{\{\theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\theta(x+\tfrac{1}{2}\pi)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi)+\theta^2(0)\theta(x)\theta(y)-\theta(0)\theta(\tfrac{1}{2}\pi)[\theta(x)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi)}$$
$$\overline{+\theta(y)\theta(x+\tfrac{1}{2}\pi)]\}}.\sqrt{\{\theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\theta(x)\theta(y)+\theta^2(0)\theta(x+\tfrac{1}{2}\pi)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi)}$$
$$\overline{+\theta(0)\theta(\tfrac{1}{2}\pi)[\theta(x)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi)+\theta(y)\theta(x+\tfrac{1}{2}\pi)]\}}$$

$$= \tfrac{1}{4}V\{[\theta^4(\tfrac{1}{2}\pi)+\theta^4(0)]\theta(x)\theta(y)\theta(x+\tfrac{1}{2}\pi)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi)$$
$$-\theta^2(0)\theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)[\theta(x)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi)+\theta(y)\theta(x+\tfrac{1}{2}\pi)]^2$$
$$-2\theta^2(0)\theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)[\theta^2(x+\tfrac{1}{2}\pi)\theta^2(y+\tfrac{1}{2}\pi)+\theta^2(x)\theta^2(y)]$$
$$+\theta(0)\theta(\tfrac{1}{2}\pi)[\theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)-\theta^2(0)][\theta(x)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi)+\theta(y)\theta(x+\tfrac{1}{2}\pi)]$$
$$\times[\theta(x+\tfrac{1}{2}\pi)\theta(y+\tfrac{1}{2}\pi)-\theta(x)\theta(y)]\}$$

$$= \tfrac{1}{4}V\{[\theta^4(\tfrac{1}{2}\pi)+\theta^4(0)][\vartheta^2(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^2(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)-\eta^2(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\eta^2(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)]$$
$$-2\theta^2(0)\theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^2(x+y)\vartheta^2(x-y)+2\theta^2(0)\theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)[\vartheta^2(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^2(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)$$
$$+\eta^2(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\eta^2(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)]$$
$$+4\theta(0)\theta(\tfrac{1}{2}\pi)[\theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)-\theta^2(0)]\vartheta(x+y)\vartheta(x-y)\eta(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\eta(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)\}$$

$$= \tfrac{1}{4}V\{[\theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)+\theta^2(0)]^2\vartheta^2(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^2(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)-[\theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)-\theta^2(0)]^2$$
$$\times\eta^2(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\eta^2(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)-2\theta^2(0)\theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^2(x+y)\vartheta^2(x-y)$$
$$+4\theta(0)\theta(\tfrac{1}{2}\pi)[\theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)-\theta^2(0)]\vartheta(x+y)\vartheta(x-y)\eta(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\eta(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)\}$$

$$= \tfrac{1}{4}V\{4\vartheta^4(\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^2(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^2(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)-4\eta^4(\tfrac{1}{2}\pi)\eta^2(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\eta^2(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)$$
$$-4\vartheta^4(0)\vartheta^2(x+y)\vartheta^2(x-y)+8\eta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^2(0)\eta(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\eta(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta(x+y)\vartheta(x-y)\}$$

$$= \tfrac{1}{4}V\{4\vartheta^4(\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^2(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^2(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)$$
$$-[2\eta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\eta(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\eta(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)-2\vartheta^2(0)\vartheta(x+y)\vartheta(x-y)]^2\}$$

Aus (46) folgt aber, wenn man $\alpha = x+y$, $\beta = x-y$ setzt:

$$4\vartheta^4(\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^2(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^2(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)$$
$$=[2\eta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\eta(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)\eta(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)-2\vartheta^2(0)\vartheta(x+y)\vartheta(x-y)]^2$$
$$+4\eta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta^2(0)[\vartheta(x+y)\eta(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)+\vartheta(x-y)\eta(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)]^2;$$

also ist:

$$(47.)\quad 2\vartheta(x)\vartheta(y)\eta(x+\tfrac{1}{2}\pi)\eta(y+\tfrac{1}{2}\pi)$$
$$=\eta(\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta(0)[\vartheta(x+y)\eta(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)+\vartheta(x-y)\eta(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)]$$

Vergrössert man hier x und y um $\tfrac{1}{2}\pi$, so hat man auch:

$$(48.)\quad 2\eta(x)\eta(y)\vartheta(x+\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta(y+\tfrac{1}{2}\pi)$$
$$=\eta(\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta(0)[\vartheta(x+y)\eta(x-y+\tfrac{1}{2}\pi)-\vartheta(x-y)\eta(x+y+\tfrac{1}{2}\pi)].$$

Setzt man also

$$F(x,y) = \frac{\cos\text{am}\frac{wx}{\pi}\cos\text{am}\frac{wy}{\pi} - \sin\text{am}\frac{wx}{\pi}\sin\text{am}\frac{wy}{\pi}\Delta\text{am}\frac{wx}{\pi}\Delta\text{am}\frac{wy}{\pi}}{1-k^2\sin^2\text{am}\frac{wx}{\pi}\sin^2\text{am}\frac{wy}{\pi}},$$

woraus

$$F(x,y) = \frac{k'}{k}\cdot\frac{\eta(x+\frac{1}{2}\pi)\eta(y+\frac{1}{2}\pi)\vartheta(x)\vartheta(x)\vartheta(y) - \eta(x)\eta(y)\vartheta(x+\frac{1}{2}x)\vartheta(y+\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta^2(x)\vartheta^2(y)-\eta^2(x)\eta^2(y)},$$

folgt, so hat man, wegen (47, 48 und 36):

$$F(x,y) = \frac{k'}{k}\cdot\eta(\tfrac{1}{2}\pi)\vartheta(0)\cdot\frac{\eta(x+y+\frac{1}{2}\pi)\vartheta(x-y)}{\vartheta(x+y)\vartheta(x-y)} = \sqrt{\left(\frac{k'}{k}\right)}\cdot\frac{\eta(x+y+\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta(x+y)}$$

$= \cos\text{am}\frac{w}{\pi}(x+y)$, also

$$(49.)\quad \cos\text{am}\frac{w}{\pi}(x+y) = \frac{\cos\text{am}\frac{wx}{\pi}\cos\text{am}\frac{wy}{\pi} - \sin\text{am}\frac{wx}{\pi}\sin\text{am}\frac{wy}{\pi}\Delta\text{am}\frac{wx}{\pi}\Delta\text{am}\frac{wy}{\pi}}{1-k^2\sin^2\text{am}\frac{wx}{\pi}\sin^2\text{am}\frac{wy}{\pi}}$$

Alle bisher erörterten Eigenschaften der Functionen ϑ, η sind von der individuellen Beschaffenheit des τ unabhängig, und setzen nur voraus, dass τ positiv und reell sei. Nur die Grössenwerthe von w, w', k, k' hangen von τ ab, und es erleiden also, wenn τ einen andern Werth bekommt, zwar die Natur der Abhängigkeit des ϑ, η von x eine Aenderung, keineswegs aber die, nur aus der *Form* dieser Reihen entnommenen Gleichungen. Umgekekehrt wird daher auch τ eine Function von w, k sein; und die nächste Aufgabe ist, die Natur dieser Function zu erforschen.

Bekanntlich haben die trigonometrischen Functionen eine reelle Periode, und zwar einzig und allein in Bezug auf den Modul 2π; mithin haben auch die Functionen $\vartheta(x)$, $\eta(x)$ eine reelle Periode, nur in Bezug auf 2π. Hieraus folgt vermöge der Gleichungen (X, XI, XII), dass für eine beliebige ganze Zahl m,

$$\sin\text{am}\left(\frac{wx}{\pi}+2mw\right) = \sin\text{am}\frac{wx}{\pi}; \quad \cos\text{am}\left(\frac{wx}{\pi}+2mw\right) = \cos\text{am}\frac{wx}{\pi};$$
$$\Delta\text{am}\left(\frac{wx}{\pi}+2mw\right) = \Delta\text{am}\frac{wx}{\pi},$$

ist und dass also die drei elliptischen Functionen $\sin\text{am}\,u$, $\cos\text{am}\,u$, $\Delta\text{am}\,u$ nur in Bezug auf den Modul $2w$ eine reelle Periode haben können, so lange sie sich auf den elliptischen Modul k beziehen. Diese Periodicität ist aber von dem speciellen Werthe des τ ganz unabhängig. Bezeichnet man daher durch τ' den

Werth, welchen τ annimmt, wenn man k in k', also ϖ in ϖ' verwandelt, so folgt, dass die einzige reelle Periode, welche die genannten drei Functionen für den elliptischen Modul k' haben, auf den Modul 2ϖ sich bezieht: d. h. das gleichzeitige Bestehen der drei Gleichungen

$$(\text{v.})\quad \sin\text{am}(u+v_1 k') = \sin\text{am}(u_1 k') \quad ; \quad \cos\text{am}(u+v_1 k') = \cos\text{am}(u_1 k') \; ;$$
$$\Delta\text{am}(u+v_1 k') = \Delta\text{am}(u_1 k')$$

ist nur möglich, wenn v die Form $\pm 2m\varpi'$ hat. Der specielle Werth des u ist hierbei gleichgültig. Setzt man daher $u=0$, wodurch

$$\sin\text{am}\, u = 0 \quad , \quad \cos\text{am}\, u = \Delta\text{am}\, u = 1$$

wird, so kann man die erwähnte Eigenschaft auch so aussprechen:

Das gleichzeitige Bestehen der drei Gleichungen:

$$(\text{w.})\quad \sin\text{am}(v_1 k') = 0 \quad , \quad \cos\text{am}(v_1 k') = 1 \quad ; \quad \Delta\text{am}(v_1 k') = 1$$

ist nur möglich, wenn v die Form $\pm 2m\varpi'$ hat.

Setzt man nun in (9) $x+i\tau$ statt x, so ergiebt sich:

$$\vartheta(x+2i\tau) = -\frac{1}{\varepsilon}e^{-2ix+2\tau}\vartheta(x+i\tau = \left(-\frac{1}{\varepsilon^3}e^{-2ix}\right)\left[-\frac{e^{-2ix}}{\varepsilon}\vartheta(x)\right].$$

Das Entsprechende gilt von (10), und es ist:

$$(50.)\quad \begin{cases} \vartheta(x+2i\tau) = \frac{1}{\varepsilon^4}e^{-4ix}\vartheta(x)\; ; \\ \vartheta(x+\frac{1}{2}\pi+2i\tau) = \frac{1}{\varepsilon^4}e^{-4ix}\vartheta(x+\frac{1}{2}\pi)\; ; \\ \eta(x+2i\tau) = \frac{1}{\varepsilon^4}e^{-4ix}\eta(x)\; ; \\ \eta(x+\frac{1}{2}\pi+2i\tau) = \frac{1}{\varepsilon^4}e^{-4ix}\eta(x+\frac{1}{2}\pi)\,. \end{cases}$$

Hieraus folgt, wenn man in (X, XI, XII) x um $2i\tau$ vergrössert, dass in dem rechts befindlichen Quotienten Zähler und Nenner einen gemeinschaftlichen Factor erhalten, sonst aber ungeändert bleiben. Man hat folglich:

$$\sin\text{am}\left(\frac{wx}{\pi}+\frac{2iw\tau}{\pi},k\right) = \sin\text{am}\left(\frac{wx}{\pi},k\right) \;;\; \cos\text{am}\left(\frac{wx}{\pi}+\frac{2iw\tau}{\pi},k\right) = \cos\text{am}\left(\frac{wx}{\pi},k\right)\;;$$
$$\Delta\text{am}\left(\frac{wx}{\pi}+\frac{2iw\tau}{\pi},k\right) = \Delta\text{am}\left(\frac{wx}{\pi},k\right),$$

mithin für $x=0$:

$$(\tau.)\quad \sin\text{am}\left(\frac{2wi\tau}{\pi},k\right) = 0 \;;\; \cos\text{am}\left(\frac{2wi\tau}{\pi},k\right) = 1 \;:\; \Delta\text{am}\left(\frac{2wi\tau}{\pi},k\right) = 1\,.$$

Setzt man nun

$$(i.) \quad \sin\theta = i\,\text{tang}\,\Phi\,,$$

so wird

$$\frac{\partial\theta}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\Phi)}} = \frac{i\partial\Phi}{\sqrt{(\cos^2\Phi+k^2\sin^2\Phi)}} = \frac{i\partial\Phi}{\sqrt{(1-k'^2\sin^2\Phi)}}\,,$$

mithin:

$$\int_0^\theta \frac{\partial\theta}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)}} = i\int_0^\Phi \frac{\partial\Phi}{\sqrt{(1-k'^2\sin^2\Phi)}}.$$

Bezeichnet man also das Integral $\int_0^\Phi \frac{\partial\Phi}{\sqrt{(1-k'^2\sin^2\Phi)}}$ mit u, so ist $\int_0^\theta \frac{\partial\theta}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)}}$ $= iu$, also $\Phi = \text{am}(u, k')$; $\theta = \text{am}(iu, k)$ und man hat wegen (i):

$$(51.) \qquad \sin\text{am}(iu, k) = i\,\text{tang}\,\text{am}(u, k').$$

Hieraus folgt $\cos\text{am}(iu, k) = \sqrt{[1+\text{tang}^2\text{am}(u, k')]} = \frac{1}{\cos\text{am}(u, k')}$;

$$\Delta\text{am}(iu, k) = \sqrt{[1+k^2\text{tang}^2\text{am}(u, k')]} = \frac{\sqrt{[1-k'^2\sin^2\text{am}(u, k')]}}{\cos\text{am}(u, k')}\,, \quad \text{also:}$$

$$(52.) \quad \cos\text{am}(iu, k) = \frac{1}{\cos\text{am}(u, k')}\;;\quad \Delta\text{am}(iu, k) = \frac{\Delta\text{am}(u, k')}{\cos\text{am}(u, k')}.$$

Vermöge dieser Formeln folgt aus (τ)

$$\frac{1}{\cos\text{am}\left(\frac{2w\tau}{\pi}, k'\right)} = 1\;;\quad i\,\text{tang}\,\text{am}\left(\frac{2w\tau}{\pi}, k'\right) = 0\;;\quad \Delta\text{am}\left(\frac{2w\tau}{\pi}, k'\right) = 1\,,$$

oder:

$$\cos\text{am}\left(\frac{2w\tau}{\pi}, k'\right) = 1\;;\quad \sin\text{am}\left(\frac{2w\tau}{\pi}, k'\right) = 0\;;\quad \Delta\text{am}\left(\frac{2w\tau}{\pi}, k'\right) = 1;$$

folglich kann $v = \frac{2w\tau}{\pi}$ nur die Form $2mw'$ haben, d. h. es muss $\tau = m\frac{\pi w'}{w}$ sein. Weiter unten wird sich zeigen, dass $m = 1$ sein muss.

Aus (37) folgt nun

$$\sin\text{am}(u+v) + \sin\text{am}(u-v) = \frac{2\sin\text{am}\,u\cos\text{am}\,v\,\Delta\text{am}\,v}{1-k^2\sin^2\text{am}\,u\sin^2\text{am}\,v}\;;$$

$$\sin\text{am}(u+v) - \sin\text{am}(u-v) = \frac{2\sin\text{am}\,v\cos\text{am}\,u\,\Delta\text{am}\,u}{1-k^2\sin^2\text{am}\,u\sin^2\text{am}\,v}\,,$$

mithin, multiplicando:

$$\sin^2 \mathrm{am}(u+v) - \sin^2 \mathrm{am}(u-v) = \frac{4 \sin \mathrm{am}\, v \cos \mathrm{am}\, v \Delta \mathrm{am}\, v . \sin \mathrm{am}\, u \cos \mathrm{am}\, u \Delta \mathrm{am}\, u}{(1-k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, u \sin^2 \mathrm{am}\, v)^2}.$$

Hierin ist:

$$\frac{\partial}{\partial u}\cdot\left(\frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\, v \sin^2 \mathrm{am}\, u}\right)$$

$$= \frac{(1-k^2\sin^2\mathrm{am}\, v\sin^2\mathrm{am}\, u)\partial \sin^2\mathrm{am}\, u + k^2\sin^2\mathrm{am}\, v\sin^2\mathrm{am}\, u\,\partial\sin^2\mathrm{am}\, u}{(1-k^2\sin^2\mathrm{am}\, v\sin^2\mathrm{am}\, u)^2\cdot\partial u}$$

$$= \frac{\partial \sin^2\mathrm{am}\, u}{(1-k^2\sin^2\mathrm{am}\, v\sin^2\mathrm{am}\, u)^2\,\partial u},$$

also hat man:

$$\sin^2\mathrm{am}(u+v) - \sin^2\mathrm{am}(u-v) = 2\sin\mathrm{am}\, v\cos\mathrm{am}\, v\Delta\mathrm{am}\, v\frac{\partial}{\partial u}\cdot\left\{\frac{\sin^2\mathrm{am}\, u}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\, v\sin^2\mathrm{am}\, u}\right\},$$

folglich, wenn man $v = \frac{wx}{\pi}$, $u = \frac{w\alpha}{\pi}$ setzt und beide Seiten nach α, von 0 bis y integrirt:

$$(53.)\quad \frac{w}{\pi}\int_0^y\left\{\sin^2\mathrm{am}\frac{w}{\pi}(x+\alpha) - \sin^2\mathrm{am}\frac{w}{\pi}(x-\alpha)\right\}\partial\alpha = \frac{2\sin\mathrm{am}\frac{wx}{\pi}\cos\mathrm{am}\frac{wx}{\pi}\Delta\mathrm{am}\frac{wx}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\frac{wy}{\pi}}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\frac{wx}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\frac{wy}{\pi}},$$

Setzt man nun

$$(54.)\quad \frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)} = \zeta(x),$$

so hat man:

$$(55.)\quad \log\left\{\frac{\vartheta(x)}{\vartheta(0)}\right\} = \int_0^x \zeta(\alpha)\partial\alpha \quad;\quad \zeta(-x) = -\zeta(x) \quad;\quad \zeta(0) = 0,$$

mithin ist:

$$\log\left\{\frac{\vartheta(x+y)}{\vartheta(0)}\right\} = \int_0^{x+y}\zeta(\alpha)\partial\alpha;\quad \log\left\{\frac{\vartheta(x-y)}{\vartheta(0)}\right\} = \int_0^{x-y}\zeta(\alpha)\partial\alpha;$$

$$\log\left\{\frac{\vartheta^2(x)}{\vartheta^2(0)}\right\} = 2.\int_0^x\zeta(\alpha)\partial\alpha;\ \log\left\{\frac{\vartheta^2(y)}{\vartheta^2(0)}\right\} = 2.\int_0^y\zeta(\alpha)\partial\alpha,$$

folglich:

$$\log\left\{\frac{\vartheta(x+y)\vartheta(x-y)}{\vartheta^2(x)\vartheta^2(y)}\right\} = \log\vartheta^2(0) + \int_0^{x+y}\zeta(\alpha)\partial\alpha + \int_0^{x-y}\zeta(\alpha)\partial\alpha$$

$$-2.\int_0^x\zeta(\alpha)\partial\alpha - 2.\int_0^y\zeta(\alpha)\partial\alpha$$

oder, wegen (38):

$$\int_0^{x+y}\zeta(\alpha)\partial\alpha + \int_0^{x-y}\zeta(\alpha)\partial\alpha - 2.\int_0^x\zeta(\alpha)\partial\alpha - 2.\int_0^y\zeta(\alpha)\partial\alpha$$

$$= \log\left(1-k^2\sin^2\mathrm{am}\frac{wx}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\frac{wy}{\pi}\right).$$

Wenn man Dies nach x differentiirt, so erhält man rechts

$$-k^2.\frac{w}{\pi}.\frac{2\sin\mathrm{am}\frac{wx}{\pi}\cos\mathrm{am}\frac{wx}{\pi}\Delta\mathrm{am}\frac{wx}{\pi}.\sin^2\mathrm{am}\frac{wy}{\pi}}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\frac{wx}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\frac{wy}{\pi}}$$

und wegen (53),

$$\zeta(x+y)+\zeta(x-y)-2\zeta(x)$$
$$=-k^2\frac{w^2}{\pi^2}\int_0^y\left\{\sin^2\mathrm{am}\frac{w}{\pi}(x+\alpha)-\sin^2\mathrm{am}\frac{w}{\pi}(x-\alpha)\right\}\partial\alpha$$

Hieraus folgt durch Differentation nach y:

$$(a.)\quad \zeta'(x+y)-\zeta'(x-y)=-k^2\frac{w^2}{\pi^2}\left\{\sin^2\mathrm{am}\frac{w}{\pi}(x+y)-\sin^2\mathrm{am}\frac{w}{\pi}(x-y)\right\}$$

Setzt man hierin $y=x$, so ergiebt sich:

$$\zeta'(2x)=-k^2.\frac{w^2}{\pi^2}\sin^2\mathrm{am}\frac{2wx}{\pi}.$$

Est ist aber, wegen (54), $\zeta'(x)=\frac{\vartheta''(x)}{\vartheta(x)}-\frac{\vartheta'^2(x)}{\vartheta^2(x)}$, also $\zeta'(0)=\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)}$, folglich hat man, wenn man $2x=\alpha$ setzt:

$$\zeta'(\alpha)=\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)}-\frac{k^2w^2}{\pi^2}\sin^2\mathrm{am}\frac{w\alpha}{\pi}=\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)}-\frac{w^2}{\pi^2}+\frac{w^2}{\pi^2}\Delta\mathrm{am}\frac{w\alpha}{\pi}.$$

Integrirt man Dieses nach α, von 0 bis x, und bezeichnet die Constante $\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)}-\frac{w^2}{\pi^2}$ einstweilen mit $-\frac{\sigma}{\pi}$, so erhält man

$$(56.)\qquad \zeta'(x)=\frac{w^2}{\pi^2}\int_0^x\Delta^2\mathrm{am}\frac{w\alpha}{\pi}\partial\alpha-\frac{\sigma x}{\pi}.$$

Setzt man hierin $\frac{wx}{\pi}=u$, also $x=\frac{\pi u}{w}$, so hat man:

$$(57.)\qquad \zeta\left(\frac{\pi u}{w}\right)=\frac{w}{\pi}\int_0^u\Delta^2\mathrm{am}\,u\,\partial u-\frac{\sigma u}{w}.$$

Jacobi bezeichnet das Integral $\int_0^u\Delta^2\mathrm{am}\,u\,\partial u=\int_0^{\mathrm{am}\,u}\Delta\,\mathrm{am}\,u\,\partial\,\mathrm{am}\,u$ mit $\mathcal{E}(u)$, und *Legendre* mit $E(\mathrm{am}\,u)$, so dass:

$$(58.)\quad \int_0^u\Delta^2\mathrm{am}\,u\,\partial u=\int_0^\theta\Delta(\theta)\partial\theta=\mathcal{E}(u)=E(\theta)$$

ist, indem $\mathrm{am}\,u=\theta$ gesetzt worden.

Aus der Gleichung (i) folgt nun:

$$\frac{\partial\theta}{\Delta(\theta)} = \frac{i\partial\Phi}{\Delta(\Phi,k')},\ \text{also}\ \partial\theta\Delta(\theta) = \frac{i\partial\Phi\Delta^2(\theta)}{\Delta(\Phi,k')} = \frac{i\Phi\partial(1+k^2\operatorname{tang}^2\Phi)}{\Delta(\Phi,k')} = \frac{i\partial\Phi}{\Delta(\Phi,k')}\cdot\frac{1-k'^2\sin^2\Phi}{\cos^2\Phi}$$

$$= \frac{i\Delta(\Phi,k')}{\cos^2\Phi}\partial\Phi,$$

mithin durch Integration:

$$\int_0^\theta \Delta(\theta,k)\partial\theta = i\int_0^\Phi \frac{\Delta(\Phi,k')}{\cos^2(\Phi,k')}\partial\Phi,$$

also durch theilweises Integriren:

$$\int_0^\theta \Delta(\theta,k)\partial\theta = i\operatorname{tang}\Phi\Delta(\Phi,k') + i\int_0^\Phi \frac{k'^2\operatorname{tang}\Phi\sin\Phi\cos\Phi}{\sqrt{(1-k'^2\sin^2\Phi)}}\partial\Phi$$

$$= i\left\{\operatorname{tang}\Phi\Delta(\Phi,k') + \int_0^\Phi \frac{k'^2\sin^2\Phi}{\sqrt{(1-k'^2\sin^2\Phi)}}\partial\Phi\right\},$$

$$= i\,\{\operatorname{tang}\Phi\Delta(\Phi,k') + F(\Phi,k') - E(\Phi,k')\},$$

oder, nach der *Jacobi*schen Bezeichnung:

$$(59.)\quad \mathcal{E}(iu,k) = i\{\operatorname{tang}\operatorname{am}(u,k')\Delta\operatorname{am}(u,k') + u - \mathcal{E}(u,k')\}.$$

Wenn man nun k in k' verwandelt, so geht ϖ in ϖ' über. Während daher

$$\zeta(\alpha,k) = \frac{\varpi}{\pi}\mathcal{E}(u) - \frac{\sigma u}{u},\ \text{oder}\ \mathcal{E}(\alpha,k) = \frac{\pi}{\varpi}\zeta\left(\frac{\pi\alpha}{\varpi},\ k\right) + \frac{\sigma\alpha}{\varpi}\ \text{ist, wird:}$$

$$\mathcal{E}(\alpha,k') = \frac{\pi}{\varpi'}\zeta\left(\frac{\pi\alpha}{\varpi'},\ k'\right) + \frac{\sigma'\alpha}{\varpi'};$$

wo σ' den Werth bezeichnet, welchen σ annimmt, wenn ϖ in ϖ' übergeht. Man hat demnach:

$$\mathcal{E}(i\alpha,k) = \frac{\pi}{\varpi}\cdot\zeta\left(\frac{i\pi\alpha}{\varpi},k\right) + \frac{\sigma i\alpha}{\varpi};\quad \mathcal{E}(\alpha,k') = \frac{\pi}{\varpi'}\zeta\left(\frac{\pi\alpha}{\varpi'},k'\right) + \frac{\sigma'\alpha}{\varpi'},$$

mithin wegen (59):

$$\frac{\pi}{\varpi}\zeta\left(\frac{i\pi\alpha}{\varpi},\ k\right) = i\left\{\operatorname{tang}\operatorname{am}(u,k')\Delta\operatorname{am}(u,k') + \left[1 - \frac{\sigma}{\varpi} - \frac{\sigma'}{\varpi'}\right]\alpha + \frac{\pi}{\varpi'}\zeta\left(\frac{\pi\alpha}{\varpi'},\ k'\right)\right\},$$

und wenn man Dieses nach α von 0 bis u integrirt:

$$\frac{\pi}{\varpi}\int_0^u \zeta\left(\frac{i\pi\alpha}{\varpi},\ k\right)\partial(i\alpha) = \log.\cos\operatorname{am}(u,\ k')$$

$$-\left[1-\frac{\sigma}{\varpi}-\frac{\sigma'}{\varpi'}\right]\cdot\tfrac{1}{2}u^2 + \frac{\pi}{\varpi'}\int_0^u \zeta\left(\frac{\pi\alpha}{\varpi'},\ k'\right)\partial\alpha.$$

Das erste Integral geht, wenn man $i\alpha$ statt α setzt, in $\frac{\pi}{w}\int_0^{iu}\zeta\left(\frac{\pi\alpha}{w},k\right)\partial\alpha$ über; setzt man also $\frac{wx}{\pi}$ statt u und $\frac{w\alpha}{\pi}$ statt α, so ist dieses Integral

$$=\frac{\pi}{w}\int_0^{\frac{iwx}{\pi}}\zeta(\alpha)\partial\left(\frac{w\alpha}{\pi}\right)=\int_0^{ix}\zeta(\alpha)\partial\alpha,$$

und Dies ist, wegen (55), gleich $\log\left\{\frac{\vartheta(ix,k)}{\vartheta(o,k)}\right\}$. Das letzte Integral wird, wenn man darin $\frac{w'\alpha}{\pi}$ statt α schreibt, gleich

$$\frac{\pi}{w'}\int_0^{\frac{wx}{\pi}}\zeta(\alpha,k')\partial\left(\frac{w'\alpha}{\pi}\right)=\int_0^{\frac{wx}{w'}}\zeta(\alpha,k')\partial\alpha=\log\left\{\frac{\vartheta\left(\frac{wx}{w'},k'\right)}{\vartheta(o,k')}\right\};$$

also hat man

$$\log\left\{\frac{\vartheta(ix,k)}{\vartheta(o,k)}\right\}$$

$$=\log.\cos\operatorname{am}\left(\frac{wx}{\pi},k'\right)-\left[1-\frac{\sigma}{w}-\frac{\sigma'}{w'}\right]\frac{w^2x^2}{2\pi^2}+\log\left\{\frac{\vartheta\left(\frac{wx}{w'},k'\right)}{\vartheta(o,k')}\right\},$$

und mithin:

$$\vartheta(ix,k)$$

$$=\frac{\vartheta(o,k)}{\vartheta(o,k')}e^{\left(\frac{\sigma}{w}+\frac{\sigma'}{w'}-1\right)\frac{w^2x^2}{2\pi^2}}\cdot\cos\operatorname{am}\left(\frac{wx}{\pi},k'\right)\cdot\vartheta\left(\frac{wx}{w'},k'\right).$$

Nun folgt aus (XI), wenn man ω in ω' verwandelt:

$$\cos\operatorname{am}\left(\frac{w'x}{\pi},k'\right)=\sqrt{\frac{k}{k'}}\cdot\frac{\eta(x+\frac{1}{2}\pi,k')}{\vartheta(x,k')},$$

und wenn man hierin $\frac{wx}{w'}$ statt x schreibt:

$$\cos\operatorname{am}\left(\frac{wx}{\pi},k'\right)=\sqrt{\frac{k}{k'}}\cdot\frac{\eta\left(\frac{wx}{w'}+\frac{1}{2}\pi,k'\right)}{\vartheta\left(\frac{wx}{w'},k'\right)}.$$

Ausserdem ist $\vartheta(o,k)=\sqrt{\left(\frac{k'w}{\pi}\right)}$; $\vartheta(o,k')=\sqrt{\left(\frac{k'w}{\pi}\right)}$; also hat man, wenn man, als Merkmal für die Beziehung auf den Modul k', den Quotienten ε in ε' und τ in τ' verwandelt:

$$(60.)\qquad \vartheta(ix,\tau)=e^{\left(\frac{\sigma}{w}+\frac{\sigma'}{w'}-1\right)\frac{w^2x^2}{2\pi^2}}.\sqrt{\frac{w}{w'}}\eta\left(\frac{wx}{w'}+\frac{1}{2}\pi,\tau'\right).$$

Aus (58) folgt nun $k^2\int_0^{\alpha}\sin^2\mathrm{am}\,u\,\partial u = \alpha - \mathcal{E}(\alpha)$, und für irgend eine andere obere Grenze β wird $k^2\int_0^{\beta}\sin^2\mathrm{am}\,u\,\partial u = \beta - \mathcal{E}(\beta)$; mithin hat man, subtrahendo:

$$k^2.\int_{\alpha}^{\beta}\sin^2\mathrm{am}\,u\,\partial u = \beta - \alpha - \mathcal{E}(\beta) + \mathcal{E}(\alpha).$$

Hieraus folgt, wenn man $u+v$ statt u als Veränderliche einführt, wo v eine Constante bezeichnet:

$$k^2.\int_{\alpha-v}^{\beta-v}\sin^2\mathrm{am}\,(u+v)\,\partial u = \beta - \alpha + \mathcal{E}(\alpha) - \mathcal{E}(\beta),$$

also, wenn man $\alpha = v$, $\beta = w + v$ setzt:

$$\text{(a.)}\quad k^2.\int_{0}^{w}\sin^2\mathrm{am}(u+v)\,\partial u = w + \mathcal{E}(v) - \mathcal{E}(w+v).$$

Aus $\mathcal{E}(v) = \int_0^{v}\Delta^2\mathrm{am}\,u\,\partial u$ folgt $\mathcal{E}(-v) = \int_0^{-v}\Delta^2\mathrm{am}\,u\,\partial u = -\int_0^{v}\Delta\,\mathrm{am}^2 u\,\partial u$,
oder $\mathcal{E}(-v) = -\mathcal{E}(v)$. Verwandelt man also in (a) v in $-v$, so ergiebt sich

$$\text{(b).}\quad k^2.\int_0^{w}\sin^2\mathrm{am}\,(u-v)\,\partial u = w - \mathcal{E}(v) - \mathcal{E}(w-v).$$

Wenn man (b) von (a) subtrahirt, so erhält man, wegen (53):

$$\text{(c.)}\quad 2\mathcal{E}(v) + \mathcal{E}(w-v) - \mathcal{E}(w+v) = 2k^2\frac{\sin\mathrm{am}\,v\cos\mathrm{am}\,v\,\Delta\mathrm{am}\,v\,.\sin^2\mathrm{am}\,w}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,v\sin^2\mathrm{am}\,w},$$

und wenn man hierin v mit w vertauscht, wodurch $\mathcal{E}(v-w) = -\mathcal{E}(w-v)$ wird:

$$\text{(d.)}\quad 2\mathcal{E}(w) - \mathcal{E}(w-v) - \mathcal{E}(w+v) = 2k^2\frac{\sin\mathrm{am}\,w\cos\mathrm{am}\,w\,\Delta\mathrm{am}\,w\,.\sin^2\mathrm{am}\,v}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,v\sin^2\mathrm{am}\,w}$$

Addirt man (c) zu (d), so ergiebt sich links $2[\mathcal{E}(v)+\mathcal{E}(w)-\mathcal{E}(w+v)]$,

und rechts $\quad 2k\sin\mathrm{am}\,v\sin\mathrm{am}\,w\cdot\dfrac{\sin\mathrm{am}\,w\cos\mathrm{am}\,v\,\Delta\mathrm{am}\,v + \sin\mathrm{am}\,v\cos\mathrm{am}\,w\,\Delta\mathrm{am}\,w}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,v\sin^2\mathrm{am}\,w}$,

welches, wegen (37), gleich $2k^2\sin\mathrm{am}\,w\sin\mathrm{am}\,v\sin\mathrm{am}(w+v)$ ist. Man hat also, wenn man noch u statt w schreibt:

$$\text{(61.)}\quad \mathcal{E}(u) + \mathcal{E}(v) - \mathcal{E}(u+v) = k^2\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}\,v\sin\mathrm{am}\,(u+v).$$

Setzt man hierin $v = w$, so verschwindet die Seite rechts, und man erhält:

$$\mathcal{E}(u+w) = \mathcal{E}(u) + \mathcal{E}(w).$$

Es bezeichne nun $\frac{\mathcal{E}}{2}$ das Integral $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\Delta(\theta)\partial\theta = E\left(\mathrm{am}\frac{w}{2}\right) = \mathcal{E}\left(\frac{w}{2}\right)$. Dann ist:

$$\mathcal{E}(\varpi)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\Delta(\theta)\partial\theta+\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}\Delta(\theta)\partial\theta=\frac{\mathcal{E}}{2}+\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}\sqrt{(1-k^2.\sin^2\theta.\partial\theta)}.$$

Setzt man aber $\theta=\Phi+\pi$, so ergiebt sich

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}\sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)}\,\partial\theta=\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0}\Delta(\theta)\partial\theta=-\int_{\frac{1}{2}\pi}^{0}\Delta(\theta)\partial\theta=+\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\Delta(\theta)\partial\theta=\frac{\mathcal{E}}{2};$$

mithin hat man $\mathcal{E}(\varpi)=\mathcal{E}$ und

$$(62.)\qquad \mathcal{E}(u+\varpi)=\mathcal{E}(u)+\mathcal{E}.$$

Aus (57) folgt nun, wenn man $u=\varpi$ setzt, $\frac{\pi}{w}\zeta(\pi)=\mathcal{E}(\varpi)-\sigma=\mathcal{E}-\sigma$; aber wegen (54) ist $\zeta(\pi)=0$, folglich hat man $\sigma=\mathcal{E}$. Wir wollen die Bezeichnung σ beibehalten, und es wurde bewiesen, dass die in (60) vorkommende Constante σ gleich dem bestimmten Integral $E\left(\frac{1}{2}\pi,k\right)$ ist.

Zur Bestimmung der Constanten $\frac{\sigma}{w}+\frac{\sigma'}{w'}-1$ hat *Abel* folgendes Verfahren angegeben. Man setze:

$$(a.)\qquad f(x)=\sqrt{x}.\sqrt{(1+x)}.(a+x)^{-\frac{3}{2}};$$

so wird:

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\sqrt{(1+x)}(a+x)^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{x}(1+x)^{-\frac{1}{2}}(a+x)^{-\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}\sqrt{x}\sqrt{(1+x)}(a+x)^{-\frac{5}{2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}.\sqrt{(1+x)}(a+x)^{\frac{5}{2}}}\left\{\frac{1}{2}(1+x)(a+x)+\frac{1}{2}x(a+x)-\frac{3}{2}x(1+x)\right\}.$$

Der Ausdruck in der Klammer ist:

$$\frac{1}{2}(a+x+ax+x^2+ax+x^2)-\frac{3}{2}(x+x^2)$$
$$=\frac{1}{2}(a+x)^2+\frac{1}{2}(a-a^2+x+x^2)-\frac{3}{2}(x+x^2)$$
$$=\frac{1}{2}(a+x)^2+\frac{1}{2}a(1-a)-x-x^2$$
$$=-\frac{1}{2}(a+x)^2+a^2+2ax+x^2+\frac{a}{2}(1-a)-x-x^2$$
$$=-\frac{1}{2}(a+x)^2+\frac{3}{2}a(1-a)-a+2a^2+2ax-x$$
$$=-\frac{1}{2}(a+x)^2+\frac{3}{2}a(1-a)-(1-2a)(a+x);$$

also erhält man:

$$(\beta.)\quad f'(x) = \frac{3}{2}\cdot\frac{a(1-a)}{\sqrt{x}\sqrt{(1+x)}\,(a+x)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1-2a}{\sqrt{x}\sqrt{(1+x)}\,(a+x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{(1+x)}\sqrt{(a+x)}}.$$

Integrirt man Dies nach x, von 0 bis ∞, so erhält man wegen, (α):

$$f(\infty) = \left\{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(a+x)}}\cdot\frac{\sqrt{(1+x)}}{a+x}\right\}_\infty = \left\{\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{a}{x}\right)}}\cdot\frac{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{\sqrt{\left(1+\frac{a}{x}\right)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(a+x)}}\right\}_\infty = 0.$$

Eben so ist $f(0) = 0$, also ist:

$$(\gamma.)\quad 0 = \frac{3}{2}\int_0^\infty \frac{a(1-a)\partial x}{\sqrt{x}\sqrt{(1+x)}(a+x)^{\frac{5}{2}}} - \int_0^\infty \frac{(1-2a)\partial x}{\sqrt{x}\sqrt{(1+x)}(a+x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{(1+x)}\sqrt{(a+x)}}.$$

Setzt man nun

$$(\delta.)\qquad \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{(1+x)}\sqrt{(a+x)}} = -\varphi_1(a),$$

so ist offenbar

$$(\varepsilon.)\quad \int_0^\infty \frac{\partial x}{\sqrt{x}\sqrt{(1+x)}(a+x)^{\frac{3}{2}}} = 2\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial a}\ ;\quad \int_0^\infty \frac{\partial x}{\sqrt{x}\sqrt{(1+x)}(a+x)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial a^2},$$

und es folgt aus (γ):

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial a^2} + \left\{\frac{1}{a} - \frac{1}{1-a}\right\}\frac{\partial\varphi_1}{\partial a} - \frac{1}{4a(1-a)}\varphi_1 = 0.$$

Es ist also φ_1 ein *particuläres* Integral der Differentialgleichung

$$(\zeta.)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial a^2} + p\frac{\partial y}{\partial a} + qy = 0\ ,\quad \text{wo } p = \frac{1}{a} - \frac{1}{1-a}\ ;\quad q = -\frac{1}{4a(1-a)}$$

ist.

Setzt man in (ε) $1-a$ statt a, so ergiebt sich, wegen $\partial(1-a) = -\partial a$:

$$\frac{\partial^2\varphi_1(1-a)}{\partial a^2} + \left\{\frac{1}{a} - \frac{1}{1-a}\right\}\cdot\frac{\partial\varphi_1(1-a)}{\partial a} - \frac{1}{4a(1-a)}\cdot\varphi_1(1-a) = 0.$$

Es ist also, wenn man $\varphi_1(1-a)$ mit $\varphi_2(a)$ bezeichnet, auch φ_2 ein *particuläres* Integral von (ζ). Aus den identischen Gleichungen

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial a^2} + p\frac{\partial\varphi}{\partial a} + q\varphi_1 = 0 \text{ und } \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial a^2} + p\frac{\partial\varphi_2}{\partial a} + q\varphi_2 = 0$$

folgt aber durch Elimination von q:

$$-p\left\{\varphi_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial a} - \varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial a}\right\} = \varphi_2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial a^2} - \varphi_1\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial a^2} = \frac{\partial}{\partial a}\left\{\varphi_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial a} - \varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial a}\right\},$$

folglich ist: $$-p = \frac{\partial}{\partial a}\log\left\{\varphi_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial a} - \varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial a}\right\},$$ also:

$$(\eta.)\quad \varphi_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial a} - \varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial a} = c\,e^{-\int p\,\partial a} = c\,e^{\int\frac{\partial a}{1-a} - \int\frac{\partial a}{a}} = \frac{c}{a(1-a)}.$$

Aus (δ, ε) folgt, wenn man ax statt x schreibt:

$$\varphi_1(a) = -\int_0^\infty \frac{\partial x}{\sqrt{x}\sqrt{(1+x)}\sqrt{(1+ax)}};$$

$$\frac{\partial\varphi_1(a)}{\partial a} = \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{\partial x}{\sqrt{x}(1+x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+a)}};$$

$$\varphi_1(1-a) = \varphi_2(a) - \int_0^\infty \frac{\partial x}{\sqrt{x}\sqrt{(1+x)}\sqrt{(1+(1-a)x)}};$$

$$\frac{\partial\varphi_2(a)}{\partial a} = \frac{\partial\varphi_1(1-a)}{\partial(1-a)} = -\frac{1}{1-a}\int_0^\infty \frac{\partial x}{\sqrt{x}(1+x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+(1-a)x)}};$$

und man erhält, wegen (η):

$$-c = (1-a)\int_0^\infty \frac{\partial x}{\sqrt{x}\sqrt{(1+x)}\sqrt{(1+(1-a)x)}}\cdot\int_0^\infty \frac{\partial x}{\sqrt{x}(1+x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+ax)}}$$
$$+ a\int_0^\infty \frac{\partial x}{\sqrt{x}\sqrt{(1+x)}\sqrt{(1+ax)}}\cdot\int_0^\infty \frac{\partial x}{\sqrt{x}(1+x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+(1-a)x)}}.$$

Zur Bestimmung von $-c$ setze man $a = 0$. Dies giebt:

$$-c = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}-1}\partial x}{1+x}\cdot\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}-1}\partial x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1-\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2}-1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} = 2\pi.$$

Setzt man also noch $a = k^2$, so ergiebt sich:

$$2\pi = k^2\int_0^\infty \frac{\partial x}{\sqrt{x}\sqrt{(1+x)}\sqrt{(1+k^2x)}}\cdot\int_0^\infty \frac{\partial x}{\sqrt{x}(1+x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+k'^2x)}}$$
$$+ k'^2\int_0^\infty \frac{\partial x}{\sqrt{x}\sqrt{(1+x)}\sqrt{(1+k'^2x)}}\cdot\int_0^\infty \frac{\partial x}{\sqrt{x}(1+x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+k^2x)}}.$$

Setzt man $x = \tan^2\theta$, so wird hieraus:

$$2\pi$$

$$= 4k^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\partial\theta}{\sqrt{(1-k'^2\sin^2\theta)}}\cdot\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^2\theta\,\partial\theta}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)}}+4k'^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\partial\theta}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)}}\cdot\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^2\theta\,\partial\theta}{\sqrt{(1-k'^2\sin^2\theta)}}$$

$$= 4k^2\frac{\varpi'}{2}\cdot\frac{\varpi}{2}-\frac{4\varpi'}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{k^2\sin^2\theta\,\partial\theta}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)}}+4k'^2\frac{\varpi}{2}\cdot\frac{\varpi'}{2}-\frac{4\varpi}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{k'^2\sin^2\theta\,\partial\theta}{\sqrt{(1-k'^2\sin^2\theta)}}$$

$$= 4k^2\frac{\varpi'}{2}\cdot\frac{\varpi}{2}-\frac{4\varpi'}{2}\cdot\frac{\varpi}{2}+\frac{4\varpi'}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\Delta(\theta,k)\,\partial\theta$$

$$+4k'^2\frac{\varpi}{2}\cdot\frac{\varpi'}{2}-\frac{4\varpi}{2}\cdot\frac{\varpi'}{2}+\frac{4\varpi}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\Delta(\theta,k)\,\partial\theta;$$

also erhält man

$$\tfrac{1}{2}\pi=(k^2+k'^2)\frac{\varpi\varpi'}{2.2}-2\frac{\varpi'\varpi}{2.2}+\frac{\varpi'.\sigma}{2.2}+\frac{\varpi.\sigma'}{2.2}=\frac{\varpi}{2}\cdot\frac{\sigma'}{2}+\frac{\varpi'}{2}\cdot\frac{\sigma}{2}-\frac{\varpi}{2}\cdot\frac{\varpi'}{2},\text{ also:}$$

$$(63.)\quad \frac{\varpi'}{2}\cdot\frac{\sigma}{2}+\frac{\sigma'}{2}\cdot\frac{\varpi}{2}-\frac{\varpi'}{2}\cdot\frac{\varpi}{2}=\tfrac{1}{2}\pi\ ;\quad\text{oder}\quad \frac{\sigma}{\varpi}+\frac{\sigma'}{\varpi'}-1=\frac{2\pi}{\varpi\varpi'}.$$

Hiernach ist der Exponent des e in (60) gleich $\frac{\varpi x^2}{\varpi'\pi}$ und man hat:

$$(64.)\quad \vartheta(ix,\tau)=\sqrt{\frac{\varpi}{\varpi'}}\cdot e^{\frac{\varpi x^2}{\varpi'\pi}}\eta\left(\frac{\varpi x}{\varpi'}+\tfrac{1}{2}\pi,\ \tau'\right).$$

Aus (51) folgt noch:

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\eta(ix,\tau)}{\vartheta(ix,\tau)}=\frac{i}{\sqrt{k'}}\cdot\sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot\frac{\eta\left(\frac{\varpi x}{\varpi'},\tau\right)}{\eta\left(\frac{\varpi x}{\varpi}+\tfrac{1}{2}\pi,\tau\right)};$$

also erhält man, wegen (64):

$$(65.)\quad \eta(ix,\tau)=i\sqrt{\frac{\varpi}{\varpi'}}\cdot e^{\frac{\varpi x^2}{\varpi'\pi}}\cdot\eta\left(\frac{\varpi x}{\varpi'},\ \tau'\right).$$

Der Gleichung (64) kann man sich nun bedienen, um in der oben berührten Formel $\tau=m\frac{\pi\varpi'}{\varpi}$ den Werth der ganzen Zahl m zu finden. Setzt man nämlich $x=2\tau$, so folgt aus (64), wegen $\tau=m\frac{\varpi'\pi}{\varpi}$:

$$\vartheta(2i\tau,\tau)=\sqrt{\frac{\varpi}{\varpi'}}\cdot e^{4m^2\cdot\frac{\pi^2\varpi'^2}{\varpi^2}\cdot\frac{\varpi}{\pi\varpi'}}\cdot\eta\left(2m\frac{\varpi}{\varpi'}\cdot\frac{\pi\varpi'}{\varpi}+\tfrac{1}{2}\pi,\tau'\right)$$

$$=\sqrt{\frac{\varpi}{\varpi'}}\cdot e^{4m^2\cdot\frac{\pi\varpi'}{\varpi}}\cdot\eta\left(2m\pi+\tfrac{1}{2}\pi,\ \tau'\right)=\sqrt{\frac{\varpi}{\varpi'}}\cdot e^{4m^2\cdot\frac{\pi\varpi'}{\varpi}}\cdot\eta(\tfrac{1}{2}\pi,\ \tau').$$

Aber wegen (34) ist $\eta\left(\frac{1}{2}\pi, \tau'\right) = \sqrt{\left(\frac{k'w'}{\pi}\right)}$, und aus (50) folgt, wenn man $x = 0$ setzt: $\vartheta(2i\tau, \tau) = \frac{1}{\varepsilon^4}\vartheta(0) = e^{+4\tau}\sqrt{\left(\frac{k'w}{\pi}\right)}$; also ergiebt sich, wenn man beide Theile durch $\eta(\frac{1}{2}\pi, \tau')$ dividirt:

$$e^{+4\tau}\sqrt{\frac{w}{w'}} = \sqrt{\frac{w}{w'}}\cdot e^{4m^2\cdot\frac{\pi w'}{w}}, \text{ oder } 1 = e^{4m^2\cdot\frac{\pi w'}{w}-4\tau} = e^{4m^2\cdot\frac{\pi w'}{w}-4m^2\frac{\pi w'}{w}};$$

folglich ist $(4m^2 - 4m)\frac{\pi w'}{w} = 0$, also $m - 1 = 0$, $m = 1$, und man findet genau:

$$\tau = \frac{\pi w'}{w}. \tag{66.}$$

Aus (43.) lassen sich leicht allgemein folgende Formeln ableiten:

$$\begin{cases} \vartheta(x+mi\tau) = (-1)^m e^{-m^2\tau-2mix}\vartheta(x); \\ \eta(x+mi\tau) = (-1)^m e^{-m^2\tau-2mix}\eta(x), \end{cases} \tag{67.}$$

und aus den Eigenschaften von ϑ, η folgt, dass, wenn man

$$m\omega + m'i\omega' = \tilde{\omega}(m, m') \tag{68.}$$

setzt und mit f eine der drei Functionen sin am, cos am, Δam bezeichnet:

$$f\{u + 2\tilde{\omega}(m, m')\} = f(u) \tag{69.}$$

sein muss.

Diese letzte Formel enthält das Princip der *doppelten Periodicität* der elliptischen Functionen *erster* Gattung.

Auch die Theorie der Transformationen, so wie die Entwicklung der elliptischen Functionen in Reihen und Producte, lassen sich, wie schon aus mehreren Abhandlungen von *Jacobi* zu ersehen ist, mit Hülfe der Reihen (ϑ, η) behandeln.

Die Transformation zweiter Ordnung ist unmittelbar in den obigen Formeln enthalten. Setzt man nämlich:

$$\frac{\gamma(\frac{1}{2}\pi)}{\theta(\frac{1}{2}\pi)} = \sqrt{\lambda}; \quad \frac{\theta(0)}{\theta(\frac{1}{2}\pi)} = \sqrt{\lambda'}, \tag{70.}$$

so folgt aus (28), wenn man darin τ in $\frac{1}{2}\tau$ verwandelt und darauf $x = 0$ setzt:

$$\lambda^2 + \lambda'^2 = 1.$$

Ferner sei

$$\tfrac{1}{2}\varrho = \int_0^1 \frac{\partial v}{\sqrt{(1-v^2)}\sqrt{(1-\lambda^2 v^2)}}; \quad \tfrac{1}{2}\varrho' = \int_0^1 \frac{\partial v}{\sqrt{(1-v^2)}\sqrt{(1-\lambda'^2 v^2)}}, \tag{71.}$$

so sind ϱ, ϱ', λ, λ' resp. die Werthe, welche die Grössen ϖ, ϖ', k, k' annehmen, wenn man τ in $\frac{1}{2}\tau$ verwandelt. Die Gleichung, durch welche die Grössen ϱ, λ in ϖ, k ausgedrückt werden, die sogenannten *Modular-Gleichungen*, sind schon in den Formeln (21) enthalten. Daraus folgt nämlich:

$$\lambda' = \frac{\theta^2(0)}{\theta^2(\frac{1}{2}\pi)} = \frac{\vartheta^2(\frac{1}{2}\pi) - \eta^2(\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta^2(\frac{1}{2}\pi) + \eta^2(\frac{1}{2}\pi)} = \frac{1 - \frac{\eta^2(\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta^2(\frac{1}{2}\pi)}}{1 + \frac{\eta^2(\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta^2(\frac{1}{2}\pi)}} = \frac{1-k}{1+k}.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$1 - \lambda'^2 = 1 - \frac{1 - 2k + k^2}{1 + 2k + k^2} = \frac{4k}{(1+k)^2};\text{ man erhält also:}$$

$$(72.)\qquad \lambda = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\ ;\ \lambda' = \frac{1-k}{1+k}.$$

Aus der letzten der Gleichungen (21) folgt noch, wenn man beide Seiten durch $\vartheta^2(\frac{1}{2}\pi)$ dividirt:

$$\frac{\theta^2(\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta^2(\frac{1}{2}\pi)} = 1 + \frac{\eta^2(\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta^2(\frac{1}{2}\pi)} = 1 + k.$$

Aber aus (VIII) folgt, wegen (23):

$$\psi'(x) = \frac{1}{k'}\cdot\frac{\gamma'(0)}{\gamma(\frac{1}{2}\pi)}\varphi(x)f(x) = \vartheta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\varphi(x)f(x);$$

mithin hat man, wenn man τ in $\frac{1}{2}\tau$ verwandelt und mit v den Werth bezeichnet, den alsdann $\psi(x) = v$ annimmt:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \theta^2(\tfrac{1}{2}\pi)\sqrt{(1-v^2)}.\sqrt{(1-\lambda^2 v^2)},\ \text{ folglich}$$

$$(a.)\qquad x = \frac{1}{\theta^2(\frac{1}{2}\pi)}\cdot\int_0^{\psi(x,\frac{1}{2}\tau)} \frac{\partial v}{\sqrt{(1-v^2)}\sqrt{(1-\lambda^2 v^2)}}$$

Setzt man hierin $x = \frac{1}{2}\pi$, so wird die obere Grenze $\psi(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\tau) = 1$ und man hat, wegen (71): $\frac{1}{2}\pi = \frac{\varrho}{2\theta^2(\frac{1}{2}\pi)}$, also

$$(73.)\qquad \theta(\tfrac{1}{2}\pi) = \sqrt{\frac{\varrho}{\pi}},$$

mithin ist

$$\frac{\varrho}{\pi}\cdot\frac{1}{\vartheta^2(\frac{1}{2}\pi)} = \frac{\varrho}{\varpi} = 1 + k\quad,\quad \text{also } \varrho = (1+k)\varpi.$$

Nun ist $\tau = \frac{\pi\varpi'}{\varpi}$. Verwandelt man hierin τ in $\frac{1}{2}\tau$, so gehen ϖ', ϖ resp. in ϱ', ϱ über und man erhält $\frac{1}{2}\tau = \frac{\pi\varrho'}{\varrho}$, also ist:

$$\frac{w'}{w} = \frac{2\varrho'}{\varrho}, \quad \text{oder } \frac{w'}{w} = \frac{2\varrho_{\prime}}{(1+k)w}, \quad \text{d. h.:}$$

$$(74.) \qquad \varrho = (1+k)w \quad ; \quad \varrho' = \tfrac{1}{2}(1+k)w'.$$

Aus (IX:ψ) folgt, wenn man τ in $\frac{1}{2}\tau$ verwandelt und die Gleichung (74) berücksichtigt:

$$\frac{\varrho x}{\pi} = \int_0^{x} \frac{\psi'(x,\frac{1}{2}\tau)\partial x}{\varphi(x,\frac{1}{2}\tau)f(x,\frac{1}{2}\tau)} = (1+k)\frac{wx}{\pi}$$

$$= (1+k)\int_0^{x} \frac{\psi'(x,\tau)\partial x}{\varphi(x,\tau)f(x,\tau)},$$

oder, wenn man $\psi(x, \frac{1}{2}\tau) = w$, $\psi(x, \tau) = v$ setzt:

$$(75.) \quad \int_0^{w} \frac{\partial w}{\sqrt{(1-w^2)}\sqrt{(1-\lambda^2 w^2)}} = (1+k)\int_0^{v} \frac{\partial v}{\sqrt{(1-v^2)}\sqrt{(1-k^2 v^2)}}.$$

Hier ist $w = \sin\text{am}\left(\frac{\varrho x}{\pi}, \lambda\right)$, $v = \sin\text{am}\left(\frac{wx}{\pi}, k\right)$, d. h.

$$v = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\eta(x)}{\vartheta(x)} \; ; \quad w = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\gamma(x)}{\theta(x)} = \sqrt{\left(\frac{1+k}{\sqrt{k}}\right)}\cdot\frac{\gamma(x)}{\theta(x)}.$$

Wegen (27) ist aber $\gamma(x) = \frac{2}{\gamma(\frac{1}{4}\pi)}\eta(x)\vartheta(x)$, und wegen (13) hat man für $\gamma = 0$ die Gleichung $\theta(x) = \frac{1}{\theta(\frac{1}{4}\pi)}\{\vartheta^2(x) + \eta^2(x)\}$, mithin ist:

$$w = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{\theta(\frac{1}{4}\pi)}{\gamma(\frac{1}{4}\pi)}\cdot\frac{\eta(x)\vartheta(x)}{\vartheta^2(x)+\eta^2(x)} = \frac{\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{\eta(x)}{\vartheta(x)}}{1+\frac{\eta^2(x)}{\vartheta^2(x)}}$$

$$= \frac{1+k}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\sqrt{k}\sin\text{am}\frac{wx}{\pi}}{1+\sin^2\text{am}\frac{wx}{\pi}},$$

oder:

$$(76.) \qquad w = \frac{(1+k)\cdot v}{1+kv^2}.$$

Diese Formel enthält die *Transformation zweiter Ordnung.*

Die Transformation $p$ter Ordnung wird folgende Form haben:

$$(a.) \qquad V = \left\{\frac{a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + \dots + a_p v_p}{1 + b_1 v + b_2 v^2 + \dots + b_{p-1}v^{p-1}}\right\}^{\pm 1}.$$

Gelangt man durch dieselbe zu der Gleichung

$$(\text{b.})\quad \int_0^V \frac{\partial V}{\sqrt{(1-V^2)}\sqrt{(1-\lambda^2 V^2)}} = c\,.\int_0^v \frac{\partial v}{\sqrt{(1-v^2)}\sqrt{(1-k^2v^2)}},$$

und ausserdem durch die Transformation p'ter Ordnung:

$$(\text{A.})\quad W = \left\{\frac{A_0 + A_1 V + A_2 V^2 + \ldots\ldots + A_{p'} V^{p'}}{1 + B_1 V + B_2 V^2 + \ldots\ldots + B_{p'-1} V^{p'-1}}\right\}^{\pm 1}$$

zu der Gleichung

$$(\text{B.})\quad \int_0^W \frac{\partial W}{\sqrt{(1-W^2)}\sqrt{(1-\Lambda^2 W^2)}} = c.\int_0^V \frac{\partial V}{\sqrt{(1-V^2)}\sqrt{(1-\lambda^2V^2)}},$$

so folgt aus (b), (B):

$$\int_0^W \frac{\partial W}{\sqrt{(1-W^2)}\sqrt{(1-\Lambda^2 W^2)}} = cC.\int_0^v \frac{\partial v}{\sqrt{(1-v^2)}\sqrt{(1-k^2v^2)}},$$

und man gelangt zu dieser Gleichung durch die Substitution:

$$W = \left\{\frac{A_0 + A_1\left\{\frac{a_0+a_1v+\ldots\ldots+a\ v^p}{1+b_1v+\ldots\ldots+b_{p-1}v^{p-1}}\right\}^{\pm1} + \ldots\ldots + A_{p'}.\left\{\frac{a_0+a_1v+\ldots\ldots+a_pv^p}{1+b_1v+\ldots\ldots+b_{p-1}v^{p-1}}\right\}^{\pm p'}}{1 + B_1\left\{\frac{a_0+a_1v+\ldots\ldots+a_pv^p}{1+b_1v+\ldots\ldots+b_{p-1}v^{p-1}}\right\}^{\pm1} + \ldots\ldots + A_{p'-1}.\left\{\frac{a_0+a_1v_1+\ldots\ldots+a_pv^p}{1+b_1v+\ldots\ldots+b_{p-1}v^{p-1}}\right\}^{\pm p'-1}}\right\}^{\pm1};$$

welches offenbar eine Substitution $p.p'$ter Ordnung ist. Hieraus folgt, dass sich jede Transformation von einer *graden* Ordnung aus einer Transformation *zweiter* und einer Transformation *ungrader* Ordnung zusammensetzen lässt, und jede Transformation $n$ter Ordnung, wo n eine *ungrade* Zahl von der Form $p^m.p'^{m'}.p''^{m''}$ ist und $p, p', p''\ldots\ldots$ *Primzahlen* sind, aus Transformationen, deren Ordnungen *Primzahlen* sind. Von den Transformationen *grader* Ordnung ist also die einzige, welche man zu betrachten braucht, die durch die Gleichung (76) definirte, und von denen *ungrader* Ordnung hat man nur auf diejenigen Rücksicht zu nehmen, deren Ordnungen durch *Primzahlen* bestimmt werden. Die Transformation $p$ter Ordnung, wo p eine *ungrade* Primzahl ist, lässt sich ebenfalls aus den Eigenschaften der Functionen ϑ, η herleiten, und es wird zu diesem Zwecke nöthig sein, die genannten Functionen in unendliche Producte zu verwandeln. Wir wollen statt dessen:

$$(77.)\quad f(x) = \prod_0^\infty (1 - \varepsilon^{2\nu+1}e^{2ix}).\prod_0^\infty(1 - \varepsilon^{2\nu+1}e^{-2ix})$$
$$= \prod_0^\infty [1 - 2\varepsilon^{2\nu+1}\cos 2x + \varepsilon^{2(2\nu+1)}]$$

setzen und a posteriori nachweisen, dass die aus der Entwickelung dieses Products entstehende Reihe die Form $C.\vartheta(x)$ hat, wo C eine noch zu bestimmende Constante bezeichnet.

Aus (77) folgt, wenn man x um $i\tau$ vergrössert, wegen:

$$\varepsilon^{2\nu+1} e^{2ix-2\tau} = \varepsilon^{2\nu+3} e^{2ix} \quad ; \quad \varepsilon^{2\nu+1} e^{-2ix+2\tau} = \varepsilon^{2\nu-1} e^{-2ix},$$

dass jeder Factor des ersten Products in den nächst folgenden und jeder Factor des zweiten Products in den nächst vorhergehenden übergeht. Die beiden ersten Factoren werden zu $1-\varepsilon^3 e^{2ix}$ und $1-\frac{1}{\varepsilon}e^{-2ix}$. Man erhält also die neue Form der beiden Producte, wenn man im ersten den Factor $1-\varepsilon e^{2ix}$ weglässt, im zweiten den Factor $1-\frac{1}{\varepsilon}e^{-2ix}$ hinzufügt, d. h. es ist:

$$f(x+i\tau)$$
$$= \frac{1-\frac{1}{\varepsilon}e^{-2ix}}{1-\varepsilon e^{2ix}} f(x) = \frac{e^{-2ix}}{\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon e^{+2ix}-1}{1-\varepsilon e^{2ix}} f(x) = -\frac{e^{-2ix}}{\varepsilon} f(x),$$

also ergiebt sich:

$$(78) \qquad f(x) = -\varepsilon e^{2ix} f(x+i\tau).$$

Aus (77) folgt noch $f(-x) = f(x)$; denn wenn man x in $-x$ verwandelt, erfolgt weiter keine Aenderung, als dass die beiden Factoren mit einander vertauscht werden; ausserdem hat $f(x)$ offenbar eine reelle Periode in Bezug auf den Modul 2π; man kann also setzen:

$$f(x) = a_0 - 2a_1\cos 2x + 2a_2\cos 4x - 2a_3\cos 6x + \dots\dots,$$

oder:

$$\text{(a.)} \qquad f(x) = a_0 - a_1 e^{2ix} + a_2 e^{4ix} - a_3 e^{6ix} + \dots\dots$$
$$- a_1 e^{-2ix} + a_2 e^{-4ix} - a_3 e^{-6ix} + \dots\dots;$$

Setzt man hierin $x+i\tau$ statt x, so erhält man, wegen (78):

$$\text{(b.)} \quad f(x) = -\varepsilon e^{2ix}\{a_0 - a_1\varepsilon^2 e^{2ix} + a_2\varepsilon^4 e^{4ix} - a_3\varepsilon^6 e^{6ix} + \dots\dots$$
$$-\frac{a_1}{\varepsilon^2}e^{-2ix} + \frac{a_2}{\varepsilon^4}e^{-4ix} - \frac{a_3}{\varepsilon^6}e^{-6ix} + \dots\dots\}$$

$$= \frac{a_1}{\varepsilon} - a_0\varepsilon e^{2ix} + a_1\varepsilon^3 e^{4ix} - a_2\varepsilon^5 e^{6ix} + a_3\varepsilon^7 e^{8ix} - \dots\dots$$
$$-\frac{a_2}{\varepsilon^3}e^{-2ix} + \frac{a_3}{\varepsilon^5}e^{-4ix} - \frac{a_4}{\varepsilon^7}e^{-6ix} + \frac{a_5}{\varepsilon^9}e^{-8ix} - \dots\dots$$

Aus (a und b) folgt:

$a_1 = a_0\varepsilon$; $a_2 = a_1\varepsilon^3$; $a_3 = a_2\varepsilon^5$; ..... also:
$a_1 = a_0\varepsilon$; $a_2 = a_0\varepsilon^4$; $a_3 = a_0\varepsilon^9$; ....., und man hat demnach:

$$(79.)\quad f(x) = a_0\{1 - 2\varepsilon\cos 2x + 2\varepsilon^4\cos 4x - 2\varepsilon^9\cos 6x + \dots\} = a_0\vartheta(x).$$

Vergrössert man hierin x um $\frac{1}{2}i\tau$, so folgt aus (77 und 79):

$$\frac{a_0 i}{\sqrt[4]{\varepsilon}}e^{-ix}\eta(x) = \prod_0^\infty[1-\varepsilon^{2(r+1)}e^{2ix}]\prod_0^\infty[1-\varepsilon^{2r}e^{-2ix}]$$
$$= \frac{1}{1-\varepsilon^0 e^{2ix}}\cdot\prod_0^\infty[1-\varepsilon^{2r}e^{2ix}][1-\varepsilon^{2r}e^{-2ix}],$$

oder, da $1-\varepsilon^0 e^{2ix} = 1-\cos 2x - i\sin 2x = 2.\sin^2 x - 2i\sin x\cos x$
$= 2\sin x(\sin x - i\cos x) = \frac{2}{i}e^{-ix}.\sin x$ ist:

$$(80.)\quad \vartheta(x) = \frac{1}{a_0}.\prod_0^\infty\{1-2\varepsilon^{2r+1}\cos 2x + \varepsilon^{2(2r+1)}\};$$
$$(81.)\quad \eta(x) = \frac{2\cdot\sqrt[4]{\varepsilon}}{a_0}\sin x.\prod_0^\infty\{1-2\varepsilon^{2r}\cos 2x + \varepsilon^{4r}\}.$$

Setzt man in der zweiten dieser Formeln $x = \frac{1}{2}\pi$, so ergiebt sich:

$$(a.)\quad \frac{\eta(\frac{1}{2}\pi)}{2\sqrt[4]{\varepsilon}} = \frac{1}{a_0}\cdot\prod_0^\infty(1+\varepsilon^{2r})^2.$$

Setzt man ferner in (80) erst $x = 0$, dann $x = \frac{1}{2}\pi$, so erhält man:

$$(b.)\quad \vartheta(0) = \frac{1}{a_0}\prod_0^\infty(1-\varepsilon^{2r+1})^2;$$
$$(c.)\quad \vartheta(\tfrac{1}{2}\pi) = \frac{1}{a_0}\prod_0^\infty(1+\varepsilon^{2r+1})^2,$$

und es findet sich, wenn man (a und b) durch (c) dividirt, wegen (34):

$$(82.)\quad \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{k}{\sqrt{\varepsilon}}\right)} = \prod_0^\infty\left(\frac{1+\varepsilon^{2r}}{1+\varepsilon^{2r+1}}\right)^2;$$
$$\sqrt{k'} = \prod_0^\infty\left(\frac{1-\varepsilon^{2r+1}}{1+\varepsilon^{2r+1}}\right)^2.$$

Dividirt man ferner (b) durch (a) und erwägt, dass $\frac{\vartheta(0)}{\eta(\frac{1}{2}\pi)} = \sqrt{\left(\frac{k'}{k}\right)}$ ist, so erhält man:

$$(83.)\quad 2\sqrt[4]{\varepsilon}.\sqrt{\left(\frac{k'}{k}\right)} = \prod_0^\infty\left(\frac{1-\varepsilon^{2r+1}}{1+\varepsilon^{2r}}\right),$$

und wenn man Dies mit der zweiten der Gleichungen (82) multiplicirt:

$$2k'\frac{\sqrt[4]{\varepsilon}}{\sqrt{k}} = \frac{\{(1-\varepsilon)(1+\varepsilon^3(1-\varepsilon^5)\ldots\ldots\}^2}{\{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^3)^4(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^5)\ldots\ldots\}^2},$$

wo im Zähler alle *ungraden*, im Nenner alle *ganzen* Zahlen als Exponenten des ε vorkommen. Nun ist aber:

$$(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^3)\ldots\ldots = \frac{(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^4)(1-\varepsilon^6)\ldots\ldots}{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^3)\ldots\ldots},$$

und hierin lassen sich, da im Zähler alle *graden* Potenzen, im Nenner alle *ganzen*, also alle graden und ungraden Potenzen, vorkommen, die Factoren des Nenners, welche *grade* Potenzen des ε enthalten, gegen sämmtliche Factoren des Zählers aufheben. Man erhält demnach:

$$[(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^3)\ldots\ldots]^2 = \frac{1}{[(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^3)(1-\varepsilon^5)\ldots.]^2},$$

und die obige Gleichung reducirt sich auf

$$(84.)\qquad 2k'.\frac{\sqrt[4]{\varepsilon}}{\sqrt{k}} = \prod_0^\infty (1-\varepsilon^{2\nu+1})^6.$$

Wenn man (83) in den Cubus erhebt, so erhält man

$$8.\sqrt[4]{\varepsilon^3}\sqrt{\left(\frac{k'^3}{k^3}\right)} = \prod_0^\infty\left(\frac{1-\varepsilon^{2\nu+1}}{1+\varepsilon^{2\nu}}\right)^6,$$

und wenn man hierdurch (84) dividirt:

$$(85.)\qquad \frac{k}{4\sqrt{(\varepsilon k')}} = \prod_0^\infty (1+\varepsilon^{2\nu})^6.$$

Hieraus folgt: $\prod_0^\infty (1+\varepsilon^{2\nu})^2 = \dfrac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{4}\sqrt[6]{(\varepsilon k')}}$, mithin, wegen (a):

$$a_0 = \frac{2\sqrt[4]{\varepsilon}}{\sqrt{(\frac{1}{2}\pi)}}\cdot\frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{4}\sqrt[6]{(\varepsilon k')}} = \sqrt[3]{\left(\frac{8}{4}\right)}\cdot\frac{\varepsilon^{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}.\sqrt[3]{k}}{\sqrt{(\frac{kw}{\pi})}\cdot\sqrt[6]{k'}} = \frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{\pi}\cdot\varepsilon^{\frac{1}{12}}}{\sqrt{w}\sqrt[6]{(kk')}},\ \text{oder:}$$

$$a_0 = \sqrt{\left(\frac{\pi}{w}\right)}\cdot\sqrt[6]{\left(\frac{4\sqrt{\varepsilon}}{kk'}\right)}.$$

Demnach folgt aus (80 und 81):

$$\text{XVI.}\qquad \vartheta(x) = \sqrt{\left(\frac{w}{\pi}\right)}\cdot\sqrt[6]{\left(\frac{kk'}{4\sqrt{\varepsilon}}\right)}\cdot\prod_0^\infty\{1-2\varepsilon^{2\nu+1}\cos 2x+\varepsilon^{2(2\nu+1)}\};$$

$$\text{XVII.}\qquad \eta(x) = 2.\sqrt{\left(\frac{w}{\pi}\right)}\cdot\sqrt[6]{\left(\frac{kk'}{4\varepsilon}\right)}.\sin x.\prod_0^\infty\{1-2\varepsilon^{2\nu}\cos 2x+\varepsilon^{4\nu}\}.$$

Setzt man hierin $x+\frac{1}{2}\pi$ statt x, so erhält man:

$$\text{XVIII.}\quad \vartheta(x+\tfrac{1}{2}\pi) = \sqrt{\frac{\varpi}{\pi}}\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{kk'}{4\sqrt{\varepsilon}}\right)}\cdot\prod_{0}^{\infty}\{1+2\varepsilon^{2r+1}.\cos 2x+\varepsilon^{2(2r+1)}\};$$

$$\text{XIX.}\quad \eta(x+\tfrac{1}{2}\pi) = 2\sqrt{\frac{\varpi}{\pi}}\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{kk'}{4\varepsilon}\right)}.\cos x.\prod_{0}^{\infty}\{1+2\varepsilon^{2r}.\cos 2x+\varepsilon^{4r}\}.$$

Hieraus folgt:

$$\text{XX.}\quad \sin\operatorname{am}\frac{\varpi x}{\pi} = 2\sqrt{\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{k}\right)}\cdot\sin x\cdot\prod_{0}^{\infty}\cdot\left\{\frac{1-2\varepsilon^{2r}.\cos 2x+\varepsilon^{4r}}{1-2\varepsilon^{2r+1}.\cos 2x+\varepsilon^{2(2r+1)}}\right\}$$

$$\text{XXI.}\quad \cos\operatorname{am}\frac{\varpi x}{\pi} = 2\sqrt{\left(\frac{k'\sqrt{\varepsilon}}{k}\right)}\cdot\cos x\cdot\prod_{0}^{\infty}\cdot\left\{\frac{1+2\varepsilon^{2r}.\cos 2x+\varepsilon^{4r}}{1-2\varepsilon^{2r+1}.\cos 2x+\varepsilon^{2(2r+1)}}\right\};$$

$$\text{XXII.}\quad \Delta\operatorname{am}\frac{\varpi x}{\pi} = \sqrt{k'}\cdot\prod_{0}^{\infty}\cdot\left\{\frac{1+2\varepsilon^{2r+1}.\cos 2x+\varepsilon^{2(2r+1)}}{1-2\varepsilon^{2r+1}.\cos 2x+\varepsilon^{2(2r+1)}}\right\}.$$

Setzt man in (XVI, XVII) nx statt x, wo n eine ungrade Zahl bezeichnen mag, verwandelt ferner τ in $n\tau$ und bezeichnet die Werthe, welche dadurch k, k', ϖ, ϖ' annehmen, resp. mit K, K', Ω, Ω', so hat man:

$$\text{XXIII.}\qquad \vartheta(nx, n\tau)$$
$$= \sqrt{\frac{\Omega}{\pi}}\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{KK'}{4\sqrt{\varepsilon^n}}\right)}\cdot\prod_{0}^{\infty}\cdot\{1-2\varepsilon^{n(2r+1)}.\cos 2nx+\varepsilon^{2n(2r+1)}\};$$

$$\text{XXIV.}\qquad \eta(nx, n\tau)$$
$$= 2\sqrt{\frac{\Omega}{\pi}}\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{KK'}{4\varepsilon^n}\right)}\cdot\sin nx.\prod_{0}^{\infty}.\{1-2\varepsilon^{2nr}.\cos 2nx+\varepsilon^{4nr}\}.$$

Bezeichnet nun $f(x)$ eine beliebige Function von x, welche in Bezug auf den Modul 2π eine reelle Periode hat, und k eine der ganzen Zahlen von 0 bis einschliesslich $\frac{1}{2}(n-1)$, so sind alle Werthe von $f\left(x\pm\frac{2k\pi}{n}\right)$ in $f\left(x+\frac{4r\pi}{n}\right)$ enthalten, wo r alle ganzen Zahlenwerthe von 0 bis einschliesslich $n-1$ durchläuft. Denn zuerst alle graden Zahlenwerthe des k erstrecken sich von 0 bis $\frac{1}{2}(n-1)$, und $\frac{1}{2}k$ wird alle ganzen Zahlenwerthe von 0 bis $\frac{1}{4}(n-3)$ oder $\frac{1}{4}(n-1)$ durchlaufen, je nachdem n, durch 4 dividirt, den Rest -1 oder $+1$ lässt.

Es sei zuerst $n-1$ durch 4 theilbar, so erhält man alle Werthe von $f\left(x+\frac{2k\pi}{n}\right)$ aus $f\left(x+\frac{4r\pi}{n}\right)$, wenn man r alle ganzen Zahlenwerthe von 0 bis $\frac{1}{4}(n-1)$ durchlaufen lässt. Dagegen ist

$$f\left(x-\frac{2k\pi}{n}\right) = f\left(x+4\pi-\frac{2k\pi}{n}\right) = f\left[x+\frac{4(n-\frac{1}{2}k)}{n}\pi\right],$$

und hierin durchläuft $n - \frac{1}{2}k$ alle ganzen Zahlenwerthe von

$$n - \tfrac{1}{4}(n-1) = \tfrac{1}{2}(n+1) + \tfrac{1}{4}(n-1) \text{ bis } n.$$

Man erhält also, so lange k *gerade* ist, alle Werthe von $f\left(x \pm \frac{2k\pi}{n}\right)$ aus $f\left(x + \frac{4r\pi}{n}\right)$, wenn man r erst alle ganzen Zahlen von 0 bis $\frac{1}{4}(n-1)$, dann alle ganzen Zahlen von $\frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{4}(n-1)$ bis n durchgehen lässt. Für die *ungraden* Werthe von k ist $f\left(x \pm \frac{2k\pi}{n}\right) = f\left(x + 2\pi \pm \frac{2k\pi}{n}\right) = f\left[x + \frac{2(n \pm k)}{n}\pi\right]$, und hierin sind n und k gleichzeitig ungrade; also ist $n \pm k$ grade und $2(n \pm k)$ durch 4 theilbar; und zwar durchläuft, während k alle ungraden Zahlen von 1 bis $\frac{1}{2}(n-3)$ bedeutet, (denn während $n-1$ durch 4 aufgeht, kann $n-3$ nur durch 2 theilbar sein), $\frac{1}{2}(n+k)$ alle ganzen Zahlenwerthe von $\frac{1}{2}(n+1)$ bis $(\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}(n-3)) = \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{4}(n-5)$ der unmittelbar vor $\frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{4}(n-1)$ vorhergehenden ganzen Zahl, dagegen $\frac{1}{2}(n-k)$ alle ganzen Zahlenwerthe von $\frac{1}{2}(n - \frac{1}{2}(n-5)) = \frac{1}{4}(n+3)$ der unmittelbar auf $\frac{1}{4}(n-1)$ folgenden ganzen Zahl, bis $\frac{1}{2}(n-1)$. Man erhält also alle Werthe von $f\left(x \pm \frac{2k\pi}{n}\right)$, wo k alle ganzen Zahlenwerthe von 0 bis $\frac{1}{2}(n-1)$ durchläuft, aus $f\left(x + \frac{4r\pi}{n}\right)$, wenn man darin r alle ganzen Zahlenwerthe von 0 bis $n-1$ durchlaufen lässt; denn der Werth $r = n$, für welchen $f\left(x + \frac{4n\pi}{n}\right) = f(x)$ ist, giebt keinen neuen Werth von f.

Ist $n-3$ durch 4 theilbar, so ändert sich in der ganzen Betrachtung nur die Art, wie die vier Gruppen von Werthen sich an einander anschliessen.

Hat $f(x)$ ausserdem noch die Eigenschaft, dass $f(x+\pi) = \pm f(x)$ ist, so hat man $f\left(x - \frac{2k\pi}{n}\right) = \pm f\left(x + \pi - \frac{2k\pi}{n}\right) = \pm f\left(x + \frac{n-2k}{n}\right)$, und während k alle ganzen Zahlen von 0 bis $\frac{1}{2}(n-1)$ bedeutet, durchläuft $2k$ alle graden Zahlen von 0 bis $n-1$, mithin $n-2k$ alle ungraden Zahlen von 1 bis n. Man hat daher folgenden allgemeinen Satz:

„Wenn $f(x)$ eine solche Function von x bezeichnet, dass $f(x+2\pi) = f(x)$
„und $f(x+\pi) = \pm f(x)$ ist, so ist:

$$\text{(f.)} \quad \prod_{0}^{\frac{1}{2}(n-1)} f\left(x \pm \frac{2r\pi}{n}\right) = \prod_{0}^{n-1} f\left(x + \frac{4r\pi}{n}\right) = (\pm 1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \cdot \prod_{0}^{n-1} f\left(x + \frac{r\pi}{n}\right)\text{“}.$$

Ist ausserdem noch $f(-x) = f(x)$, so ist $f(\pm x) = f(x)$, also

$$f\left(\pm x \pm \frac{2r\pi}{n}\right) = f\left(x + \frac{2r\pi}{n}\right); \quad \text{und } f\left(\pm x + \frac{r\pi}{n}\right) = f\left(x \pm \frac{r\pi}{n}\right),$$

folglich:

$$\text{(g.)} \qquad \overset{\frac{1}{2}(n-1)}{\underset{0}{\Pi}} f\left(x + \frac{2r\pi}{n}\right) = (\pm 1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \cdot \overset{n-1}{\underset{0}{\Pi}} \cdot f\left(x \pm \frac{r\pi}{n}\right).$$

Ist dagegen $f(-x) = -f(x)$, so ist

$$f\left(\pm x \pm \frac{2r\pi}{n}\right) = \pm f\left(x + \frac{2r\pi}{n}\right); \quad f\left(\pm x + 2.\frac{r\pi}{n}\right) = \pm f\left(x \pm \frac{r\pi}{n}\right).$$

Man erhält also, es mag $f(-x) = f(x)$ oder $f(-x) = -f(x)$ sein, stets die Gleichung (g.).

Vermöge dieser Betrachtungen ist, wenn $[[1]]^{\frac{1}{n}}$ alle Wurzeln der Gleichung $y^n - 1 = 0$ bezeichnet:

$$\text{(a.)} \qquad [[1]]^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{4r\pi}{n}i},$$

wo r alle ganzen Zahlenwerthe von 0 bis $n-1$ durchläuft. Setzt man nun

$$\text{(b.)} \qquad z^{2n} - 2z^n.\cos 2x + 1 = 0,$$

so folgt:

$$z^{2n} = \cos 2x \pm \sqrt{(\cos^2 x - 1)} = \cos 2x \pm i \sin 2x, \quad \text{mithin}$$

$$z = [[1]]^n.(\cos 2x \pm i \sin 2x)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{4r\pi}{n}i}.e^{\pm\frac{2ix}{n}},$$

und es ist demzufolge das Trinom $z^{2n} - 2z^n.\cos 2x + 1$ für jedes r, von 0 bis $n-1$, durch das Product $(z - e^{\frac{4r\pi}{n}i}.e^{\frac{2ix}{n}})(z - e^{\frac{4r\pi}{n}i}.e^{-\frac{2ix}{n}})$ theilbar, folglich gleich

$$\text{(K.)} \qquad \overset{r=n-1}{\underset{r=0}{\Pi}} \left(z - e^{\frac{4r\pi}{n}i}.e^{\frac{2ix}{n}}\right) \cdot \overset{r=n-1}{\underset{r=0}{\Pi}} \left(z - e^{\frac{4r\pi}{n}i}.e^{-\frac{2ix}{n}}\right),$$

wo K eine Constante ist. Das zweite Product ändert sich nicht, wenn man die Factoren dergestalt vertauscht, dass der letzte zum ersten, der vorletzte zum zweiten, u. s. w. wird, d. h. wenn man $n-r$ anstatt r setzt. Dadurch erstreckt sich das zweite Product von $r = n$ bis $r = 1$, und das allgemeine Glied wird

$$z - e^{\frac{4n-4r}{n}\pi i}.e^{-\frac{2ix}{n}} = z - e^{-\frac{4r\pi}{n}i}.e^{\frac{2ix}{n}}.$$

Nimmt man daher statt des Factors mit $r = n$, den mit $r = 0$, und combinirt die Factoren mit gleichen Werthen des r mit einander, so erhält man:

$$z^{2n} - 2z^n.\cos 2x + 1 = K.\overset{r=n-1}{\underset{r=0}{\Pi}} \cdot \left\{1 - 2z.\cos 2\left(\frac{x}{n} + \frac{2r\pi}{n}\right) + z^2\right\}.$$

Hieraus folgt für $z = 0$, $K = 1$ und man hat, wegen (XXIII):

$$\vartheta(nx, n\tau) = \frac{1}{a_0} \cdot \prod_{r=0}^{r=n-1} \cdot \prod_{s=0}^{s=\infty} \cdot \left\{1 - 2\varepsilon^{2s+1}.\cos 2\left(x + \frac{2r\pi}{n}\right) + \varepsilon^{2(2s+1)}\right\},$$

oder, wegen (XVII):

$$\vartheta(nx, n\tau) = a_0^{n-1} \cdot \prod_{r=0}^{r=n-1} \cdot \vartheta\left(x + \frac{2r\pi}{n}, \tau\right).$$

Eben so folgt aus (XXIV):

$$\eta(nx, n\tau) = \frac{2}{a_0} \cdot \sqrt[4]{\varepsilon^n}.\sin nx.\prod_{r=0}^{r=n-1} \cdot \prod_{s=0}^{s=\infty}$$
$$\times\left\{1 - 2\varepsilon^{2s}.\cos 2\left(x + \frac{2r\pi}{n}\right) + \varepsilon^{4s}\right\}$$

oder, wegen (XVIII):

$$\eta(nx, n\tau) = \frac{a_0^{n-1}}{2^{n-1}} \cdot \sin nx.\frac{\prod_{r=0}^{r=n-1} \eta\left(x + \frac{2r\pi}{n}\right)}{\prod_{r=0}^{r=n-1} \sin\left(x + \frac{2r\pi}{n}\right)}.$$

Hier ist, wegen (g), da $\sin(x + \pi) = -\sin x$ ist:

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \cdot \prod_{0}^{\frac{1}{2}(n-1)} \sin\left(x + \frac{2r\pi}{n}\right) = \sin x \cdot \prod_{r=0}^{r=\frac{1}{2}(n-1)} \cdot \sin\left(x + \frac{r\pi}{n}\right)\sin\left(x - \frac{r\pi}{n}\right)$$
$$= (-\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}(n-1)} \cdot \prod_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \cdot \left(\cos 2x - \cos\frac{2r\pi}{n}\right).$$

Es ist aber $\cos 2a - \cos 2b = 2(\sin^2 b - \sin^2 a)$, also ist das Product gleich

$$\sin x.\prod_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \cdot \left(\sin^2\frac{r\pi}{n} - \sin^2 x\right) = \prod_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \cdot \sin^2\frac{r\pi}{n} \cdot \sin x \cdot \prod_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{r\pi}{n}}\right).$$

Der Werth des Products rechts wird bekannterweise aus der identischen Gleichung $\cos nx + i\sin nx = (\cos x + i\sin x)^n$ gefunden, welche vermöge der *Newton*schen Formel, nach Trennung des reellen Theils vom imaginären,

$$\sin nx = n\cos^{n-1}x.\sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos^{n-3}.\sin^3 x + \ldots\ldots,$$

giebt, wo, da n ungrade ist, alle Potenzen des $\cos x$ die *graden* Zahlen von 0 bis $n-1$ zu Exponenten haben, folglich durch ganze Potenzen von $1 - \sin^2 x$ ersetzt werden können, deren Exponenten sich jedoch nur von 0 bis $\frac{1}{2}(n-1)$ erstrecken. Es ist also $\sin nx$ eine *ganze rationale* Function $n$ten Grades von $\sin x$. Dieselbe verschwindet, weil $\sin nx$ durch die Werthe $x = 0$, $\pm\frac{\pi}{n}$, $\pm\frac{2\pi}{n}$, $\pm\frac{3\pi}{n}$, ... $\pm\frac{n-1}{n}\pi$ annullirt wird, für

$$\sin x = 0 \quad , \quad = \sin\frac{\pi}{n} \quad , \quad \pm\sin\frac{2\pi}{n} \quad , \quad \pm\sin\frac{3\pi}{n}, \ldots\ldots, \quad \pm\sin\frac{n-1}{n},$$

und ist also durch jeden der Factoren

$$\sin x \quad , \quad \sin x \pm \sin\frac{\pi}{n} \quad , \quad \sin x \pm \sin\frac{2\pi}{n},$$
$$\sin x \pm \sin\frac{3\pi}{n}, \ldots\ldots, \quad \sin x \pm \sin\frac{n-1}{n}\pi$$

theilbar. Die Anzahl dieser Factoren beträgt aber $2n$, und es ist $\sin\frac{n-k}{n}\pi$, wo k zwischen 0 und $\frac{1}{2}n$ liegt, gleich $-\sin\frac{k\pi}{n}$ und $-\sin\frac{n-k}{n}\pi = +\sin\frac{k\pi}{n}$. Es sind also alle n verschiedenen Factoren von $\sin nx$ in: $\sin x$, $\sin x \pm \sin\frac{\pi}{n}$, $\sin x \pm \sin\frac{2\pi}{n}, \ldots\ldots, \sin x \pm \sin\frac{\frac{1}{2}(n-1)\pi}{n}$ enthalten, mithin ist $\sin nx$ von der Form

$$\sin nx = K \sin x \prod_{r=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \left(\sin^2 x - \sin^2\frac{r\pi}{n}\right)$$
$$= (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} K. \prod_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \sin^2\frac{r\pi}{n}.\sin x. \prod_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{r\pi}{n}}\right),$$

also ist:

$$\frac{n\cdot\sin nx}{nx}\cdot\frac{\sin x}{x} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} K \prod_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \sin^2\frac{r\pi}{n}. \prod_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{r\pi}{n}}\right).$$

Setzt man hierin $x = 0$, so wird die Seite links gleich n, und man erhält

$$K = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.n \left\{\prod_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \sin^2\frac{r\pi}{n}\right\}^{-1}, \text{ folglich ist:}$$

$$\text{(86.)} \qquad \sin nx = n \sin x \prod_{r=1}^{r=\frac{1}{2}(n-1)} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{r\pi}{n}}\right)$$

Hieraus folgt:

$$(-1)^{\frac{1}{2}n-1} \prod_{0}^{n-1} \sin\left(x + \frac{2r\pi}{n}\right) = \prod_{1}^{\frac{1}{2}n-1} \sin^2\frac{r\pi}{n}.\sin x. \prod_{1}^{\frac{1}{2}n-1} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{r\pi}{n}}\right)$$
$$= \frac{1}{n}\cdot\prod_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)}.\sin^2\frac{r\pi}{n}.\sin nx.$$

Es ist aber $\sin\frac{r\pi}{n} = -\sin\frac{n-r}{n}\pi$, also $\prod_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \sin^2\frac{r\pi}{n} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \prod_{1}^{n-1} \sin\frac{r\pi}{n} = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.n}{2^{n-1}},$

folglich hat man:

$$(87.)\qquad \sin nx = 2^{n-1}.\prod_{r=0}^{r=n-1}\sin\left(x+\frac{2r\pi}{n}\right).$$

Hiedurch reduciren sich die obigen Gleichungen auf:

$$\text{XXV.}\quad \vartheta(nx,n\tau) = \left[\sqrt{\left(\frac{\pi}{\Omega}\right)}.\sqrt[6]{\left(\frac{4\sqrt{\varepsilon}}{KK'}\right)}\right]^{n-1}.\prod_{r=0}^{r=n-1}\vartheta\left(x+\frac{2r\pi}{n},\tau\right);$$

$$\text{XXVI.}\quad \eta(nx,n\tau) = \left[\sqrt{\left(\frac{\pi}{\Omega}\right)}.\sqrt[6]{\left(\frac{4\sqrt{\varepsilon^n}}{KK'}\right)}\right]^{n-1}.\prod_{r=0}^{r=n-1}\eta\left(x+\frac{2r\pi}{n}\right),$$

und hieraus folgt, dividendo:

$$\text{XXVII.}\quad \sin\operatorname{am}\left(\frac{n\Omega x}{\pi},K\right) = \sqrt{\left(\frac{k^n}{K}\right)}.\prod_0^{n-1}\sin\operatorname{am}\frac{w}{\pi}\left(x+\frac{2r\pi}{n}\right);$$

$$\text{XXVIII.}\quad \cos\operatorname{am}\left(\frac{n\Omega x}{\pi},K\right) = \sqrt{\left(\frac{K'k^n}{Kk'^n}\right)}.\prod_0^{n-1}\cos\operatorname{am}\frac{w}{\pi}\left(x+\frac{2r\pi}{n}\right);$$

$$\text{XXIX.}\quad \Delta\operatorname{am}\left(\frac{n\Omega x}{\pi},K\right) = \sqrt{\left(\frac{K'}{k'^n}\right)}.\prod_0^{n-1}\Delta\operatorname{am}\frac{w}{\pi}\left(x+\frac{2r\pi}{n}\right).$$

Setzt man in (XXVII) $x=\frac{1}{2}\pi$ und in (XXIX) $x=0$, so erhält man, wenn man noch $\operatorname{am}(\frac{1}{2}\omega-u)$ mit $\operatorname{coam}u$ bezeichnet:

$$\text{XXX.}\quad K = k^n\prod_0^{\frac{1}{2}(n-1)}\sin^2\operatorname{coam}\frac{2rw}{n} = k^n\prod_0^{n-1}\sin\operatorname{coam}\frac{2rw}{n};$$

$$\text{XXXI.}\quad K' = \prod_0^{\frac{1}{2}(n-1)}\Delta^2\operatorname{coam}\frac{2rw}{n} = \prod_0^{n-1}\Delta\operatorname{coam}\frac{2rw}{n}.$$

Aus (XXIV) und (XVII) folgt, dividendo:

$$\frac{\eta(nx,n\tau)}{\eta(x,\tau)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\Omega}{w}\right)}.\sqrt[6]{\left(\frac{KK'}{kk'\varepsilon^{n-1}}\right)}.\frac{\sin nx}{\sin x}.\prod^{\infty}\left\{\frac{1-2\varepsilon^{2ns}\cos 2nx+\varepsilon^{4ns}}{1-2\varepsilon^{2s}\cos 2x+\varepsilon^{4s}}\right\},$$

und hieraus ergiebt sich für $x=0$, wodurch $\frac{\sin nx}{\sin x}$ in n übergeht:

$$(\Omega.)\quad \frac{\eta(0,n\tau)}{\eta(0,\tau)} = n\sqrt{\left(\frac{\Omega}{w}\right)}\sqrt[6]{\left(\frac{KK'}{kk'\varepsilon^{n-1}}\right)}.\prod_0^{\infty}\left\{\frac{1-\varepsilon^{2ns}}{1-\varepsilon^{2s}}\right\}^2.$$

Nun folgt aus (7):

$$\frac{\eta(x)}{\sin x} = 2\left\{\sqrt[4]{\varepsilon}-\sqrt[4]{\varepsilon^9}.\frac{\sin 3x}{\sin x}+\sqrt[4]{\varepsilon^{25}}.\frac{\sin 5x}{\sin x}-\dots\right\}$$

und hieraus folgt, wenn man x gegen Null convergiren lässt:

$$\lim \left\{\frac{\eta(x)}{\sin x}\right\}_0 = 2\{\sqrt[4]{\varepsilon} - 3.\sqrt[4]{\varepsilon^9} + 5.\sqrt[4]{\varepsilon^{25}} - \dots\} .$$

Der Ausdruck rechts ist offenbar nichts Anderes als $\eta'(0)$, also wegen (33) gleich:

$$\eta(\tfrac{1}{2}\pi)\,\vartheta(\tfrac{1}{2}\pi)\,\vartheta(0) = \sqrt{(kk')}.\sqrt{\left(\frac{\varpi^3}{\pi^3}\right)},$$

mithin ist:

$$(88.)\quad \lim \left\{\frac{\eta(x)}{\sin x}\right\}_{x=0} = \sqrt{(kk')}.\sqrt{\left(\frac{\varpi^3}{\pi^3}\right)} .$$

Demnach folgt aus (XVII), wenn man darin beide Seiten durch $\sin x$ dividirt und darauf $x = 0$ setzt:

$$\sqrt{(kk')}.\sqrt{\left(\frac{\varpi^3}{\pi^3}\right)} = 2.\sqrt{\left(\frac{\varpi}{\pi}\right)}\cdot\sqrt[6]{\left(\frac{kk'}{4\varepsilon}\right)}.\prod_0^\infty(1-\varepsilon^{2\nu})^2,$$

oder:

$$(89.)\qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{\varpi}{\pi}\sqrt[3]{(kk')}.\sqrt[6]{(4\varepsilon)} = \prod_0^\infty(1-\varepsilon^{2\nu})^2 ,$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man τ in $n\tau$ verwandelt, wodurch ε, ω, k, k, resp. in ε^n, Ω, K, K' übergehen:

$$(90.)\qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{\Omega}{\pi}.\sqrt[3]{(KK')}.\sqrt[6]{(4\varepsilon^n)} = \prod_0^\infty(1-\varepsilon^{2\nu n})^2 .$$

Dividirt man (90) durch (89) und multiplicirt beide Seiten der so entstehenden Gleichung mit $n.\sqrt{\left(\frac{\Omega}{\varpi}\right)}\sqrt[6]{\left(\frac{KK'}{kk'\varepsilon^{n-1}}\right)}$, so folgt aus ($\Omega$) und aus (34):

$$(91.)\quad \frac{\eta(0,n\tau)}{\eta(0,\tau)} = n.\sqrt{\left(\frac{KK'\Omega^3}{kk'\varpi^3}\right)} \;\; ; \;\; \frac{\vartheta(0,\tau)}{\vartheta(0,n\tau)} = \sqrt{\left(\frac{k'\varpi}{K\Omega}\right)},$$

also ist

$$(92.)\quad \sqrt{\left(\frac{k}{K}\right)}\cdot\frac{\eta(0,n\tau)}{\vartheta(0,n\tau)}\cdot\frac{\vartheta(0,\tau)}{\eta(0,\tau)} = \frac{n\Omega}{\varpi} .$$

Wegen (XXVII) ist aber:

$$\sqrt{\left(\frac{k}{K}\right)}\cdot\frac{\eta(nx,n\tau)}{\vartheta(nx,n\tau)}\cdot\frac{\vartheta(x,\tau)}{\eta(x,\tau)} = \frac{\sin\text{am}\left(\frac{n\Omega x}{\pi},K\right)}{\sin\text{am}\left(\frac{\varpi x}{\pi},k\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{k^n}{K}\right)}.\prod_1^{n-1}\sin\text{am}\frac{\varpi}{\pi}\left(x+\frac{2r\pi}{n}\right),$$

mithin hat man für $x = 0$, wegen (92):

$$\frac{n\Omega}{w} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \sqrt{\frac{k^n}{K}} \cdot \prod_1^{\frac{1}{2}(n-1)} \sin^2 \operatorname{am} \frac{2rw}{n} = \sqrt{\frac{k^n}{K}} \cdot \prod_1^{n-1} \sin \operatorname{am} \frac{2rw}{n},$$

folglich wegen (XXX):

XXXII. $$\frac{n\Omega}{w}$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \cdot \prod_1^{\frac{1}{2}(n-1)} \left\{ \frac{\sin^2 \operatorname{am} \frac{2rw}{n}}{\sin^2 \operatorname{coam} \frac{2rw}{n}} \right\} = \prod_1^{n-1} \cdot \left\{ \frac{\sin \operatorname{am} \frac{2rw}{n}}{\sin \operatorname{coam} \frac{2rw}{n}} \right\}.$$

Nun folgt aus (IX. ψ), wenn man

$$(93.) \quad \sin \operatorname{am}\left(\frac{n\Omega x}{\pi}, K\right) = V \quad ; \quad \sin \operatorname{am}\left(\frac{wx}{\pi}, k\right) = v$$

setzt:

$$\frac{n\Omega x}{\pi} = \int_0^V \frac{\partial V}{\sqrt{(1-V^2)} \cdot \sqrt{(1-K^2 \cdot V^2)}} \quad ; \quad \frac{wx}{\pi} = \int_0^v \frac{\partial v}{\sqrt{(1-v^2)} \cdot \sqrt{(1-k^2 . v^2)}},$$

also ist

$$(94.) \quad \int_0^V \frac{\partial V}{\sqrt{(1-V^2)} . \sqrt{(1-K^2 . V^2)}} = \frac{w}{n\Omega} \cdot \int_0^v \frac{\partial v}{\sqrt{(1-v^2)} . \sqrt{(1-k^2 . v^2)}},$$

und man hat, wenn man $\frac{w}{n\Omega}$ mit c und $\frac{wx}{\pi}$ mit α bezeichnet:

$$(95.) \qquad v = \sin \operatorname{am} \alpha \quad ; \quad V = \sin \operatorname{am}\left(\frac{\alpha}{c}, K\right).$$

Man sieht leicht, dass V eine rationale gebrochene Function n^{ten} Grades von v ist. Es folgt nämlich aus (XXVII):

$$\sin \operatorname{am}\left(\frac{\alpha}{c}, K\right) = \sqrt{\frac{k^n}{K}} \cdot \prod_0^{\frac{1}{2}(n-1)} \cdot \sin \operatorname{am}\left(\alpha + \frac{2rw}{n}\right) \sin \operatorname{am}\left(\alpha - \frac{2rw}{n}\right).$$

Wegen (41) ist aber:

$$\sin \operatorname{am}(\alpha + a) \sin \operatorname{am}(\alpha - a)$$

$$= -\sin^2 \operatorname{am} a \cdot \frac{1 - \frac{\sin^2 \operatorname{am} \alpha}{\sin^2 \operatorname{am} a}}{1 - k^2 . \sin^2 \operatorname{am} a . \sin^2 \operatorname{am} \alpha}$$

$$= -\sin^2 \operatorname{am} a \cdot \frac{1 - \frac{v^2}{\sin^2 \operatorname{am} a}}{1 - k^2 . \sin^2 \operatorname{am} a . v^2},$$

folglich hat man:

$$\sin\mathrm{am}^2\left(\frac{\alpha}{c},\ K\right)$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \sqrt{\frac{k^n}{K}} \cdot \overset{\frac{1}{2}(n-1)}{\underset{1}{\Pi}} \cdot \sin^2\mathrm{am}\frac{2r\varpi}{n} \cdot v \cdot \overset{\frac{1}{2}(n-1)}{\underset{1}{\Pi}} \cdot \left(\frac{1-\dfrac{v^2}{\sin^2\mathrm{am}\frac{2r\varpi}{n}}}{1-k^2.\sin^2\mathrm{am}\frac{2r\varpi}{n}\cdot v^2}\right),$$

oder, wegen (XXX und XXXII):

XXXIII. $$\sin\mathrm{am}\left(\frac{\alpha}{c},\ K\right)$$

$$= \frac{v}{c} \cdot \overset{\frac{1}{2}(n-1)}{\underset{1}{\Pi}} \cdot \left(\frac{1-\dfrac{v^2}{\sin^2\mathrm{am}\frac{2r\varpi}{n}}}{1-k^2.\sin^2\mathrm{am}\frac{2r\varpi}{n}\cdot v^2}\right),$$

und da unter dem Zeichen Π im Zähler und Nenner $\frac{1}{2}(n-1)$ Factoren von der Form $1-pv^2$ sich befinden, so sind Zähler und Nenner *ganze rationale* Functionen $n-1^{\text{ten}}$ Grades von v; also ist das ganze Product, mit Einschluss des Factors v, eine *rationale gebrochene* Function n^{ten} Grades von v.

Die Gleichungen (XXIII bis XXIX) lassen sich auf ähnliche Weise umformen. Setzt man nämlich in (38 und 40), $x+\frac{1}{2}\pi$ statt x, so hat man:

(96.) $$\frac{\vartheta(x+y+\frac{1}{2}\pi)\,\vartheta(x-y+\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta^2(x+\frac{1}{2}\pi)\,\vartheta^2(y)}$$

$$= \frac{\pi}{k'\varpi}\left\{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\frac{\varpi y}{\pi}\cdot\sin^2\mathrm{coam}\frac{\varpi x}{\pi}\right\}.$$

(97.) $$\frac{\eta(x+y+\frac{1}{2}\pi)\,\eta(x-y+\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta^2(x+\frac{1}{2}\pi)\,\vartheta^2(y)}$$

$$= \frac{k\pi}{k'\varpi}\left\{\sin^2\mathrm{coam}\frac{\varpi x}{\pi}-\sin^2\mathrm{am}\frac{\varpi y}{\pi}\right\}.$$

Dividirt man diese Gleichungen durch (38), so hebt sich links $\vartheta^2(y)$, und es tritt der Nenner $\frac{\vartheta^2(x+\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta^2(x)} = \frac{1}{k'}\Delta^2\mathrm{am}\frac{\varpi x}{\pi}$ hinzu. Man erhält also, da

$$\frac{\eta(x+y+\frac{1}{2}\pi).\eta(x-y+\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta(x+y).\vartheta(x-y)} = \frac{k}{k'}\cos\mathrm{am}\frac{\varpi}{\pi}(x+y)\cos\mathrm{am}\frac{\varpi}{\pi}(x-y),$$

$$\frac{\vartheta(x+y+\frac{1}{2}\pi).\vartheta(x-y+\frac{1}{2}\pi)}{\vartheta(x+y).\vartheta(x-y)} = \frac{1}{k'}\cdot\Delta\mathrm{am}\frac{\varpi}{\pi}(x+y)\,\Delta\mathrm{am}\frac{\varpi}{\pi}(x-y)$$

ist:

$$\frac{\cos\operatorname{am}\frac{w}{\pi}(x+y)\cos\operatorname{am}\frac{w}{\pi}(x-y)}{\Delta^2\operatorname{am}\frac{wx}{\pi}} = \frac{\sin^2\operatorname{coam}\frac{wx}{\pi}-\sin^2\operatorname{am}\frac{wy}{\pi}}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{wx}{\pi}\sin^2\operatorname{am}\frac{wy}{\pi}}$$

$$= \frac{\sin^2\operatorname{coam}\frac{wx}{\pi}\left(1-\dfrac{\sin^2\operatorname{am}\frac{wy}{\pi}}{\sin^2\operatorname{coam}\frac{wx}{\pi}}\right)}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{wx}{\pi}\sin^2\operatorname{am}\frac{wy}{\pi}}$$

$$= \frac{\cos^2\operatorname{am}\frac{wx}{\pi}}{\Delta^2\operatorname{am}\frac{wx}{\pi}}\cdot\frac{1-\dfrac{\sin^2\operatorname{am}\frac{wx}{\pi}}{\sin^2\operatorname{coam}\frac{wx}{\pi}}}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{wx}{\pi}\cdot\sin^2\operatorname{am}\frac{wy}{\pi}}.$$

Setzt man daher: $\frac{wy}{\pi}=\alpha$, $\frac{wx}{\pi}=a$, so ergiebt sich:

$$(98.)\quad \frac{\cos\operatorname{am}(\alpha+a)\cos\operatorname{am}(\alpha-a)}{\cos^2\operatorname{am}a} = \frac{1-\dfrac{\sin^2\operatorname{am}\alpha}{\sin^2\operatorname{coam}a}}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}a.\sin^2\operatorname{am}\alpha},$$

$$(99.)\quad \frac{\Delta\operatorname{am}(\alpha+a).\Delta\operatorname{am}(\alpha-a)}{\Delta^2\operatorname{am}a} = \frac{1-k^2\sin^2\operatorname{am}a.\sin^2\operatorname{am}\alpha}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}a.\sin^2\operatorname{am}\alpha}.$$

Vermöge dieser Formeln kann man, wenn man wieder $\sin\operatorname{am}\alpha = v$ setzt, die Gleichungen (XXVIII und XXIX) auch folgendermaassen schreiben:

XXXIV.

$$\cos\operatorname{am}\left(\frac{\alpha}{c},K\right)$$

$$= \sqrt{(1-v^2)}.\prod_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)}.\left(\frac{1-\dfrac{v}{\sin^2\operatorname{coam}\frac{2rw}{n}}}{1-k^2\sin\operatorname{am}\frac{2rw}{n}\cdot v^2}\right);$$

XXXV.

$$\Delta\operatorname{am}\cdot\left(\frac{\alpha}{c},K\right)$$

$$= \sqrt{(1-k^2.v^2)}.\prod_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)}.\left(\frac{1-k^2\sin^2\operatorname{coam}\frac{2rw}{n}.v^2}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2rw}{n}.v^2}\right).$$

Bornim bei Potsdam, den 24. November 1852.

11.
Beitrag zur Theorie der Bewegung der Räderfuhrwerke, mit Inbegriff der Dampfwagen.

(Von Herrn *J. P. G. v. Heim*, Königl. würtemb. Oberstlieutenant a. D.)

(Fortsetzung von Nr. 9 im vorigen Heft.)

Zweite Abtheilung.
Die dynamischen Verhältnisse der Dampfwagen; in ihrer Eigenschaft als Räderfuhrwerke betrachtet.

Einleitende Betrachtungen.

§. 54.

Die Bewegung der Dampfwagen ist, wie die des gewöhnlichen Räderfuhrwerks, aus der, allen verbundenen Theilen gemeinsamen, fortschreitenden Bewegung und der umdrehenden der Räder zusammengesetzt. Während aber das Fuhrwerk durch die Zugkraft *von aussen* angetrieben und hierdurch *mittelbar* die Umdrehung der Räder hervorgebracht wird, wirkt bei dem Dampfwagen die *ihm inwohnende* Triebkraft zunächst auf die Räder, und es ist bei ihm die fortschreitende Bewegung eine *Folge* der umdrehenden.

Im gleichen Sinne, wie beim Fuhrwerk (§. 1), ist auch bei den Dampfwagen zwischen rollender und gleitender, oder theilweise gleitender Bewegung zu unterscheiden. Bezeichnet N den Druck eines Rades auf die Bahn und f den Coefficienten der Reibung zwischen dem Umfange des Rades und der Bahn, so drückt das Product fN den Widerstand aus, den diese Reibung (der ursprünglich bewirkten) Umdrehung des Rades entgegensetzt, und welcher, (als eine Kraft, deren Richtung in die Bahnlinie fällt) der der umdrehenden Bewegung des Puncts, in welchem das Rad die Bahn berührt, gerade entgegengesetzt ist, die fortschreitende Bewegung erzeugt. Zur rollenden Bewegung ist ein bestimmter Werth von fN, eine Kraft R nöthig, welche, an dem genannten Berührungspuncte angebracht, die eben angegebene Richtung des Widerstandes fN hat.

Ist nun $fN < R$, so muss die lineare Umdrehungsgeschwindigkeit des

Rad-Umfanges grösser als die fortschreitende Geschwindigkeit, oder die Bewegung des Rades, wenigstens theilweise, *gleitend* sein. Ist aber $fN \overline{\overline{>}} R$, so kann nur rollende Bewegung Statt finden, und ein grösserer Theil von fN als R kann nicht zur Wirksamkeit gelangen. Denn gesetzt dies wäre möglich, oder es würde eine grössere Kraft als R auf Verzögerung der Umdrehung des Rades und auf die fortschreitende Bewegung verwendet, so müsste, einerseits durch Beschleunigung der letzteren Bewegung, andererseits durch langsamere Umdrehung, die Bewegung des Rades *gleitend* werden; aber so, dass der Widerstand der Reibung die der fortschreitenden Bewegung entgegengesetzte Richtung hätte, wodurch augenblicklich eben diese Bewegung verzögert, die umdrehende des Rades aber beschleunigt und so die rollende Bewegung wieder hergestellt werden würde.

Aus diesen Betrachtungen folgt mit andern Worten, dass die rollende Bewegung, wenn sie möglich ist, sich von selbst erhält; dass diese Möglichkeit aber ein gewisses Maas des Widerstandes fN bedingt. Ist dasselbe nicht vorhanden, und tritt überdiess, bei unzureichender Stärke der Triebkraft, Verzögerung der umdrehenden Bewegung ein, so wird ferner der Widerstand fN auch seine Richtung wechseln, und bald verzögernd, bald beschleunigend auf die fortschreitende Bewegung wirken können (§. 64).

§. 55.

Von den verschiedenen zur Anwendung gelangten Arten der Verbindung der Räder an den Dampfwagen werden sich die nachfolgenden Untersuchungen zunächst auf diejenigen beziehen, bei denen die Triebkraft des Dampfwagens an vier unter sich gleichen Rädern, von welchen je zwei durch eine gemeinschaftliche Achse gepaart sind, arbeitet, und jedes Rad des einen Paares mit dem in der gleichen Geleisespur gehenden Rade des andern Paares durch eine sogenannte Kuppelstange verbunden ist, so dass beide Räderpaare zusammen ein System bilden und gleichen Lauf halten.

Ausser diesen Rädern, welche man *Treibräder* nennt, sind gewöhnlich an den Dampfwagen, zur Unterstützung an ihrer vordern Seite, noch zwei andere, durch eine Achse verbundene Räder, denen man den Namen *Tragräder* giebt, oder auch zwei solche Räderpaare angebracht. Die Dampfwagen sind daher entweder *vierrädrig*, oder *sechsrädrig*, oder *achträdrig*.

Um die dynamischen Verhältnisse der Dampfwagen durch Gleichungen auszudrücken, wird man dieselben, wie die Fuhrwerke (§. 5), als aus mehreren

Systemen fester Körper bestehend betrachten müssen, und kann zu diesem Ende die ganze Zusammensetzung eines Dampfwagens mit seinen Rädern als ein System (§. 8), und sodann die Räder als für sich mehrere besondere Systeme bildend ansehen.

Ueber die Beschaffenheit der Bahn und die Lage der auf den Dampfwagen wirkenden Kräfte und Widerstände in einer und derselben verticalen Ebene, werden dieselben Voraussetzungen wie bei den Fuhrwerken (§. 4) gemacht, und als solche Kräfte und Widerstände, die Triebkraft des Dampfwagens, die Schwerkraft, der Widerstand der Reibung zwischen den Rädern und der Bahn, so wie der Widerstand zwischen den Achsen der Räder und ihren Lagern, und der bei der grössern Geschwindigkeit, mit der die Dampfwagen sich bewegen, nicht unbeträchtliche Widerstand, welchen die Luft der Bewegung entgegensetzt, in Betracht gezogen werden.

Da die Wirkungen, welche Theile eines Körpersystems durch Druck oder Stoss auf einander ausüben, auf die Bewegung, welche dem System, als Ganzes genommen, durch diese oder jene Kräfte mitgetheilt wird, nur in so fern Einfluss haben können, als diese Wirkungen etwa Veränderungen der relativen Lage, den der Schwerpunct des Systems gegen dessen Theile einnimmt, zur Folge haben, und als etwa zugleich die Lage des Schwerpuncts auf die genannte Bewegung Einfluss hat; und da hier ferner von den jedenfalls unerheblichen Veränderungen, welche die relative Lage des Schwerpuncts des Dampfwagens während dessen Bewegung erleidet, so wie von der Reibung, welche an den Gelenken der verbundenen Theile Statt findet, abgesehen wird: so können auch die zur Uebertragung der Kraft der Maschine auf die Treibräder dienenden Bewegungen, welche den verschiedenen zu dieser Verrichtung bestimmten Theilen des Dampfwagens neben der fortschreitenden Bewegung eigenthümlich sind, bei der Bildung der Gleichungen, welche auf das dem ganzen Dampfwagen mit seinen Rädern umfassende System Bezug haben, ganz unberücksichtigt bleiben, und es geht nur die Kraft der Maschine selbst in die Gleichungen ein, welche dem die Treibräder für sich enthaltenden Systeme angehören.

Erstes Capitel.

Der vierrädrige Dampfwagen ohne Trагräder.

Bezeichnungen.

§. 56.

Die Buchstaben x, X, α, f und g sollen in der für die Fuhrwerke (§. 7 u. 9) angegebenen Bedeutung genommen und der Werth x soll von dem Puncte an gerechnet werden, in welchem das Hinterrad *im Anfange der Bewegung* die Bahnlinie berührt.

P_1 bedeutet das Gewicht des Dampfwagens, mit Ausschluss der Räder und Achsen; h den Abstand des Schwerpuncts dieses Gewichts von der Bahnlinie; i den Abstand des Puncts, in welchem das Hinterrad und die Bahnlinie sich berühren, von der Geraden, welche senkrecht auf der Bahnlinie durch den Schwerpunct geht, und $c = i\cos\alpha - h\sin\alpha$ den Abstand dieses Berührungspuncts von der verticalen Linie durch den Schwerpunct.

$4Q_1$ ist das Gewicht der beiden Räderpaare, mit Inbegriff ihrer Achsen; a der Abstand zwischen den beiden Achsenlinien; r_1 der Halbmesser des auf der Bahnlinie gehenden äussern Umfanges der Räder; ϱ_1 der Halbmesser der in den Lagern laufenden Theile der Achsen.

$2N$ sei der Druck der beiden Hinterräder ⎫ in senkrechter Richtung auf
$2N_1$ der Druck der beiden Vorderräder ⎭ die Bahn;

$4R_1$ das Reibungs-Erforderniss zur rollenden Umdrehung der beiden Räderpaare (§. 54);

φ_1 der Coefficient der Reibung zwischen den Achsen und ihren Lagern;

K die Kraft, womit der Dampfwagen den angehängten Wagenzug nach sich zieht; β der Winkel, unter welchem sie wirkt (in dem oben (§. 7) angegebenen Sinne), und $n\cos\beta$ der Abstand des Puncts der Berührung zwischen dem Hinterrade und der Bahnlinie von der Richtung dieser Kraft.

S sei der mit der Bahnlinie parallele, der Bewegung des Dampfwagens und des Wagenzuges entgegentretende Luftwiderstand; mS das auf den eben genannten Berührungspunct bezogene Moment dieses Widerstandes;

$\frac{2Q_1}{g}k_1^2$ das Trägheitsmoment eines Räderpaares, mit Inbegriff der Achse, in Bezug auf die Achsenlinien.

s_1 ist $= \frac{r_1^2 + k_1^2}{r_1}$;

μ_1 die Winkelgeschwindigkeit der Räder, in dem Sinne wie u (§. 7) genommen, und $U_1 = \frac{k_1^2}{g} \cdot \frac{du_1}{dt}$;

b die Länge des Arms oder Halbmessers ce (Fig. 5) der Kurbel, mittels welcher die, gewöhnlich durch eine Dampfmaschine erzeugte Triebkraft des Zugwagens an den Rädern arbeitet;

l die Länge der mit der Kolbenstange ao des Dampfcylinders verbundenen Kurbelstange ae;

θ der Winkel, welchen der Kurbel-Arm ce in dem der Zeit t entsprechenden Augenblicke der Bewegung beschrieben hat. Er wird, welche Lage der Kurbel-Arm im Anfange der Bewegung oder für $t = 0$ übrigens gehabt haben mag, von der (in der verticalen Ebene, die der Voraussetzung nach die Richtungen der einwirkenden Kräfte und Widerstände einschliesst,) durch die Achsenlinie des einen oder des andern Treibräderpaares, parallel mit der Bahnlinie gelegten Geraden cn an gerechnet; so dass bei der Bewegung des Dampfwagens vorwärts, der Kurbel-Arm für $\theta = 0$, und so oft θ ein Vielfaches von $360°$ ist, hinter der Achsenlinie, für $\theta = 180°$ vor der Achsenlinie, in diese Parallele fällt, und für $\theta = 90°$ senkrecht über, für $\theta = 270°$ senkrecht unter derselben steht. Nach dieser Bedeutung von θ und der von μ_1 ist $\mu_1 = \frac{d\theta}{dt}$.

Der Druck auf den Kolben des Dampfcylinders, welcher als Triebkraft auf die Räder wirkt und dessen mittlere Richtung mit der Parallelen cn zusammenfällt, ändert sich, abgesehen von der wechselnden Länge des Hebel-Armes, an dem er arbeitet, mit dem Stande des Kolbens im Cylinder, oder mit der Lage des Kurbel-Armes ce gegen die Parallele cn. Das Gesetz, nach welchem diese Aenderung sich richtet und welches von den den Ein- und Austritt des Dampfes im Cylinder regelnden Einrichtungen abhangt, wird, obgleich es nicht allgemein näher angegeben werden kann, hier als bekannt vorausgesetzt (§.85). Es bezeichne T jenen Druck, wie er in demjenigen Augenblicke irgend eines Rad-Umlaufes Statt hat, in welchem der Kurbel-Arm senkrecht über der Parallelen cn sich befindet, und $F\theta$ eine Function des Winkels θ, welche jenes Gesetz ausdrückt und welche für $\theta = 90°$ gleich 1 wird. Hiernach kann für jeden Werth von θ der genannte

Druck gleich $T.F\theta$ gesetzt werden; wobei noch zu bemerken ist, dass unter eben diesem Druck der wirksame Druck auf den Kolben, d. h. der Ueberschuss zu verstehen ist, um welchen der Druck auf die bei der Bewegung des Kolbens nachfolgende Fläche desselben denjenigen übertrifft, welchen die bei dieser Bewegung vorausgehende Fläche des Kolbens etwa erleidet.

Bei der dem Winkel θ entsprechenden schiefen Lage der Kurbelstange fällt von dem auf den Kolben wirkenden Druck $T.F\theta$, der sich nach der Richtung ae_1 dieser Stange und nach der auf der Parallelen cn senkrechten Richtung ad zerlegt, auf die erstere Richtung ein Theil $= \frac{T.F\theta}{\cos eac}$, und von dem letzteren, auf den Kurbelgriff des Rades sich übertragenden Druck in die mit der Bahnlinie parallele Richtung ec_1 ein Theil $= \frac{T.F\theta}{\cos eac}\cos eac = T.F\theta$; in die auf der Bahnlinie senkrechte Richtung ek aber ein Theil$=\frac{T.F\theta}{\cos eac}\sin eac$, d. h.$= T.F\theta\frac{\frac{b}{l}\sin\theta}{\sqrt{(1-(\frac{b}{l}\sin\theta)^2)}}$, indem $\sin eac = \frac{b}{l}\sin\theta$ ist, so dass der letztere Theil des Drucks und der Winkel eac mit $\sin\theta$ zugleich Null und negativ werden.

Für irgend einen Werth des Winkels θ ist daher der mit der Bahnlinie parallele Theil der am Kurbelgriff des einen Treibrades arbeitenden Kraft der Maschine $= T.F\theta$, der auf der Bahnlinie senkrechte Theil derselben $= T.F\theta.\frac{\frac{b}{l}\sin\theta}{\sqrt{(1-(\frac{b}{l}\sin\theta)^2)}}$, wofür zur Abkürzung $T.F_1\theta$ gesetzt werden wird; und zwar hat (bei positiven Werthen) der erste Theil die Richtung nach vorn, der letzte Theil die Richtung nach unten; das Moment aber, mit welchem diese Kraft das Rad um die Achsenlinie zu drehen strebt, ist $= T.F\theta.b\sin\theta.\left(1-\frac{\frac{b}{l}\cos\theta}{\sqrt{(1-(\frac{b}{l}\sin\theta)^2)}}\right)$; wofür das Zeichen $T.F_2\theta$ gebraucht werden wird.

Alle diese Ausdrücke beziehen sich auf die Triebkraft des einen Cylinders; und da die Kraft des andern Cylinders an einem Kurbel-Arm arbeitet, welcher senkrecht auf dem erstern steht, so hat man zu $F\theta$, $F_1\theta$ und $F_2\theta$ je ein zweites, auf den andern Kurbel-Arm, welcher als der in der Bewegung vorausgehende angenommen wird, bezügliches Glied beizufügen, welches den Winkel $\theta + 90^\circ$ eben so enthält, wie das erste Glied den Winkel θ; was durch das an θ angehängte Zeichen $_+$, nämlich $F\theta_+$, $F_1\theta_+$, $F_2\theta_+$, angedeutet werden wird.

D ist der von dem einen Räderpaar, an welchem die Triebkraft der Maschine unmittelbar arbeitet, dem andern Räderpaar durch die Kuppelstangen mitgetheilte Druck oder Zug, dessen Richtung als stets parallel mit der Bahnlinie zu betrachten ist. Das Verhältniss, in welchem dieser Druck sich auf die beiden winkelrecht auf einander stehenden Kurbel-Arme eines Räderpaares vertheilt, wird durch die Zahl λ bezeichnet, so dass λD auf den in der Beweguug voraus-gehenden, $(1-\lambda)D$ auf den nachfolgenden Kurbel-Arm kommt.

Die Buchstaben E, F, G beziehen sich, in der für die Fuhrwerke in (§. 7 u. 27) festgesetzten Bedeutung, auf die Hinterräder, die Buchstaben mit Beistrich E_1, F_1, G_1 in derselben Bedeutung auf die Vorderräder.

Rollende Bewegung.

§. 57.

Der vierrädrige Dampfwagen ohne Tragräder begreift zwei verschiedene Systeme von festen Körpern in sich, von welchen der ganze Dampfwagen mit den Rädern das erste und die beiden gekuppelten Räderpaare zusammen das zweite bilden (§. 55). Um jedoch die in die Gleichungen eingehenden Unbekannten in möglichster Vollständigkeit zu finden, ist es nöthig, jedes Räderpaar für sich als ein besonderes System zu betrachten.

Wie bei den gewöhnlichen Fuhrwerken werden zur Construction der Gleichungen die Kräfte und Widerstände für jedes System nach der Axe der x und der darauf senkrechten Richtung zerlegt, und deren Momente für das erste System in Bezug auf den Berührungspunct zwischen dem Hinterrade und der Bahnlinie, und für jedes der beiden andern Systeme in Bezug auf die Axenlinie des Räderpaares genommen werden.

Die Achsen der Räder werden als an diesen fest, wie sie es gewöhnlich sind, und der gemeinschaftliche Schwerpunct jedes Räderpaares und seiner Achse wird als in die Axenlinie fallend (§. 6) vorausgesetzt.

Werden die Gleichungen der Bewegung im Uebrigen nach den Grundsätzen aufgestellt, welche in Bezug auf die Fuhrwerke (§. 8, 28) Anwendung fanden, und wird zunächst angenommen, die Kraft der Maschine arbeite unmittelbar an den Vorderrädern, oder die Kurbelstangen seien an diesen angebracht und die Hinterräder würden mittels der Kuppelstangen in Bewegung gesetzt, so ergeben sich folgende

(G.) *Gleichungen für die rollende Bewegung*

der vierrädrigen Dampfwagen (bei welcher Bewegung $r_1 u_1 = \frac{dx}{dt}$ oder $U_1 = (s_1 - r_1)X$ ist), für irgend einen Augenblick derselben:

$$1)\ -K\cos\beta - S + 4R_1 - (P_1 + 4Q_1)(\sin\alpha + X) = 0,$$
$$2)\ -K\sin\beta + 2(N + N_1) - (P_1 + 4Q_1)\cos\alpha = 0,$$
$$3)\ -n\cos\beta . K + cP_1 + (a\cos\alpha - 2r_1\sin\alpha)2Q_1 - a.2N_1 - mS - (hP_1 + 4s_1Q_1)X = 0,$$
$$4)\ 2E(G - \varphi_1) + D - 2Q_1(\sin\alpha + X) = 0,$$
$$5)\ -2E(1 + \varphi_1 G) + 2N - 2Q_1\cos\alpha = 0,$$
$$6)\ -\varphi_1\varrho_1 . 2E\sqrt{(1 + G^2)} + bD[\lambda\cos\theta + (1 - \lambda)\sin\theta] - 2Q_1(s_1 - r_1)X = 0,$$
$$7)\ 2E_1(G_1 - \varphi_1) + 4R_1 - D + T.F\theta_+ - 2Q_1(\sin\alpha + X) = 0,$$
$$8)\ -2E_1(1 + \varphi_1 G_1) + 2N_1 - T.F_1\theta_+ - 2Q_1\cos\alpha = 0,$$
$$9)\ -\varphi_1\varrho_1 . 2E_1\sqrt{(1 + G_1^2)} - 4r_1R_1 - bD[\lambda\cos\theta + (1 - \lambda)\sin\theta] + T.F_1\theta_+ - 2Q_1(s_1 - r_1)X = 0.$$

Diese neun Gleichungen dienen, für einen gegebenen Werth von λ (und K als bekannt vorausgesetzt), zur Bestimmung der neun Unbekannten X, R, D, N, N_1, E, E_1, G, G_1, und während die in die Rechnung eingehenden Umstände und Bedingungen nicht ausreichen, zugleich, um diese ebenfalls unbekannte Verhältnisszahl λ zu bestimmen.

Die beiden Kräfte $4R_1$ und D wirken gemeinschaftlich auf die beiden Räderpaare, so dass $4R_1 - D$ auf das vordere, D auf das hintere Räderpaar kommt.

Durch Addition der Gleichungen (4 u. 7, 5 u. 8, 6 u. 9) erhält man:

$$4)\ 2E(G - \varphi_1) + 2E_1(G_1 - \varphi_1) + 4R_1 + T.F\theta_+ - 4Q_1(\sin\alpha + X) = 0,$$
$$5)\ -2E(1 + \varphi_1 G) - 2E_1(1 + \varphi_1 G_1) + 2(N + N_1) - T.F_1\theta_+ - 4Q_1\cos\alpha = 0,$$
$$6)\ -2\varphi_1\varrho_1[E\sqrt{(1 + G^2)} + E_1\sqrt{(1 + G_1^2)}] - 4r_1R_1 + T.F_1\theta_+ - 4Q_1(s_1 - r_1)X = 0;$$

und diese drei Gleichungen sind, wie leicht erhellet, eben wie die Gleichungen (1, 2, 3), ohne Unterschied für die beiden Fälle gültig, es mögen die Vorderräder oder Hinterräder zunächst von der Treibkraft der Maschine angegriffen und in Bewegung gesetzt werden.

Wird nun ferner vorausgesetzt, F verhalte sich zu F_1, wie E zu E_1, oder G sei $= G_1$ (was im Allgemeinen darauf hinauskommt, den Werth der unbestimmten Zahl λ dieser Bedingung gemäss anzunehmen: eine Voraussetzung

die um so weniger einen wesentlichen Irrthum veranlassen kann, als bei Vernachlässigung des Widerstandes der Reibung an den Achsen, dessen Moment gegen das der Triebkraft im Ganzen genommen jedenfalls wenig beträchtlich ist, so dass die Entwickelung der Grössen E, E_1, F, F_1 zur Auflösung der Aufgabe gar nicht nöthig ist, oder als diese Grössen nur durch die Reibung an den Achsen auf die Bewegung Einfluss haben können), und setzt man zugleich $E+E_1=E_2$, $F+F_1=F_2$, $\frac{F_2}{E}=G_2$: so wird auch $G_2=G=G_1$ und die Gleichungen (4,5,6) vereinfachen sich auf:

$$(4)\quad +2E_2(G_2-\varphi_1)+4R_1+T.F\theta_+-4Q_1(\sin\alpha+X)\qquad=0,$$

$$(5)\quad -2E_2(1+\varphi_1G_2)+2(N+N_1)-T.F_1\theta_+-4Q_1\cos\alpha=0,$$

$$(6)\quad -\varphi_1\varrho_1.2E_2\sqrt{(1+G_2^2)}-4r_1R_1+T.F_2\theta_+-4Q_1(s_1-r_1)X=0.$$

Als Unbekannte der Aufgabe sind nunmehr die fünf Grössen X, R_1, $N+N_1$, E_2 und F_2 zu entwickeln; wozu die fünf Gleichungen (1, 2, 4, 5 u. 6) ausreichen, nach deren Entwickelung die Grösse N_1 aus (3) sich ergiebt.

§. 58.

Wird nach der Analogie der gewöhnlichen Räderfuhrwerke (§. 16), um die Gleichung (6) linear zu machen,

$$\frac{1+\varphi_1G_2}{\sqrt{(1+\varphi_1^2)}}\text{ statt }\sqrt{(1+G_2^2)},\text{ und zugleich }\frac{\varphi_1\varrho_1}{r_1\sqrt{(1+\varphi_1^2)}}=\mu_1,$$

so wie ferner

$$2E_2(G_2-\varphi_1)=Y_2\quad,\quad 2E_2(1+\varphi_1G_2)=Z_2,$$

$$\left(\text{wodurch }2E_2=\frac{Z_2-\varphi_1Y_2}{1+\varphi_1^2}\quad,\quad 2F_2=\frac{Y_2+\varphi_1Z_2}{1+\varphi_1^2}\quad,\quad G_2=\frac{Y_2+\varphi_1Z_2}{Z_2-\varphi_1Y_2}\text{ wird,}\right)$$

gesetzt, so erhält man aus den Gleichungen

$$(1\text{ u. }4.):\qquad Y_2=-K\cos\beta-S-T.F\theta_+-P_1(\sin\alpha+X),$$

$$(2\text{ u. }5):\qquad Z_2=+P_1\cos\alpha+K\sin\beta-T.F_1\theta_+,$$

$$(4\text{ u. }6.):\ Y_2-\mu_1Z_2=4Q_1\left(\sin\alpha+\frac{s_1}{r_1}X\right)-T\left(\frac{1}{r_1}.F_2\theta_++F\theta_+\right),$$

und hieraus:

$$X=\frac{T\left(\frac{1}{r_1}\cdot F_2\theta_++\mu_1F_1\theta_+\right)-(P_1+4Q_1)\sin\alpha-\mu_1P_1\cos\alpha-S-K(\cos\beta+\mu_1\sin\beta)}{P_1+4\frac{s_1}{r_1}Q_1},$$

$$-Y_2 = \frac{P_1\left(T\left(\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + F\theta_+\right) - \mu_1(P_1\cos\alpha + K\sin\beta - T.F_1\theta_+) + 4Q_1\left(\frac{s_1}{r_1}(K\cos\beta + P_1\sin\alpha + S + T.F\theta_+) - P_1\sin\alpha\right)\right.}{P_1 + 4\frac{s_1}{r_1}Q_1};$$

wozu $\quad Z_2 = P_1\cos\alpha + K\sin\beta - T.F_1\theta_+,$

und aus (6): $4R_1 = T\left(\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + \mu_1.F_1\theta_+\right) - \mu_1(P_1\cos\alpha + K\sin\beta) - 4Q_1\left(\frac{s_1}{r_1} - 1\right)X,$

aus (5) $2(N+N_1) = (P_1 + 4Q_1)\cos\alpha + K\sin\beta$

kommt.

Diese Ausdrücke, so wie die der Grössen N und N_1, einzeln genommen, so wie sie aus der Gleichung (3) folgen, genügen, vermöge der auch hier anwendbaren Erörterungen (§. 13), unter den Voraussetzungen, dass $G = G_1$ und K bekannt sei, den Gleichungen (G) vollkommen, wenn man an die Stelle von $\sqrt{(1+\varphi_1^2)}$ im Exponenten $\mu_1 = \frac{\varphi_1\varrho_1}{r_1\sqrt{(1+\varphi_1^2)}}$

die Wurzelgrösse $= \dfrac{-\frac{\varphi_1\varrho_1}{r_1}\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{C}_1\sqrt{\left((1+\varphi_1^2)(\mathfrak{B}_1^2 + \mathfrak{C}_1^2) - \left(\frac{\varphi_1\varrho_1}{r_1}\right)^2\right)}}{\mathfrak{B}_1^2 + \mathfrak{C}_1^2}$,

setzt, in welcher

$$\mathfrak{B}_1 = -\frac{P_1}{\mathfrak{A}_1}\left[T\left(\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + F\theta_+\right) - 4Q_1\sin\alpha\right]$$
$$-4\frac{s_1}{r_1}\cdot\frac{Q_1}{\mathfrak{A}_1}(K\cos\beta + P_1\sin\alpha + S + T.F\theta_+),$$

$$\mathfrak{C}_1 = 1 + 4\frac{s_1}{r_1}\cdot\frac{Q_1}{P_1} \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{A}_1 = P_1(P_1\cos\alpha + K\sin\beta - T.F_1\theta_+)$$

ist.

Zugleich mag noch bemerkt werden, dass, wenn näherungsweise

$$\sqrt{(1+G^2)} = \frac{1+\varphi_1 G}{\sqrt{(1+\varphi_1^2)}} \quad , \quad \sqrt{(1+G_1^2)} = \frac{1+\varphi_1 G_1}{\sqrt{(1+\varphi_1^2)}}$$

angenommen (wird unter welchen Annahmen die Voraussetzung $G = G_1$ zur Auflösung der Gleichungen (G) nicht nöthig ist) in den beiden Fällen, es mögen die Vorderräder oder die Hinterräder die zunächst von der Triebkraft angegriffenen sein, für die Grössen X, $4R_1$, N, N_1 dieselben Ausdrücke, wie sie oben entwickelt sind, gefunden werden und nur die Ausdrücke der Unbekannten $2E(G-\varphi_1)$, $2E_1(G_1-\varphi_1)$ und D die Verhältnisszahl λ in sich aufnehmen; wogegen jene der übrigen Unbekannten $X, 4R_1, N, N_1$, $2E(1+\varphi_1 G)$, $2E_1(1+\varphi_1 G_1)$

als unabhängig von dieser Zahl sich ergeben, welche dann erst bei der Verbesserung jener Annahmen, die sich durch ein dem wiederholt gezeigten ähnliches Verfahren ausführen lässt, in die Ausdrücke der letzteren Unbekannten eingeht.

§. 59.

Um aber noch die Kraft V_1 zu finden, mit welcher der Dampfwagen den angehängten Wagenzug nach sich zieht, erhält man eine weitere Gleichung, wenn man den im vorigen Paragraphen gefundenen Ausdruck von X dem der rollenden Bewegung des Wagenzuges entsprechenden, wie er es sein muss, gleich setzt.

Dieser letztere Ausdruck ist, nach (§. 52), wenn der Rad-Effect-Exponent μ für alle Fuhrwerke des Zuges denselben Werth hat, und wenn der Winkel β, unter welchem die Zugkraft wirkt, entweder ebenfalls für alle diese Fuhrwerke gleich gross, oder auch bei den auf das vorderste folgenden Fuhrwerken gleich Null ist, wenn ferner unter $\{P\}$ die Summe aller zum Wagenzuge gehörigen Lasten, wie P, und eben so unter $\{P+4Q\}$ die Summe aller ihm zugehörigen Grössen wie $P+4Q$ u. s. w. verstanden wird:

$$X=\frac{K(\cos\beta+\mu\sin\beta)-\mu\{P\}\cos\alpha-\{P+4Q\}\sin\alpha}{\left\{P+4\frac{s}{r}Q\right\}},$$

und durch Gleichstellung dieser beiden Ausdrücke von X ergiebt sich, wenn überdiess der Kürze wegen $\{\mathfrak{P}\}$ statt $\mu\{P\}\cos\alpha+\{P+4Q\}\sin\alpha$ geschrieben wird:

$$K=\frac{\left\{P+4\frac{s}{r}Q\right\}\left(T\left(\frac{1}{r_1}\cdot F_2\theta_{+}+\mu_1 F_1\theta_{+}\right)-(P_1+4Q_1)\sin\alpha-\mu_1 P_1\cos\alpha-S\right)+\left(P_1+4\frac{s_1}{r_1}Q_1\right)\{\mathfrak{P}\}}{\left\{P+4\frac{s}{r}Q\right\}(\cos\beta+\mu_1\sin\beta)+\left(P_1+4\frac{s_1}{r_1}Q_1\right)(\cos\beta+\mu\sin\beta)},$$

und sodann

$$X=\frac{\left(T\left(\frac{1}{r_1}\cdot F_2\theta_{+}+\mu_1\cdot F_1\theta_{+}\right)-(P_1 4Q_1)\sin\alpha-\mu_1 P_1\cos\alpha-S\right)(\cos\beta+\mu\sin\beta)-\{\mathfrak{P}\}(\cos\beta+\mu_1\sin\beta)}{\left\{P+4\frac{s}{r}Q\right\}(\cos\beta+\mu_1\sin\beta)+\left(P_1+4\frac{s_1}{r_1}Q_1\right)(\cos\beta+\mu\sin\beta)}.$$

Nachdem auf solche Weise die Grösse K für $\mu_1=\frac{\varphi_1\varrho_1}{r_1\sqrt{(1+\varphi_1^2)}}$ entwickelt ist, kann die nach dem vorigen Paragraphen zur Ergänzung des Exponenten μ_1 an die Stelle von $\sqrt{(1+\varphi_1^2)}$ zu setzende Wurzelgrösse dazu dienen, den Grad der Genauigkeit des so genommenen Exponenten zu beurtheilen und, wenn es nöthig denselben, so wie eben dadurch die Grösse K selbst, auf dem früher angedeute-

ten Wege zu verbessern. Und zu gleichmässiger Ergänzung des Exponenten μ in K kann man (nach §. 32) die Ausdrücke

$$\mathfrak{B} = \frac{\{4Q\}}{\mathfrak{A}}\{P\}\sin\alpha + \frac{\{4\frac{s}{r}Q\}}{\mathfrak{A}}(K\cos\beta - \{P\}\sin\alpha),$$

$$\mathfrak{C} = 1 + \frac{\{4\frac{s}{r}Q\}}{\{P\}},$$

$$\mathfrak{A} = \{P\}.(\{P\}\cos\alpha - K\sin\beta)$$

anwenden.

Durch Elimination von K aus Y_2, Z_2 etc. lassen sich zwar die Grössen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ auf eine Form bringen, in welcher die Exponenten μ und μ_1 für sich, (wie beim vierrädrigen Fuhrwerk erster Art (§. 31, 32), ohne dass K dabei in die Rechnung eingeht, allmählig verbessert werden können; wegen der grössern Weitläufigkeit der Ausdrücke von $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ etc., in jener Form, übergehen wir hier jedoch die Darstellung derselben.

§. 60.

Werden die Gleichungen ((*G*) 1, 2, 3, 4, 5, 6), unter der Voraussetzung, dass die Beschleunigung der Bewegung oder die Grösse X, für einen bestimmten Werth des Winkels θ gleich Null sei, aufgelöset, wobei die Druckkraft T statt X in die Reihe der zu suchenden Grössen tritt, so ergiebt sich aus den abgeleiteten Gleichungen (§. 58):

$$T_1 = \frac{(P_1 + 4Q_1)\sin\alpha + \mu_1 P_1\cos\alpha + S + K(\cos\beta + \mu_1\sin\beta)}{\frac{1}{r_1}F_2\theta_+ + \mu_1 F_1\theta_+},$$

wenn T_1 den besondern Werth von T bedeutet, welchem $X = 0$ entspricht; ferner

$$-Y_2 = K\cos\beta + P_1\sin\alpha + S + F\theta_+ . T_1,$$

$$+Z_2 = P_1\cos\alpha + K\sin\beta - F_1\theta_+ . T_1;$$

womit zugleich $\quad +4R_1 = (P_1 + 4Q_1)\sin\alpha.\cos\beta + S,$

$$2(N + N_1) = (P_1 + 4Q_1)\cos\alpha + K\sin\beta,$$

und mit Hülfe von (3) auch N und N_1, einzeln genommen, entwickelt sind.

Der zu $X = 0$ gehörige Werth von K ist $= \frac{\{\mathfrak{P}\}}{\cos\beta + \mu.\sin\beta}$.

Bei der Ergänzung des Exponenten μ_1, welche sich, $G = G_1$ angenommen,

wie bei der Auflösung im vorigen Paragraphen bewerkstelligen lässt, muss man in der angegebenen Wurzelgrösse,

$$\mathfrak{B}_1 = -\frac{\frac{1}{r_1}F_2\theta_+ + F\theta_+}{\mathfrak{A}_1}(K\cos\beta + P_1 . \sin\alpha + S) - \frac{F\theta_+}{\mathfrak{A}_1}4Q_1\sin\alpha,$$

$$\mathfrak{C}_1 = +\frac{\frac{1}{r_1}F_2\theta_+}{\mathfrak{A}_1}(P_1\cos\alpha + K\sin\beta) - \frac{F_1\theta_+}{\mathfrak{A}_1}(K\cos\beta + (P_1 + 4Q_1)\sin\alpha + S),$$

$$\mathfrak{A}_1 = -F\theta_+ . (P_1\cos\alpha + K\sin\beta) - F_1\theta_+(K\cos\beta + P_1\sin\alpha + S)$$

setzen, und eben so, in Bezug auf den in K vorkommenden Exponenten μ, nach (§. 31):

$$\mathfrak{B} = \frac{\{4Q\}}{\mathfrak{A}}\sin\alpha . \cos\beta \quad , \quad \mathfrak{C} = 1 - \frac{\{4Q\}}{\mathfrak{A}}\sin\alpha . \sin\beta \quad , \quad \mathfrak{A} = \{P\}\cos(\alpha+\beta)$$

annehmen.

§. 61.

Bei der Auflösung im vorigen Paragraphen wurden für $X = 0$ die Grössen $4R_1$, N und N_1, daher auch der Reibungsquotient $\frac{4R_1}{2N+2N_1}$, als unabhängig von θ, gefunden, nicht aber die Druckkraft T_1, weil die Function $\frac{1}{r_1}F_2\theta_+ + \mu_1 F_1\theta_+$, wenn auch die beiden Kurbel-Arme, an denen die Triebkraft der Maschine arbeitet, winkelrecht auf einander stehen, im Allgemeinen noch den Winkel θ enthalten wird. Eine Gleichförmigkeit der Bewegung, wie sie in andern Fällen der Voraussetzung $X = 0$ zum Grunde liegt, und die Beständigkeit der Kraft T_1 können daher nicht eigentlich mit einander bestehen, sondern nur in einem etwas erweiterten Sinne kann der Begriff der Gleichförmigkeit hier Anwendung finden.

Man kann sich nämlich die Kraft $T\left(\frac{1}{r_1}F\theta_+ + \mu_1 F_1\theta_+\right)$, welche nach der relativen Grösse des Winkels θ im Kreise, sich ändert, durch eine andere Kraft ersetzt vorstellen, welche, am Umfange der Räder angebracht, einem solchen Wechsel nicht unterworfen und übrigens so beschaffen ist, dass die während eines Umlaufs der Räder durch sie hervorgebrachte Zu- oder Abnahme der Umdrehungsgeschwindigkeit nach jedem Umlaufe eben so gross ist, als durch die Wirkung der ersteren Kraft. Diese eingebildete Kraft, welche, auf die beiden Räderpaare gerechnet, mit $2V$ bezeichnet werden mag, ist *unveränderlich*, wenn die Umdrehungsgeschwindigkeit, von einem Umlaufe zum andern, entweder um

gleich viel zu- oder abnimmt, oder sich nicht verändert; und in diesem letzteren Falle kann die Bewegung als gleichförmig angesehen werden. Wenn dagegen der Unterschied, um welchen die Geschwindigkeit während eines ganzen Umlaufs zu- oder abnimmt, von einem Umlaufe zum andern nach irgend einem Gesetze sich ändert, so ist die Kraft $2V$ ebenfalls *veränderlich*, und daher als eine Function der Geschwindigkeit, oder des zurückgelegten Weges, oder der absoluten Grösse des Winkels θ zu betrachten.

Zu näherer Bestimmung der ersetzenden Kraft $2V$ führen folgende Erwägungen.

Die Gleichung $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = gX$ lässt sich, bei rollender Bewegung des Dampfwagens und des Wagenzuges, $\left(\text{wenn } \mu_1 = \frac{\varphi_1 \varrho_1}{r_1 \sqrt{(1+\varphi_1^2)}} \text{ genommen wird}\right)$, auf die Form

$$\text{(M.)} \qquad \frac{\partial u_1}{\partial t} = A \,.\, T\left(\frac{1}{r_1} . F_2\theta_+ + \mu_1 F_1 \theta_+\right) - B - Hu_1^2$$

bringen, wo A, B und H Grössen vorstellen, die von u_1, θ und t unabhängig sind, und das Glied Hu_1^2 auf den, dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionalen Luftwiderstand sich bezieht. Die Kraft T wird zwar im Allgemeinen mit u_1 sich ändern, kann jedoch bei der vorliegenden Frage ohne erheblichen Fehler als während eines Umlaufs der Räder sich gleich bleibend angenommen werden.

Mit $u_1 = \frac{\partial \theta}{\partial t}$ multiplicirt, geht diese Gleichung über in:

$$\text{(N.)} \quad u_1 \partial u_1 + (B + Hu_1^2)\partial\theta = A \,.\, T\left(\frac{1}{r_1} . F_2\theta_+ + \mu_1 F_1 \theta_+\right)\partial\theta.$$

Wird unter e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen, und unter ε irgend eine ganze Zahl verstanden, so ist das Integral der letzteren Gleichung, so genommen, dass $u_1 = u_\varepsilon$ ist, für $\theta = \varepsilon.2\pi$:

$$\text{(O.)} \; (B + Hu_1^2) . e^{2H\theta} = (B + Hu_\varepsilon^2) . e^{4\pi\varepsilon H} + 2HAT \int_{\theta \div 2\pi} e^{2H\theta}\left(\frac{1}{r_1} . F_2\theta_+ + \mu_1 F_1 \theta_+\right)\partial\theta;$$

und wenn die Kraft $2V$, welche als eine von θ unabhängige und, so wie T, während eines Räder-Umlaufs auch mit u_1 sich nicht verändernde Grösse vorausgesetzt wird, an die Stelle von $T\left(\frac{1}{r_1} . F_2\theta_+ + \mu_1 F_1 \theta_+\right)$ tritt, ist:

$$\text{(P.)} \qquad (B + Hu_1^2) . e^{2H\theta} = (B + Hu_\varepsilon^2) . e^{4\pi\varepsilon H} + 4HAV \int_{\theta \div 2\pi\varepsilon} e^{2H\theta} . \partial\theta.$$

Soll nun, der oben angegebenen Bedingung gemäss, die Geschwindigkeit

u_1 nach Vollendung eines Umlaufs, oder für $\theta = (\varepsilon + 1)2\pi$, gleich gross sein, die Umdrehung mag durch $2V$ oder durch $T\left(\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + \mu_1 F_1\theta_+\right)$ hervorgebracht werden, so muss

$$2HT\int_{2\pi(\varepsilon+1)\div 2\pi\varepsilon} e^{2H\theta}\left(\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + \mu_1 F_1\theta_+\right)\partial\theta = 2V.e^{4\pi\varepsilon H}.(e^{4\pi H}-1),$$

sein, woraus

$$2V = \frac{2H.e^{-4\pi\varepsilon H}}{e^{4\pi H}-1}.T\int_{2\pi(\varepsilon+1)\div 2\pi\varepsilon} e^{2H\theta}\left(\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + \mu_1 F_1\theta_+\right)\partial\theta \text{ folgt.}$$

Setzt man $\theta = 2\pi\varepsilon + \theta_1$ und erwägt, dass $F\theta = F\theta_1$ ist, oder nur von der relativen Grösse des Winkels θ im Kreise abhangt, so findet sich, dass die Zahl ε in diesem Ausdrucke von $2V$, wie es sein muss, wegfällt, also gleich Null angenommen werden kann. Man hat daher

$$2V = \frac{2H.T}{e^{4\pi H}-1}\int_{2\pi\div 0} e^{2H\theta}\left(\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + \mu_1 F_1\theta_+\right)\partial\theta;$$

und diese Kraft $2V$, welche für

$$H = 0 \text{ auf } \frac{T}{2\pi}\int_{2\pi\div 0}\left(\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + \mu_1 F_1\theta_+\right)\partial\theta \text{ zurückgeht,}$$

bringt nach jedem Umlaufe dieselbe Zunahme der Geschwindigkeit hervor, wie die Kraft $T\left(\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + \mu_1 F_1\theta_+\right)$; also ist in der Gleichung $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = gX$ der von θ unabhängige Coefficient $\frac{2H}{e^{4\pi H}-1}\int_{2\pi\div 0} e^{2H\theta}\left(\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + \mu_1 F_1\theta_+\right)\partial\theta$ mit der Function $\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + \mu_1 F_1\theta_+$ äquivalent.

Wird demnach, wie im Folgenden geschehen wird, in den aus den Gleichungen (G) abgeleiteten Ausdrücken von X, K, $4R_1$, N und N_1 (§. 58 u. 59) jener Coefficient statt der letzteren Function, oder $2V$ statt $T\left(\frac{1}{r_1}F_2\theta_+ + \mu_1 F_1\theta_+\right)$ gesetzt, so werden die Ausdrücke dadurch von derjenigen Veränderlichkeit, welche auf die während des Umlaufs der Räder wechselnde relative Lage der Kurbel-Arme Bezug hat, befreit, und können sodann, nachdem der Kraft $2V$, oder T, derjenige Werth gegeben ist, welcher X zu Null macht, als der *gleichförmigen* Bewegung angehörig betrachtet werden.

Bedeutet $2V_1$ diesen Werth von $2V$, so ist

$$2V_1 = \{\mathfrak{P}\}\cdot\frac{\cos\beta+\mu\sin\beta}{\cos\beta+\mu\sin\beta} + (P_1 + 4Q_1)\sin\alpha + \mu_1 P_1\cos\alpha + S\,.$$

Hiebei ist indessen zu bemerken, dass die Kraft $2V$, obgleich der Winkel θ für sich in ihrem Ausdruck nicht enthalten ist, sofern sie, so wie T, im Allgemeinen mit der Geschwindigkeit μ_1 sich ändert, als eine Function von μ_1, und also auch als eine implicite Function der absoluten Grösse des Winkels θ zu betrachten ist.

§. 62.

Wird die Triebkraft $2V$ in die beiden Theile $2V_1 + 2v_1$ getheilt, von welchen $2V_1$ auf die gleichförmige Bewegung mit einer bestimmten Geschwindigkeit sich bezieht (wegen des Luftwiderstandes ist die zur gleichförmigen Bewegung nöthige Kraft bei dem Dampfwagen nicht, wie beim gewöhnlichen Räderfuhrwerk, bei welchem jener Widerstand unberücksichtigt geblieben ist, unabhängig von der Geschwindigkeit der Bewegung,), und werden die in den (§§. 58 u. 59) entwickelten Grössen ebenfalls in die entsprechenden Theile zerlegt (§. 15), so findet man, indem man die dem Theile $2V_1$ zugehörigen Theile dieser Grössen zur Unterscheidung in eckige Klammern einschliesst und den Nenner von X und K in (59), nämlich

$$\left\{P + 4\frac{s}{r}Q\right\}(\cos\beta + \mu_1\sin\beta) + \left(P_1 + 4\frac{s_1}{r_1}Q_1\right)\cos\beta + \mu\sin\beta)$$

der Kürze wegen mit $\mathfrak{R}$ bezeichnet:

$$X = (\cos\beta + \mu\sin\beta)\,.\,\frac{2v_1}{\mathfrak{R}}\,,$$

$$K = [K] + \frac{dK}{d(2V)}2v_1 = \frac{\{\mathfrak{P}\}}{\cos\beta+\mu\sin\beta} + \left\{P + 4\frac{s}{r}Q\right\}\frac{2v_1}{\mathfrak{R}}\,,$$

$$4R_1 = [4R_1] + \frac{d(4R_1)}{d(2V)}2v_1 = (P_1 + 4Q_1)\sin\alpha + S + \frac{\{\mathfrak{P}\}\cos\beta}{\cos\beta+\mu\sin\beta}$$
$$+ \left(\left\{P + 4\frac{s}{r}Q\right\}\cos\beta + (P_1 + 4Q_1)\cos\beta + \mu\sin\beta)\right)\frac{2v_1}{\mathfrak{R}}\,,$$

$$2(N + N_1) = [2N + 2N_1] + \frac{d(2N + 2N_1)}{d(2V)}2v_1$$
$$= (P_1 + 4Q_1)\cos\alpha + \frac{\{\mathfrak{P}\}\sin\beta}{\cos\beta+\mu\sin\beta} + \left\{P + 4\frac{s}{r}Q\right\}\sin\beta\frac{2v_1}{\mathfrak{R}}\,.$$

Diese Ausdrücke zeigen, dass die Beschleunigung der Bewegung der Grösse $2v_1$ proportional ist, und dass die Grössen K, $4R_1$, und bei positivem Werthe

des Winkels β, auch $2(N+N_1)$, mit der Beschleunigung zunehmen; so dass diese Zunahmen sich verhalten wie die Beschleunigungen.

Wird zu weiterer Abkürzung

$$\text{der Reibungsquotient } \frac{2(N+N_1)}{4R_1} \text{ mit } R_q$$

$$\mathfrak{N}.\frac{d(4R_1)}{d(2V)} = \Big\{P+4\frac{s}{r}Q\Big\}\cos\beta + (P_1+4Q_1)(\cos\beta+\mu\sin\beta) \text{ mit } \mathfrak{Z},$$

$$\mathfrak{N}.\frac{d(2N+2N_1)}{d(2V)} = \Big\{P+4\frac{s}{r}Q\Big\}\sin\beta \text{ mit } \mathfrak{L}$$

bezeichnet, so ergiebt sich:

$$R_q = [R_q] + \frac{\mathfrak{Z}[2N+2N_1] - \mathfrak{L}[4R_1]}{\mathfrak{N}[2N+2N_1]}.2v_1;$$

welcher Ansdruck, da der Factor von $2v_1$ im zweiten Gliede wesentlich *positiv* ist, zeigt, dass die beschleunigte *rollende* Bewegung einen grössern Werth des Reibungscoefficienten f erfordert, als die gleichförmige, wenn sie nicht in theilweise *gleitende* Bewegung übergehen soll.

§. 63.

Wegen der vom Winkel α abhängigen Veränderung der gesuchten Grössen ist zuvörderst einleuchtend, dass die Kraft $2V_1$, so wie auch, für eine bestimmte Beschleunigung, die Kraft K, mit α zugleich wächst, oder abnimmt, die der Beschleunigung proportionale Grösse X aber für einen bestimmten Werth der Kraft $2V$ abnimmt, wenn α wächst, und umgekehrt.

In Bezug auf den Reibungsquotienten R_q ist für gleichförmige Bewegung:

$$\frac{d[R_q]}{d\alpha} = [2N+2N_1]^2 = [2N+2N_1]\frac{d[4R_1]}{d\alpha} - [4R_1]\frac{d[2N+2N_1]}{d\alpha},$$

und $\dfrac{d[4R_1]}{d\alpha} = (P_1+4Q_1)\cos\alpha + (\{P+4Q\}\cos\alpha - \mu\{P\}\sin\alpha)\dfrac{\cos\beta}{\cos\beta+\mu\sin\beta}$,

den Luftwiderstand S als unabhängig von α angenommen, ferner:

$$\frac{d(2N+2N_1)}{d} = -(P_1+4Q_1)\sin\alpha + (\{P+4Q\}\cos\alpha - \mu\{P\}\sin\alpha)\frac{\sin\beta}{\cos\beta+\mu\sin\beta};$$

daher $\dfrac{d[R_q]}{d\alpha}[2N+2N_1]^2 = (P_1+4Q_1)\Big(P_1+4Q_1+\dfrac{\{P+4Q\}\cos\beta+\mu(P)\sin\beta}{\cos\beta+\mu\sin\beta}\Big)$

$-S\dfrac{d[2N+2N_1]}{d\alpha}$ wesentlich positiv; der Reibungsquotient nimmt daher für gleichförmige rollende Bewegung mit α zugleich zu und ab.

Für beschleunigte Bewegung hat man

$$\frac{d(4R_1)}{d\alpha} = \frac{d[4R_1]}{d\alpha} + \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{R}} \cdot \frac{d(2v_1)}{d\alpha},$$

$$\frac{d(2N+2N_1)}{d\alpha} = \frac{d[2N+2N_1]}{a\alpha} + \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{R}} \cdot \frac{d(2v_1)}{d\alpha},$$

und $\frac{dR_q}{d\alpha}(2N+2N_1)^2$, oder $(2N+2N_1)\frac{d(4R_1)}{d\alpha} - 4R_1 \cdot \frac{d(2N+2N_1)}{d\alpha}$, findet sich

$$= \frac{d[R_q]}{d\alpha}[2N+2N_1]^2 + \frac{2v_1}{\mathfrak{R}}\left(\mathfrak{L}.\frac{d[4R_1]}{d\alpha} - \mathfrak{J}.\frac{d[2N+2N_1]}{d\alpha}\right) + \frac{d(2v_1)}{d\alpha}\frac{\mathfrak{J}[2N+2N_1]-\mathfrak{L}[4R_1]}{\mathfrak{R}};$$

wobei sich zwei verschiedene Fälle unterscheiden lassen:

Erstlich. Entweder kann man die Beschleunigung als *bestimmt*, oder v_1 $(= V - V_1)$ als nach α *unveränderlich* annehmen, so dass V um eben so viel als V_1 mit α zugleich wächst und abnimmt. In diesem Falle ist $\frac{d(2v_1)}{d\alpha}$ gleich Null; das dritte Glied des letzteren Ausdrucks fällt weg, und da das zweite Glied, in welchem für den Factor

$$\mathfrak{L}.\frac{d[4R_1]}{d\alpha} - \mathfrak{J}.\frac{d[2N+2N_1]}{d\alpha} = (P_1 + 4Q_1 \cdot \left(\left\{P + 4\frac{\varrho}{r}Q\right\}\sin(\alpha+\beta)\right.$$

$$\left. + (P_1 + 4Q_1)\sin\alpha(\cos\beta + \mu\sin\beta - (\{P+4Q\}\cos\alpha - \mu\,\{P\}\sin\alpha)\sin\beta\right)$$

gefunden wird, gegen das erste Glied jedenfalls verhältnissmässig klein ist, so folgt, dass *für eine bestimmte Grösse der Beschleunigung*, bei an- und absteigender Bewegung, $\frac{dR_q}{d\alpha}$ positiv ist und der Reibungsquotient mit dem Reibungswinkel α zugleich zu- und abnimmt.

Zweitens. Oder man kann die Treibkraft $2V$ als nach α beständig annehmen, so dass v_1 kleiner wird, wenn α wächst, oder dass $\frac{d(2v_1)}{d\alpha} = -\frac{d(2V_1)}{d\alpha}$ und folglich wesentlich negativ ist. In diesem Falle hat man

$$\frac{dR_q}{d\alpha}(2N+2N_1)^2 = \frac{d[R_q]}{d\alpha}[2N+2N_1]^2 + \frac{2V-2V_1}{\mathfrak{R}}\left(\mathfrak{L}.\frac{d[4R_1]}{d\alpha} - \mathfrak{J}.\frac{d[2N+2N_1]}{d\alpha}\right)$$

$$- \frac{\mathfrak{J}[2N+2N_1]-\mathfrak{L}[4R_1]}{\mathfrak{R}}.\frac{d(2V_1)}{d\alpha},$$

oder, da $\quad 2V_1 = [4R_1] + \mu_1[2N+2N_1] - \mu_1 . 4Q\cos\alpha,$

$$\frac{d(2V_1)}{d\alpha} = \frac{d[4R_1]}{d\alpha} + \mu_1 . \frac{d[2N+2N_1]}{d\alpha} + \mu_1 . 4Q_1\sin\alpha \text{ ist:}$$

$$\frac{dR_q}{d\alpha}(2N+2N_1)^2 = \frac{d[R_q]}{d\alpha}[2N+2N_1]^2\left(1-\frac{\mathfrak{J}+\mu_1\mathfrak{L}}{\mathfrak{R}}\right)+\frac{2V+\mu_1 4Q_1\cos\alpha}{\mathfrak{R}}\left(\mathfrak{L}.\frac{d[4R_1]}{d\alpha}-\mathfrak{J}\frac{d[2N+2N_1]}{d\alpha}\right)$$
$$-\mu_1.\frac{4Q_1}{\mathfrak{R}}\sin\alpha(\mathfrak{J}[2N+2N_1]-\mathfrak{L}[4R_1]);$$

wo $1-\frac{\mathfrak{J}+\mu.\mathfrak{L}}{\mathfrak{R}} \pm \left(\frac{s_1}{r_1}-1\right)\frac{4Q_1}{\mathfrak{R}}(\cos\beta+\mu\sin\beta)$ ist und die Glieder mit dem Factor $\mu_1.4Q$ bei Beurtheilung des Vorzeichens von $\frac{dR_q}{d\alpha}$ ausser Acht bleiben können, weil sie sich nahezu gegenseitig aufheben. Denn es ist

$$[4R_1]\sin\alpha+\frac{d[4R_1]}{d\alpha}\cos\alpha = S\sin\alpha+P_1+4Q_1+\{P+4Q\}.\frac{\cos\beta}{\cos\beta+\mu\sin\beta},$$
$$[2N+2N_1]\sin\alpha+\frac{d[2N+2N_1]}{d\alpha}\cos\alpha = \{P+4Q\}.\frac{\sin\beta}{\cos\beta+\mu\sin\beta} \quad \text{und}$$

$$\frac{\mu_1.4Q_1}{\mathfrak{R}}\left[\mathfrak{L}.\left([4R_1]\sin\alpha+\frac{d[4R_1]}{d\alpha}\cos\alpha\right)-\mathfrak{J}\left([2N+2N_1]\sin\alpha+\frac{d[2N+2N_1]}{d\alpha}\cos\alpha\right)\right]$$
$$=\frac{\mu_1.4Q}{\mathfrak{R}}\sin\beta\left(S\sin\alpha\left\{P+4\frac{s}{r}Q\right\}+\left\{\left(\frac{s}{r}-1\right)4Q\right\}(P_1+4Q_1)\right).$$

Für den Zweck dieser Beurtheilung genügt es daher,

$$\frac{dR_q}{d\alpha}(2N+2N_1)^2=\frac{4Q_1}{\mathfrak{R}}\left(\frac{s_1}{r_1}-1\right)(\cos\beta+\mu\sin\beta)\frac{d[R_q]}{d\alpha}[2N+2N_1]^2+\frac{2V}{\mathfrak{R}}\left(\mathfrak{L}.\frac{d[4R_1]}{d\alpha}-\mathfrak{J}.\frac{d[2N+2N_1]}{d\alpha}\right)$$

zu setzen, und da der Factor $\mathfrak{L}\frac{\partial[4R_1]}{\partial\alpha}-\mathfrak{J}\frac{\partial[2N+2N_1]}{\partial\alpha}$, dessen entwickelter Ausdruck unter (1) angegeben ist, wenn der Winkel β wie gewöhnlich sehr klein ist, bei positivem α als positiv, und bei negativem α als negativ gelten kann, so lässt sich schliessen, dass *für einen bestimmten Werth der Kraft* $2V$, bei positiven Werthen des Winkels α, oder beim *Ansteigen*, $\frac{\partial R_q}{\partial\alpha}$, als positiv, oder der zur beschleunigten rollenden Bewegung gehörige Reibungsquotient als mit α zugleich zu- und abnehmend zu betrachten, bei *absteigender* Bewegung dagegen, nach Massgabe der relativen Werthe der verschiedenen gegebenen Grössen, insbesondere der Kraft $2V$, die wiewohl entfernte Möglichkeit des umgekehrten Falles vorhanden ist; nämlich, dass dieser Quotient, welcher bei stärker werdender Neigung der Bahn abgenommen hat, wieder zunimmt, wenn der negative Werth des Winkels α ein gewisses Mass überschreitet.

§. 64.

Die zur gleichförmigen rollenden Bewegung des mit dem Wagenzuge verbundenen Dampfwagens erforderliche Triebkraft $2V_1$, welche abnimmt, wenn der Winkel α kleiner wird (§. 63), kann für negative Werthe von α Null und negativ werden; und denjenigen Neigungswinkel α, unter welchem der Dampfwagen durch die Wirkung der Schwerkraft allein, ohne der Beihülfe der eignen Triebkraft zu bedürfen, mit einer bestimmten, beständigen Geschwindigkeit sich rollend abwärts bewegt, giebt die Gleichung $2V_1 = 0$, welche, wenn $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ von α unabhängige Grössen ausdrücken, die Form

$$(\sigma.) \qquad \mathfrak{Q}\cos\alpha_1 + \mathfrak{R}\sin\alpha_1 + \mathfrak{S} = 0$$

annimmt, und aus welcher, wenn zugleich $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{R}} = \text{tang}\,\delta$ gesetzt wird, $\sin(\alpha_1 + \delta) = -\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{R}}\cos\delta$ folgt.

Für $\alpha = \alpha_1$ ist $2V = 2v_1$; und wird der negative Winkel α kleiner als α_1, d. h., vom Vorzeichen abgesehen, α grösser als α_1, so wird auch $2V_1$ negativ und $2v_1$ grösser als $2V$. Der Dampfwagen bedarf, indem er in die Verhältnisse der gewöhnlichen Räderfuhrwerke tritt, der Triebkraft der Maschine zur beschleunigten Bewegung nicht mehr, und aus der Gleichung $2V_1 + 2v_1 = 0$ wird für einen solchen Neigungswinkel die Beschleunigung, mit der er ohne Zuthun dieser Triebkraft abwärts rollt, oder auch für eine bestimmte solche Beschleunigung, der entsprechende Werth des Winkels α gefunden.

Bei abnehmendem α wird mit $2V_1$ zugleich auch $[4R_1]$, (das Reibungs-Erforderniss zur gleichförmigen rollenden Bewegung) kleiner, und da für $\mu_1 = 0$ die Kraft $2V_1$ in $[4R_1]$ übergeht (§. 61, 62), so gilt die Gleichung (σ), wenn in $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ der Exponent μ_1 gleich Null gesetzt wird, auch für $[4R_1] = 0$. Bezeichnet $\alpha_{\prime\prime}$ den Werth des Winkels α, welcher $[4R_1]$ zu Null macht, so ist $\alpha_{\prime\prime}$ ebenfalls negativ, wie $\alpha_\prime$; aber $\alpha_{\prime\prime}$, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen genommen, ist noch etwas kleiner als $\alpha_\prime$, oder für $\alpha = \alpha_{\prime\prime}$ ist $2V_1$ noch grösser als Null, nämlich $= \mu_1\left(P_1\cos\alpha_{\prime\prime} + (\{P + 4Q\}\sin\alpha_{\prime\prime} + \mu\{P\}\cos\alpha_{\prime\prime}).\frac{\sin\beta}{\cos\beta + \mu\sin\beta}\right)$. Für $\alpha = \alpha_{\prime\prime}$ und $2V = 2V_1$ ist demnach die Bewegung abwärts von selbst rollend, wenn auch keine Reibung zwischen den Rädern und der Bahnfläche Statt findet; und ist die Bahn noch stärker als unter dem Winkel $\alpha_{\prime\prime}$ geneigt, so wird das

Reibungs-Erforderniss $[4R_1]$ zur gleichförmigen rollenden Bewegung abwärts negativ, oder der Widerstand $[4R_1]$ nimmt die Richtung an, welche derjenigen der fortschreitenden Bewegung entgegengesetzt ist, und wirkt nicht mehr auf Beschleunigung, sondern auf Verzögerung der Bewegung.

Die Gleichung $4R_1 = [4R_1] + \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{N}} 2c_1$ (§. 62) zeigt, dass das Reibungs-Erforderniss zur rollenden Umdrehung der Treibräder für beschleunigte Bewegung grösser, für verzögerte kleiner ist, als für gleichförmige Bewegung, und aus der Gleichung

$$[4R_1] + \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{N}}(2V - 2V_1) = 0,$$

welche ebenfalls die Form der Gleichung (σ) hat, ergiebt sich, bei gegebener Triebkraft $2V$, der Winkel α, für welchen, und (bei gegebenem Neigungswinkel) die Grösse der Triebkraft $2V$, für welche das Reibungs-Erforderniss verschwindet und vom Positiven zum Negativen übergeht. Ist $2V_0$ diese Grösse, so findet sich

$$2V_0 = \mu_1\Big(P_1\cos\alpha + \{\mathfrak{P}\}\frac{\sin\beta}{\cos\beta+\mu\sin\beta}\Big)$$

$$-\frac{\mathfrak{N}-\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}}\Big(\{\mathfrak{P}\}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\beta+\mu\sin\beta} + (P_1+4Q_1)\sin\alpha + S\Big),$$

und da

$$\frac{d(2V_0)}{d\alpha} = -\mu_1\Big(P_1\sin\alpha - \frac{d\{\mathfrak{P}\}}{d\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta+\mu\cos\beta}\Big)$$

$$-\frac{\mathfrak{N}-\mathfrak{J}}{\mathfrak{N}}\cdot\Big(\frac{d\{\mathfrak{P}\}}{d\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\beta+\mu\sin\beta} + (P_1+4Q_1)\cos\alpha\Big),$$

(wo $\frac{d\{\mathfrak{P}\}}{d\alpha} = \{P+4Q\}\cos\alpha - \mu\{P\}\sin\alpha$ ist (§. 59)), als wesentlich negativ gelten kann, so nimmt $2V_0$ ab, während α zunimmt; und umgekehrt. Für $\alpha = 0$ ist $2V_0 = \mu_1\Big(P_1 + \mu\{P\}\frac{\sin\beta}{\cos\beta+\mu\sin\beta}\Big) - \frac{\mathfrak{N}-\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}}\Big(\mu\{P\}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\beta+\mu\sin\beta} + S\Big)$.

Mit $4R_1$ geht zugleich auch der Reibungsquotient R_q, durch Null, vom Positiven zum Negativen über, weil der Druck $(2N+N_1)$, welchen der Dampfwagen durch die Treibräder auf die Bahn ausübt, weder Null noch negativ werden kann, und es erhellet aus diesen Erörterungen, dass im Allgemeinen sowohl der Reibungsquotient R_q, als das Reibungs-Erforderniss $4R_1$, kleiner ist für negative als für positive Werthe von α, oder dass in der Bewegung abwärts und auf wage-

rechter Bahn weniger leicht ein Gleiten der Treibräder eintreten kann als bei ansteigender Bewegung.

Die Reibung, welche zwischen dem Umfange der Treibräder und der Oberfläche der Bahn Statt findet, oder finden kann, ist gleichsam als ein Vorrath von Kraft oder Widerstand anzusehen, von welchem immer und überall gerade nur so viel zur Anwendung kommt, als die rollende Bewegung eben erfordert, und welcher bei ansteigender Bewegung und auf wagerechter Bahn allein die, die fortschreitende Bewegung erzeugende Kraft abgiebt, in der Bewegung abwärts dagegen, nach der Grösse des Neigungswinkels, zur Mässigung der Geschwindigkeit dient, welche durch die Wirkung der Schwere hervorgebracht wird. Wenn dieser Vorrath zur Hervorbringung der rollenden Bewegung nicht ausreicht, oder wenn der Reibungsquotient, ohne Rücksicht auf sein Vorzeichen genommen, grösser ist als der Coefficient der wirklich vorhandenen Reibung, so muss gleitende Bewegung eintreten; ein etwa sich ergebendes negatives Vorzeichen des Reibungsquotienten aber kann sich nur auf die Richtung beziehen, nach welcher die Reibung wirken muss, wenn die Räder rollend sich bewegen sollen.

§. 65.

Soll der Dampfwagen aus dem Zustande der Ruhe in Bewegung gesetzt werden, so muss die Kraft $2V$, mit der er arbeitet, in jedem Augenblicke der beginnenden Bewegung grösser sein als die, der Geschwindigkeit, mit der er sich in diesem Augenblicke bewegt, entsprechende Kraft $2V_1$; bis zu dem Zeitpuncte, in welchem er die Geschwindigkeit, die er gleichmässig beibehalten soll, erreicht hat.

Die Gleichung $\frac{d^2x}{dt^2} = gX$ kann, nachdem in ihr für X der entwickelte Ausdruck dieser Grösse (§. 59) gesetzt und der Winkel θ auf dem in (§. 61) gezeigten Wege aus ihr entfernt ist, entweder in Form einer Gleichung zwischen x und t, oder in der (§. 61) angezeigten Form einer Gleichung zwischen u_1 und t (indem man der Kraft T den als bekannt vorausgesetzten beständigen oder nach irgend einem Gesetze veränderlichen Werth derselben giebt) durch Integration dazu dienen, die fortschreitende Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$, oder die Winkelgeschwindigkeit u_1, welche der Dampfwagen bei beschleunigter Bewegung nach Verfluss irgend einer Zeit t erlangt, so wie den Weg x, den er in dieser Zeit zurücklegt, zu berechnen. (Vergl. §§. 89 – 92.)

Der in den Gleichungen vorkommende Luftwiderstand S ist als eine Function der Geschwindigkeit auszudrücken, für welche man, in der Voraussetzung eines ruhigen, windstillen Zustandes der Atmosphäre, die Function $\frac{\varkappa \Delta \Sigma}{g} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ setzen kann, in welcher die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt} = r_1 u_1$ auf die Secunde als Zeit-Einheit zu beziehen ist und wo ferner

$\varkappa$ einen numerischen Coefficienten, welcher gewöhnlich $= 0,6$ angenommen wird,

Δ die Dichtigkeit der Luft, nämlich das Gewicht einer körperlichen Raum-Einheit derselben und

Σ eine Flächengrösse bedeutet, welche von der Ausdehnung und Gestalt der bei der Bewegung gegen die Luft anstossenden Flächentheile des Dampfwagens und des Wagenzuges, so wie von der Lage dieser Theile gegen die Richtung der Bewegung abhangt.

Auf die *Bewegung rückwärts*, bei welcher der angehängte Wagenzug vor dem Dampfwagen vorausgeht, finden die Gleichungen (G) und deren Ergebnisse gleichfalls Anwendung, wenn nur die Winkel α und β, in dem (§. 7) bestimmten Sinne, auf die Richtung der Bewegung rückwärts bezogen werden, und wenn überhaupt in dem Sinne, welcher den als bekannt angenommenen Grössen beigelegt ist, auf die Vorzeichen derselben gehörige Rücksicht genommen wird.

Der Reibungscoefficient f geht in die Gleichungen (G) und die aus ihnen abgeleiteten Ausdrücke nicht ein; eben so wenig gehen die Grössen s und s_1 in die, die gleichförmige rollende Bewegung betreffenden Ausdrücke ein. Daher hat die Grösse der Reibung zwischen den Rädern und der Bahn an sich, wenn sie nur überhaupt rollende Bewegung zulässt, auf diese Bewegung, so wie auch das Trägheitsmoment der Räder auf die gleichförmige rollende Bewegung, keinen Einfluss.

Und da ferner die Abstände c und h nur in den Ausdrücken von $2N$ und $2N_1$, einzeln genommen, nicht aber in dem Ausdrucke der Summe $2(N+N_1)$, noch in denen der übrigen gesuchten Grössen vorkommen, so ist die Lage des Schwerpuncts des Dampfwagens zwar auf das Verhältniss, nach welchem der Gewichtsdruck desselben auf die Stützpuncte der beiden Räderpaare sich vertheilt, aber nicht auf die Bewegung von Einfluss.

Gleitende Bewegung.

§. 66.

Die

(H.) *Gleichungen der theilweise gleitenden Bewegung*

des vierrädrigen Dampfwagens, welche Bewegung nach (§. 54) eintritt, sobald f kleiner als $\frac{2R}{N+N_1}$ ist, sind, wenn sogleich $G = G_1$ wie bei rollender Bewegung (§. 57) angenommen und $E + E_1 = E_2$, $F + F_1 = F_2$, $\frac{F_2}{E_2} = G_2$ gesetzt wird, für irgend einen Augenblick der Bewegung folgende:

$$1)\ -K\cos\beta - S + f(2N + 2N_1) - (P_1 + 4Q_1)(\sin\alpha + X) = 0,$$
$$2)\ -K.\sin\beta + 2(N + N_1) - (P_1 + 4Q_1)\cos\alpha = 0,$$
$$3)\ -n\cos\beta K + cP_1 + (e\cos\alpha - 2r_1\sin\alpha)2Q_1 - a.2N_1 - mS - (hP_1 + 4r_1Q_1)X - 4Q_1U_1 = 0,$$
$$4)\ 2E_2(G_2 - \varphi_1) + f(2N + 2N_2) + T.F\theta_+ - 4Q_1(\sin\alpha + X) = 0,$$
$$5)\ -2E_2(1 + \varphi_1 G_2) + 2(N + N_1) - T.F_1\theta_+ - 4Q_1\cos\alpha = 0,$$
$$6)\ -\varphi_1\varrho_1.2E_2\sqrt{(1 + G_2^2)} - fr_1(2N + 2N_1) + T.F_2\theta_+ - 4Q_1U_1 = 0.$$

Die aus diesen Gleichungen zu entwickelnden Unbekannten sind, indem K vorerst als bekannt vorausgesetzt wird, X, U_1, N, N_1, E_2 und G_2. Aus (1 u. 2) ergeben sich X und die Summe $2(N+N_1)$; sodann aus (4 u. 5) E_2 und G_2, und nach Entwickelung dieser Grössen U_1 aus der Gleichung (6), ohne dass hier die Entfernung der Wurzelgrösse nöthig ist; zuletzt N und N_1 einzeln aus (3 u. 2).

§. 67.

Aus den Gleichungen (H, 1 u. 2) wird zunächst, wenn auch G und G_1 unter sich verschieden sind:

$$X = f\cos\alpha - \sin\alpha - \frac{S + K(\cos\beta - f\sin\beta)}{P_1 + 4Q_1},$$

$$2(N + N_1) = (P_1 + 4Q_1)\cos\alpha + K\sin\beta \text{ gefunden.}$$

In Bezug auf den angehängten Wagenzug (dessen Bewegung als rollend vorausgesetzt) ist aber nach (§. 59):

$$X = \frac{K(\cos\beta + \mu\sin\beta) - [illegible]}{\left\{P + 4\frac{s}{r}Q\right\}}$$

und wird dieser Ausdruck von X dem vorigen gleich gesetzt, so erhält man:

$$K = \frac{\left\{P + 4\frac{s}{r}Q\right\}[(P + 4Q_1)(f\cos\alpha - \sin\alpha) - S] + (P_1 + 4Q_1)\,\{\mathfrak{P}\}}{\left\{P + 4\frac{s}{r}Q\right\}(\cos\beta - f\sin\beta) + (P_1 + 4Q_1)(\cos\beta + \mu\sin\beta)}.$$

daher

$$X = \frac{[(P_1 + 4Q_1)(f\cos\alpha - \sin\alpha) - S](\cos\beta + \mu\sin\beta) - \{\mathfrak{P}\}(\cos\beta + f\sin\beta)}{\left\{P + 4\frac{s}{r}Q\right\}(\cos\beta - f\sin\beta) + (P_1 + 4Q_1)(\cos\beta + \mu\sin\beta)}$$

Man sieht, dass diese Ausdrücke von X, K und $2(N+N_1)$ weder die Triebkraft T, noch den Winkel θ, noch die Grössen φ_1, ϱ_1 und r_1 enthalten; und da aus der Gleichung $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = gX$ durch Integration sowohl die irgend einem Zeitpuncte der Bewegung entsprechende fortschreitende Geschwindigkeit $\frac{\partial x}{\partial t}$, als der bis zu diesem Zeitpuncte zurückgelegte Weg x sich finden lassen, so erhellet, dass unter obigen Voraussetzungen, wenn nämlich die Bewegung der Treibräder theilweise gleitend und die der Wagenräder rollend ist, die fortschreitende Bewegung des Dampfwagens, also auch des Wagenzuges, von der Triebkraft T und dem absolut oder relativ genommenen Winkel θ, so wie auch von der Reibung zwischen den Achsen der Treibräder und ihren Lagern, und von den Halbmessern dieser Achsen und Räder gänzlich unabhängig ist.

Nachdem die Unbekannten E_2 und G_2 aus den Gleichungen (4 u. 5) entwickelt sind, ergiebt sich aus (5 u. 6):

$$\frac{4Q_1}{r_1}U = T\left(\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + f_1.F\theta_+\right) - f.2E_2(1+\varphi_1 G_2) - \frac{\varphi_1\varrho_1}{r_1}2E_2\sqrt{(1+G_2^2)} - 4Q_1 f\cos\alpha,$$

oder, wenn man wieder, wie in (§. 58), $\mu_1 = \frac{\varphi_1\varrho_1}{r_1\sqrt{(1+\varphi_1^2)}}$, und $\frac{1+\varphi_1 G_2}{\sqrt{(1+\varphi_1^2)}}$ statt $\sqrt{(1+G_2^2)}$ einführt:

$$\frac{4Q_1}{r_1}U_1 = T\left(\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + \mu_1.F_1\theta_+\right) - (f+\mu_1)(P_1\cos\alpha + K\sin\beta) - 4Q_1 f\cos\alpha;$$

wo man sich den Exponenten μ_1 durch das im Vorigen wiederholt angewendete Verfahren auf solche Weise ergänzt vorstellen kann, dass dieser Ausdruck von U_1 den Gleichungen (H) vollkommen genügt.

Die Gleichung $\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{g}{k_1^2}.U_1$, welche zur Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit u_1 dienen kann, mit welcher die Treibräder nach Verfluss irgend einer

Zeit t sich bewegen, lässt sich; nachdem die in $S = \frac{x\Delta\Sigma}{g}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2$ enthaltene fortschreitende Geschwindigkeit $\frac{\partial x}{\partial t}$ mittels des ersten Integrals der Gleichung $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = gX$ aus ihr entfernt ist, als eine Gleichung zwischen u_1, θ und t, oder, wegen $u_1 = \frac{\partial\theta}{\partial t}$, als eine Gleichung zwischen θ und t, betrachten. Auch kann man in dem Ausdrucke von U_1, wenn in ihm $\mu_1 = \frac{\varphi_1\varrho_1}{r_1\sqrt{(1+\varphi_1^2)}}$ beibehalten wird, um eine Gleichförmigkeit der umdrehenden Bewegung der Räder leichter vorstellbar zu machen, die Kraft $T\left(\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + \mu_1.F_1\theta_+\right)$, wie bei rollender Bewegung, durch eine andere Kraft ersetzt sich vorstellen, welche der auf die relative Lage der Kurbel-Arme bezüglichen Veränderlichkeit nicht unterworfen ist und die Umdrehungsgeschwindigkeit u_1 nach beendigtem Umlaufe eben so gross, wie die erstere Kraft giebt. Die so bestimmte, eingebildete Kraft muss beim Uebergehen der theilweise gleitenden in die rollende Bewegung mit der für die letztere Bewegung surrogirten Kraft $2V$ (§. 61) zusammenfallen. Eine weitere Ausführung einer solchen Substitution kann jedoch bei der theilweise gleitenden Bewegung, als minder wesentlich, übergangen werden.

§. 68.

Jedem Werthe der Triebkraft $2V = \frac{2H.T}{e^{4\pi H}-1}\int_{2\pi \div 0} e^{2H\theta}\left(\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + \mu_1.F_1\theta_+\right)\partial\theta$

(§. 62) entspricht ein bestimmter Werth des Reibungsquotienten R_q; und wird durch V_f derjenige Werth von V bezeichnet, welcher den Reibungsquotienten dem gegebenen Coefficienten f gleich macht, so wird aus

$$f = R_q = \frac{[4R_1] + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{N}}(2V - 2V_1)}{[2N + 2N_1] + \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{L}}(2V - 2V_1)}:$$

$$2V_f = 2V_1 + \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{Z} - f\mathfrak{L}}(f[2N + 2N_1] - [4R_1])$$

gefunden. Heisst dann T_f der zu $V = V_f$ gehörige Werth von T, so drückt, da R_q mit V oder T zugleich wächst und abnimmt (§. 62), $T \gtreqless T_f$, eben so

wie $f \overline{\overline{>}} R_q$, die Bedingung für das Entstehen der rollenden, und $T > T_f$, eben so wie $f < R_q$, die Bedingung für das Entstehen der theilweise gleitenden Bewegung aus, und es erhellet, dass die Gleichungen (H) und die aus ihnen abgeleiteten Ausdrücke nur auf Werthe von T, welche grösser oder eben so gross als T_f sind, Anwendung finden können, da der Coefficient f, wenn er grösser als R_q ist, nicht in seinem vollen Werthe wirksam wird (§. 54). Und für solche Werthe von T nimmt nach (§. 67) die Grösse U_1 mit T zugleich zu und ab, während die Grössen X, K und die Summe $N + N_1$ unverändert dieselben bleiben, T_f mag von T um einen grössern oder kleinern Unterschied übertroffen werden.

Aus $X = 0$ erhält man für gleichförmige fortschreitende Bewegung $f = [R_q]$ (§. 62), und wird dann zugleich $U_1 = 0$ gesetzt, so ergiebt sich $T = T_1$; wie bei gleichförmiger rollender Bewegung (§. 60). Eben so wird in Bezug auf beschleunigte Bewegung, wenn man den letzteren Ausdruck von X (§. 67) dem für rollende Bewegung (§. 59) gleich setzt, daraus, wie es sein muss, $f = R_q$ (§. 58, 62), und umgekehrt, gefunden. (Ist $f = [R_q]$, so kann F grösser sein als der Werth dieser Kraft, welcher $R_q = [R_q]$ macht, ohne dass X grösser als Null wird; aber solchem grösseren T entspricht ein grösseres R_q, und f kann dann ebenfalls grösser werden als $[R_q]$, ohne dass die Bewegung aufhört gleitend zu sein; womit sodann auch X grösser als Null wird.)

Die Grösse X nimmt mit f zugleich zu und ab, und erhält daher ihren grössten Werth durch $f = R_q$, oder ist grösser bei rollender als bei theilweise gleitender Bewegung; U_1 wächst dagegen, wenn f abnimmt, und umgekehrt, und ist also für einen bestimmten Werth von T kleiner bei rollender als bei theilweise gleitender Bewegung.

Zu weiterer Erläuterung der Verhältnisse der Bewegung, wie sie bei eintretenden Veränderungen der Grössen f und T sich ergeben, mögen noch folgende Bemerkungen hier Platz finden.

Man nehme an, die als bestimmt gedachten Werthe f und T des Reibungscoefficienten und der Triebkraft ständen in solcher Beziehung zu einander, dass f dem (der Kraft T entsprechenden) Reibungsquotienten für beschleunigte rollende Bewegung gleich, oder dass $U_1 = (s_1 - r_1)X$ ist. Nimmt nun die Triebkraft zu, während f, welches durch T in seinem vollen Werthe zur Geltung kommt, ungeändert bleibt, so bleibt auch X ungeändert, oder die Vermehrung von T ist unnütz für die Beschleunigung der fortschreitenden Bewegung, U_1 aber nimmt zu durch diese Vermehrung, oder die Umdrehung der Räder wird theil-

weise gleitend. Nimmt dagegen die Triebkraft bei unverändertem f ab, so ist nur ein entsprechender Theil von f wirksam, die Bewegung bleibt rollend, geht aber bei fortwährender Abnahme der Triebkraft aus dem beschleunigten Zustande, indem X und U_1 zugleich nach und nach Null und negativ werden, in den gleichförmigen und verzögerten über, bis sie zuletzt ganz aufhört. Nimmt der Coefficient f zu, ohne dass die Kraft T sich verändert, so bleibt die Bewegung ebenfalls rollend; X und U_1 bleiben unverändert, indem das, um was f grösser wird, nicht in Thätigkeit kommt oder die Beschleunigung nicht vergrössert. Nimmt dagegen f ab, bei unveränderter Triebkraft, so wird die Bewegung theilweise gleitend, X nimmt ebenfalls ab und kann gleich Null, oder die fortschreitende Bewegung kann gleichförmig werden, während U_1 zunimmt.

Die gleichen Verhältnisse treten beziehungsweise auch in Fällen ein, wenn die als bestimmt angenommenen Werthe von f und T sich so zu einander verhalten, dass die entstehende rollende Bewegung gleichförmig oder verzögert wird, und f dem (zu T gehörigen) Reibungsquotienten gleich ist. Ist insbesondere diese Bewegung eine verzögerte, oder sind X und U_1 negativ, so geht die Bewegung, wenn f abnimmt, bei ungeändertem Werthe von T, oder wenn T zunimmt, ohne dass f sich ändert, oder auch, wenn zu gleicher Zeit T wächst und f abnimmt, in die theilweise gleitende über, u d U_1 nimmt zu, so dass es, durch Null hindurchgehend, positiv werden kann, während X mit f zugleich kleiner wird.

Nur bei rollender Bewegung können die beiderlei Bewegungen, die fortschreitende und die umdrehende der Räder, zugleich gleichförmig sein; bei theilweise gleitender Bewegung dagegen muss die eine derselben beschleunigt oder verzögert sein, wenn die andere gleichförmig ist.

Ferner ist zu beachten, dass, wenn der Reibungsquotient für rollende Bewegung negativ wird (§. 64), und wenn zugleich, wie die Anwendbarkeit der Gleichungen (H) fordert, der Coefficient f, vom Vorzeichen abgesehen, kleiner als dieser Quotient ist, das Vorzeichen von f geändert werden muss, weil in diesem Falle der Widerstand $f(2N+2N_1)$ verzögernd, und nicht, wie die Gleichungen (H) voraussetzen, beschleunigend auf die Bewegung wirkt.

Ganz gleitende Bewegung der Räder, ohne fortschreitende Geschwindigkeit, findet nur dann Statt, wenn f so beschaffen ist, dass auch X gleich Null wird.

(Der Schluss folgt im nächsten Heft.)

12.

De orbitis et motibus puncti cuiusdam corporei circa centrum attractivum aliis, quam Newtoniana, attractionis legibus sollicitati.

(Ab *Joh. Franc. Stader*, stud. math.)

Praefatio.

In historia rerum, quae ad Astronomiam pertinent, certe gravissimi fuit momenti, quod summus *Newton*, postquam universalis gravitationis principium detexit, leges illas *Kepleri* ingenio observationibus tantum adhibitis repertas *a priori* demonstravit.

Primus ille docuit, simulac corporis cuiusdam centralis vis attractiva reciproce proportionalis est quadrato radio vectori, dura necessitate corpora omnia ab eiusmodi vi gubernata in sectionibus conicis moveantur *oportere*, neque aliter moveri *posse*. Formam igitur orbitarum, in quibus corpora coelestia moventur, ex ipsa attractione deduxit.

„Hocce modo", ut verbis Ill^mi^ *Gauss**) utar, „Systema gravitationis univer-„salis novos analysi triumphos eosque splendidissimos paraverat; cometaeque us-„que ad illum diem semper indomiti, vel si devicti videbantur, mox seditiosi et „rebelles, nunc frena sibi injici passi atque ex hostibus hospites redditi, iter „suum in tramitibus a calculo delineatis persecuti sunt, iisdem quibus planetae „legibus aeternis religiose obtemperantes."

Sed haud multum abest, quin quaestio ponatur, quaenam curvae describantur a puncto mobili, quod alia quadam, quam qua mundus noster, vi attractiva gubernari faciamus. Cuius quaestionis materia, quamvis, remota ex rebus sensi-

*) Conf. praefatio p. IV., quae pertinet ad ipsius theoriam motus corporum coelestium.

bilibus, tantummodo cadat in cogitationem, mirifice tamen delectat animum; immo etiam summae, quam affert, delectationis ne ratione quidem habita, disquisitio, dummodo eam ad legem aliqua ex parte generalem revocare liceret, fons esset copiosus, qui innumeris abundaret novis curvis, ad quas, etiamsi una aut altera aliunde cognita esset, tamen hac nova gravique lege considerandas magnopere invitaremur atque alliceremur.

Iam anno 1851 de hac re commentationem scripsi, quum ab Amplissimo Philosophorum ordine almae Academiae regiae Monasteriensis quaestio praemio ornanda proponeretur: „Eruantur orbitae et motus puncti cuiusdam corpo„rei, quod attrahitur ad fixum centrum attractivum, vi quadam accelerante prae„ditum, quae reciproce proportionalis est septimo radii vectoris gradui." Sed praemium reportasse non contentus, etiam alteros casus in disceptationem vocavi, quam, ab Illmo viro *Crelle* monitus, modesto animo cum viris doctissimis communicare conabor.

§. 1.

Generales proponuntur differentialium aequationes.

Disquisitiones circa motus, quicunque seu attractiva seu repulsiva vi centrali procreati sunt, multo simpliciores redduntur, si ponamus, corpora mota neque minus corpora centralia sollicitantia spectanda esse ut puncta mathematica, aut, si velis, ut puncta corporea infinite parva. Nimirum hoc posito coordinatis ad planum pertinentibus confestim uti possumus. Quod autem ad disquisitiones ipsas attinet, omnes nituntur una ex theoria Dynamices notissima veritate, a *Keplero* quidem in coelestium tantummodo corporum motibus, intellecta, attamen ad motus cuiuscunque modi referenda quae est:

„Corpora vel puncta concreta qualibet vi centrali sollicitata ita moventur, „ut areae spatiorum in diversis temporum intervallis circa corpus centrale descrip„torum hisce intervallis ipsis sint proportionales, i. e. ut, temporibus et spatiis „per numeros expressis, spatium quodvis divisum per tempus, intra quod descri„bitur, quotientem suppeditet invariabilem." Eadem sententia etiam his verbis pronuntiari potest:

„Vis accelerando sollicitans ea, cuius directio omni temporis momento „directionem radii vectoris sub angulis rectis perscindat, sit $= 0$, necesse est."

Nimirum talem vim accelerantem, quae omni temporis momento situm in spatio commutet, animo complecti non possumus. Quapropter vim quandam

initialem ad motus nascendos datam fingamus, quae ita posita est, ut ipsius directio orbitam tangat.

Consideremus nunc punctum corporeum sollicitatum vi aliqua, cuius directio petit punctum sollicitans fixum, atque cuius intensitas pendet ex sola distantia ab hoc centro sollicitante. Constat autem, motum habere locum in eo plano, quod continet directionem celeritatis initialis atque punctum fixum. Ponamus, sollicitans centrum sive punctum esse initium coordinatarum x et y rectis angulis se secantium, quae sitae sunt in illo plano. Designemus per r distantiam cuiuslibet puncti ab initio, per φ angulum huius radii vectoris cum axi positivarum abscissarum x, et per R intensitatem, qua illa vis acceleratrix praedita est. Cosinus angulorum, quos ipsius directio cum axibus facit, erunt ordine

$$-\frac{x}{r} \quad , \quad -\frac{y}{r},$$

si vis est attractiva, atque

$$+\frac{x}{r} \quad , \quad +\frac{y}{r},$$

si est repulsiva. Vires acceleratrices componendae („Les composantes de la force accélératrice" in terminis *Poisson*) erunt in primo casu

$$-R.\frac{x}{r} \quad , \quad -R.\frac{y}{r}$$

in altero casu

$$+R.\frac{x}{r} \quad , \quad +R.\frac{y}{r}.$$

Sed formulae nostrae in posterum referendae sunt ad primum casum, propterea quod mutatio signi ante R ad alterum casum considerandum omnino sufficiet.

Aequationes generales ad motum puncti spectantes erunt:

$$(1.) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -R.\frac{x}{r} \;,\; \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -R.\frac{y}{r},$$

dummodo t tempus ad describendas curvas consumptum significet. Porro illa lex altero modo pronuntiata sic exprimitur:

$$(2.) \qquad y.\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - x.\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Sane autem mox perspicies, hanc formulam eandem effari sententiam, quam primo loco de velocitate areali proposui. Etenim ex elementis in promptu est formula:

$$(3.) \qquad \tfrac{1}{2}(y\partial x - x\partial y),$$

qua differentiale pertinens ad aream sectoris σ exprimitur. Quia autem invenitur esse

$$\frac{\partial(y.\partial x - x\partial y)}{\partial t^2} = y.\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - x.\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

fit protinus

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)}{\partial t} = \frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} = 0$$

unde integrando sequitur:

$$(4.)\qquad \partial\sigma = \tfrac{1}{2}c.\partial t,$$

dummodo per $\frac{1}{2}c$ designetur constans aliqua, quae facile ex datis valoribus statum nascendi determinantibus invenitur. Iterata denique integratione procedit

$$(5.)\qquad \sigma = \tfrac{1}{2}c.t,$$

dummodo sit $\sigma = 0$ pro $t = 0$, id quod legem illam *Kepleri* multo maiore ambitu promulgat.

Sed coordinatis polaribus r et φ adhibitis abit formula (3) in

$$\partial\sigma = \tfrac{1}{2}r^2.\partial\varphi,$$

quae, si combinatur cum (4), mutatur in

$$(6.)\qquad \partial t = \frac{r^2}{c}.\partial\varphi.$$

Quod autem ad constantem c attinet, ipsius valorem hoc modo eruere poteris. Secundum vivarum virium principium velocitas, quae directionem lineae orbitam tangentis sequitur, est

$$v = \frac{\partial s}{\partial t},$$

ubi s arcum orbitae designat; sed ipsius vires componendae, quarum una directionem radii vectoris, altera igitur directionem ad illam perpendicularem sequitur, eodem ordine expressae, sunt hae:

$$\frac{\partial r}{\partial t} \text{ et } r.\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

ita ut fiat:

$$\frac{\partial s^2}{\partial t^2} = \frac{\partial r^2}{\partial t^2} + r^2.\frac{\partial\varphi^2}{\partial t^2},$$

sive

$$\partial s^2 = \partial r^2 + r^2.\partial\varphi,$$

id quod aliunde notissimum est. Quodsi autem designatur per α angulus positus inter directionem initialis celeritatis interque rectam a primo puncti sollicitati situ usque ad centrum ductam, atque per k celeritas initialis ipsa, habebis $k\,sin\,\alpha$ pro

valore illius componendae initialis, cuius generalis valor est $r.\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, itaque noveris valorem initialem, qui valori $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, id est velocitati radium vectorem rotanti, respondet et per $\frac{\partial\varphi_0}{\partial t_0}$ designetur. Si denique per a denotaveris radii vectoris valorem initialem, obtinebis:

$$k\sin\alpha = a.\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial t_0}\right)$$

et propter aequationem (6)

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial t_0} = \frac{c}{a^2},$$

unde sequitur esse:

$$(7.)\qquad c = a.k.\sin\alpha.$$

Hisce paucis praemissis facile generales differentialium aequationes eruuntur. Nimirum ex formulis (1)

$$-\frac{x}{r}\cdot R = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\quad,\quad -\frac{y}{r}\cdot R = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

postquam una cum ∂x, altera cum ∂y multiplicata est, additione oritur:

$$\frac{\partial x.\partial^2 x + \partial y.\partial^2 y}{\partial t^2} = -R\cdot\frac{x.\partial x + y.\partial y}{r}$$

Quia autem differentiando aequationem

$$r^2 = x^2 + y^2$$

obtinebis

$$\partial r = \frac{x\partial x + y.\partial y}{r},$$

aequatio illa mutatur in:

$$\frac{\partial x.\partial^2 x + \partial y.\partial^2 y}{\partial t^2} = -R.\partial r.$$

Si porro aequationem notissimam $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2$ denuo differentiaveris, fiet:

$$\frac{\frac{1}{2}\partial(\partial s^2)}{\partial t^2} = \frac{\partial x.\partial^2 x + \partial y.\partial^2 y}{\partial t^2}$$

quapropter emerget relatio:

$$\tfrac{1}{2}\partial\left(\frac{\partial s^2}{\partial t^2}\right) = -R.\partial r,\ \text{igitur}$$

$$(8.)\qquad \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 = -2\int R.\partial r = v^2.$$

Quod integrale novam continet constantem arbitrariam, quam valoribus initialibus

quantitatum r et v determinatam esse statim elucet. Itaque obtinemus formulam generalem:

$$\text{(I.)} \qquad v^2 = k^2 - 2.\int_a^r R.\partial r\,.$$

Sed faciliore etiam negotio orbitarum aequationem generalissimam nancisceris. Nimirum differentiale, quod ad curvae arcum s polaribus coordinatis expressum pertinet:

$$\partial s^2 = \partial r^2 + r^2.\partial\varphi^2\,,$$

si per aequationem (6)

$$\partial t = \frac{r^2}{c}.\partial\varphi$$

antea quadratam diviseris, orietur:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 = \frac{c^2(\partial r^2 + r^2.\partial\varphi^2)}{r^4.\partial\varphi^2}$$

aut ope formulae (I):

$$c^2.\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\cdot\frac{\partial r^2}{\partial\varphi^2}\right) = k^2 - 2\int_a^r R\partial r$$

unde sequitur esse:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 = \frac{c^2}{r^2[-c^2 + r^2(k^2 - 2.\int_a^r R.\partial r)]}\,, \quad \text{aut}$$

$$\text{(II.)} \qquad \varphi = \int_a^r \frac{c.\partial r}{r.\sqrt{[-c^2 + r^2(k^2 - 2.\int_a^r R.\partial r)]}}$$

quae est *aequatio orbitarum generalissima.*

Denique nullo artificio relationem inter tempus et spatium invenies, siquidem in aequatione:

$$\partial\varphi = \frac{c.\partial r}{r.\sqrt{[-c^2 + r^2(k^2 - 2.\int_a^r R.\partial r)]}}$$

substitueris $\frac{c.\partial t}{r^2}$ loco $\partial\varphi$, unde proficiscitur

$$\text{(III.)} \qquad t = \int_a^r \frac{r\partial.r}{\sqrt{[-c^2 + r^2(k^2 - 2.\int_a^r R.\partial r)]}}$$

relatio inter tempus et spatium generalissima.

Problema inversum ex data orbita incognitam accelerationem R inveniendi solvitur, simulac æquationem

$$k^2 - 2.\int_a R\,\partial r = c^2.\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^4}\cdot\frac{\partial r^2}{\partial\varphi^2}\right) = c^2\left[\frac{1}{r^2}+\left(\frac{\partial.\frac{1}{r}}{\partial\varphi}\right)^2\right]$$

quod ad r attinet, differentiasti. Invenitur hoc modo formula:

$$\text{(IV.)}\quad R = c^2.\frac{r^2+2.\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2 - r.\frac{\partial^2 r}{\partial\varphi^2}}{r^5} = \frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r}+\frac{\partial^2.\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\varphi^2}\right),$$

cui associatur formula ad tempus e data orbita eruendum:

$$\text{(V.)}\qquad \partial t = \frac{r^2}{c}.\partial\varphi = \frac{2}{c}\partial\sigma.$$

Manifestum est, ut primum orbita sive data, sive ope formulae (II) eruta erit, formulam (III) omnino non desiderari, propterea quod formula (V) in omnibus casibus celerius atque adeo facilius ad finem perducit.

Sed aequatio (I) formam induit memoratu dignam, quum primum introduxisti perpendiculum $p=SC$ (Tab. V fig. 1) a centro S in lineam, quae orbitam in puncto M tangit, demissum. Revera similia triangula suppeditant relationes:

$$\text{(9.)}\quad \begin{cases} M\beta = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{c}{y - x.\frac{\partial x}{\partial y}} = \frac{c}{AS}, \\ M\alpha = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{c.\frac{\partial y}{\partial x}}{y - x.\frac{\partial y}{\partial x}} = \frac{c}{BS}, \\ M\gamma = \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{c}{CS} = \frac{c}{p} = v. \end{cases}$$

Unde sequitur: „in omni motu vi aliqua, petente fixum punctum, procre-„ato velocitatem in quolibet orbitae puncto ipsiusque vires componendas reci-„proce proportionales esse tribus a centro usque ad tangentem ductis lineis, „quae ordine virium directiones sub rectis angulis perscindunt."

Substituendo ultimum valorem velocitatis v in aequatione (I) emergit:

$$\text{(VI.)}\qquad \frac{c^2}{p^2} = k^2 - 2\int_a^r R\,\partial r,$$

quae *orbitarum aequatio* est in hoc singulari coordinatarum r et p systemate Hisce formulis omnes nituntur disquisitiones, ad quas nunc aggrediamur.

Orbitarum puncto, quod attractiva vis diversis radii vectoris potentiis reciproce proportionalis sollicitat, descriptarum aequationes atque inde relationes inter tempus et spatium eruuntur.

§. 2.

Lex attractionis sit definita per

$$R = \frac{\mu}{r^3}.$$

Qua in formula per μ constans aliqua designatur, quae pertinet ad punctorum distantiae massaeque unitatem. Ante omnia primum velocitas derivanda est, quippe quae in aequatione (II) substituatur oporteat. Quia est

$$2\int R.\partial r = 2\mu.\int\frac{\partial r}{r^3} = -\frac{\mu}{r^2},$$

sine negotio obtinebis:

$$(1.)\qquad v^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 = k^2 - 2\mu\int_a^r\frac{\partial r}{r^3} = k^2 - \frac{\mu}{a^2} + \frac{\mu}{r^2},$$

quo valore in generali orbitarum aequatione (II) introducto orietur

$$(2.)\qquad \varphi = \int_a^r\frac{c\,\partial r}{r\sqrt{\left[\mu - c^2 + \left(k^2 - \frac{\mu}{a^2}\right)r^2\right]}}.$$

Hac in formula complures distinguendi sunt singulares casus.

1. Casus.

Primum sit $\mu = c^2 = a^2k^2\sin^2\lambda$, igitur

$$(3.)\qquad v^2 = k^2\cos^2\lambda + \frac{a^2k^2\sin^2\lambda}{r^2}.$$

Quod si ponamus, aequatio (2) mutatur in hanc:

$$\varphi = \frac{c}{\sqrt{\left(k^2 - \frac{\mu}{a^2}\right)}}.\int_a^r\frac{\partial r}{r^2};$$

sed propter positionem: $\mu = c^2 = a^2k^2\sin^2\lambda$ coefficiens abit in $\frac{ac}{\sqrt{(a^2k^2 - c^2)}}$ $= \frac{ac}{\sqrt{\left(\frac{c^2}{\sin^2\lambda} - c^2\right)}} = a.\text{tang}\,\lambda$, quare habemus

$$\varphi = a.\text{tang}\lambda.\int_a^r \frac{\partial r}{r^2};$$

unde perspicis, radium vectorem omnes quidem accipere posse valores, qui inter terminos 0 et ∞ positi sunt, sed propter coefficientem a integralis limes inferior neque o neque ∞ esse debet. Quapropter ponamus, a maximum esse radii vectoris valorem, ita ut integrali signum — praeponendum sit. Est igitur

$$\varphi\cot\lambda = a.\int_a^r \frac{-\partial r}{r^2} = \frac{a}{r} - 1\,, \text{ sive}$$

$$\text{(I.)} \qquad r = \frac{a}{1+\varphi:\cot\lambda}.$$

Haec curva est aliqua spiralis, quam Mathematici Francogallici appellant *spiralem hyperbolicam*, sed melius *reciproca spiralis Archimedica* nominatur.

1) Si angulus λ *acutus* est, $\cot\lambda$ positiva erit, atque quum φ in infinitum crescat, punctum mobile in infinitum appropinquat ad centrum cum celeritate infinite magna; id quod facile intelligitur ex aequatione (3) (Tab.V. fig. 2.)

2) Sin vero λ *rectus* est, obtinebis aequationem

$$\text{(II.)} \qquad r = a;$$

curva igitur mutatur in *circulum*, atque velocitas v in quolibet ipsius puncto erit $= k$.

3) Si denique angulus λ *obtusus* est, punctum sollicitatum non amplius petit centrum, sed removetur in infinitum, dum angulus φ ab limite o crescit usque ad $-\text{tang}\lambda$, ad eumque limitem, qui simul determinat asymptotae directionem. Pro $r = \infty$ erit $v = k\cos\lambda$ id est $v < k$, ut formula (3) docet. (Fig. 3.)

Priusquam relationes inter tempus et spatium derivamus, pauca ante dicenda sunt. Si formulam, quae ad sectoris aream pertinet,

$$\text{(4.)} \qquad \partial\sigma = \tfrac{1}{2}r^2\partial\varphi$$

cum illa in (§. 1, V) proposita

$$\text{(5.)} \qquad \partial t = \frac{r^2}{c}\partial\varphi$$

comparaveris, illico intelliges, utracunque integratio processit, ipsam alteram esse perfectam. Si igitur semel ponatur, tempus t esse $= 0$ pro $\varphi = 0$, temporis determinatio facillime ad aream sectoris quadrandam reducitur, simulac ita inte-

grasti, ut σ evanescat pro $\varphi = 0$. Etenim ex aequationibus (4) et (5) proficiscitur

$$(6.)\qquad \partial t = \frac{2}{c}.\partial\sigma$$

atque inde integrando, ut sit $t = 0$ pro $\sigma = 0$, emergit

$$t = \frac{2}{c}.\sigma.$$

Itaque, si aequatio (4) ita integrata erit, ut fiat $\sigma = 0$ pro $\varphi = 0$, tantummodo valorem sectoris cum factore $\frac{2}{c}$ esse multiplicandum, ut temporis ad spatium relati cognitionem capiamus, plane perspicuum est. Quam ob causam cum tempore determinando semper quadraturam coniungamus. Simul videmus, tempus ad curvas describendas consumtum fore infinitum, quotiescunque tota area fieri potest infinita.

Ex aequatione (I) sequitur esse

$$\partial\sigma = \tfrac{1}{2}a^2.\frac{\partial\varphi}{(1+\varphi\cot\lambda)^2}$$

atque integrando a valore $\varphi = 0$ usque $\varphi = \varphi$ obtinemus:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}a^2.\int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{(1+\varphi\cot\lambda)^2} = \tfrac{1}{2}a^2\tang\lambda\int_0^{\varphi}\frac{\partial(1+\varphi\cot\lambda)}{(1+\varphi\cot\lambda)^2}$$

unde sequitur

$$\sigma = \tfrac{1}{2}a^2\tang\lambda\left(1-\frac{1}{1+\varphi\cot\lambda}\right) = \tfrac{1}{2}a\tang\lambda\left(a-\frac{a}{1+\varphi\cot\lambda}\right)$$

sive

$$(\mathrm{I.})_{(1)}\qquad \sigma = \tfrac{1}{2}a^2.\frac{\varphi}{1+\varphi.\cot\lambda} = \tfrac{1}{2}a(a-r)\tang\lambda.$$

1) Si angulus λ *acutus* est, angulus φ ab 0 usque ad ∞ crescit, aut r a valore a usque ad 0 decrescit, tota igitur area, quae per Σ designetur, est in hoc casu

$$(\mathrm{I.})_{(2)}\qquad \Sigma = \tfrac{1}{2}a^2.\tang\lambda.$$

2) Sin autem λ *obtusus* est, scribamus $\frac{1}{2}\pi+\lambda'$ loco λ, ubi $\lambda' < \frac{1}{2}\pi$ sit. Tunc mutatur $(\mathrm{I})_{(1)}$ in

$$(\mathrm{I.})_{(3)}\qquad \sigma' = \tfrac{1}{2}a^2.\frac{\varphi}{1-\varphi\tang\lambda'} = \tfrac{1}{2}a\cot\lambda'(r-a).$$

Crescente igitur φ a limite 0 usque ad $\cot\lambda'$, crescit σ a valore 0 usque ad ∞. Punctum igitur mobile in primo casu, ubi λ acutus est, pervenit ad

centum post finitum temporis intervallum; in altero casu, ubi $\lambda = \frac{1}{2}\pi + \lambda'$ est, removetur in infinitum atque in orbita sua describenda tempus consumitur pariter infinitum:

Si nunc has aequationes cum $\frac{2}{c} = \frac{2}{ak\sin\lambda}$ multiplicaveris, orietur pro $\lambda < \frac{1}{2}\pi$:

$$\text{(I.)}_{(4)} \quad t = \frac{a}{k} \cdot \frac{\varphi}{\sin\lambda + \varphi.\cos\lambda} = \frac{a-r}{k\cos\lambda},$$

sed pro $\lambda = \frac{1}{2}\pi + \lambda'$ et $\lambda' < \frac{1}{2}\pi$

$$\text{(I.)}_{(5)} \quad t' = \frac{a}{k} \cdot \frac{\varphi}{\cos\lambda' - \varphi.\sin\lambda'} = \frac{r-a}{k\sin\lambda'}.$$

Si tempus in tota area describenda consumptum per T designatur, habebis in primu casu:

$$\text{(I.)}_{(6)} \quad T = \frac{a}{k\cos\lambda}, \text{ in altero } T = \infty.$$

3) Denique pro $\lambda = \frac{1}{2}\pi$ aut $r = a$ oritur

$$\text{(II.)}_{(1)} \qquad \sigma = \tfrac{1}{2}a^2.\varphi \qquad \text{pro } \varphi < 2\pi$$

itaque

$$\text{(II.)}_{(2)} \quad t = \frac{a}{k}.\varphi \quad , \quad T = \frac{2\pi a}{k}.$$

Quia motus in circulo periodicus est, relatio simplicissima inter tempus in uno circuitu consumptum et circuli radium a nobis occurret. Nimirum, quoniam in hoc casu valet aequatio $\mu = c^2 = a^2k^2$, sive $k = \frac{\sqrt{\mu}}{a}$, mutatur $\text{(II)}_{(2)}$ in

$$T = \frac{2\pi a^2}{\sqrt{\mu}}, \quad \text{unde}$$

$$\text{(II.)}_{(3)} \qquad \sqrt{\mu} = \frac{2\pi a^2}{T}.$$

Ratione non habita massae, μ in eodem attractionis systemate eundem conservabit valorem. Faciamus nunc, punctum corporeum in altero circulo cum radio a' moveri circa idem centrum. Simulac autem a in a' mutatur, mutabitur T in T'; quare pro novo puncto proponere possumus

$$\sqrt{\mu} = \frac{2\pi a'^2}{T'},$$

quae aequatio cum priore combinata offert relationem

$$\frac{a^2}{T} = \frac{a'^2}{T'}.$$

i. e. „*Pro omnibus punctis in diversis circulis circa centrum commune* „*se moventibus tempora* ***ipsa*** *in uno circuitu consumpta proportionalia* „*sunt* ***quadratis*** *radiorum.*"

2. Casus.

Consideremus alterum singularum casum, ubi est:

$$k^2 = \frac{\mu}{a^3}, \quad \text{itaque}$$

$$(7.) \qquad v^2 = \frac{\mu}{r^2}, \quad \text{sive } v = \frac{ak}{r}.$$

Quo posito aequatio (2) transit in hanc:

$$(8.) \qquad \varphi = \frac{c}{\sqrt{(\mu - c^2)}} \cdot \int_a^r \frac{\partial r}{r},$$

in qua coefficiens $\frac{c}{\sqrt{(\mu - c^2)}}$ propter positionem mutatur in

$$\frac{c}{\sqrt{(a^2k^2 - c^2)}} = \frac{c}{\sqrt{\left(\frac{c^2}{\sin^2\lambda} - c^2\right)}} = \frac{\sin\lambda}{\sqrt{(1 - \sin^2\lambda)}} = \operatorname{tang}\lambda, \text{ quare est}$$

$$\varphi = \operatorname{tang}\lambda . \int_a^r \frac{\partial r}{r} = \operatorname{tang}\lambda . \log\frac{r}{a} \text{ aut}$$

$$(\text{III.}) \qquad r = a . e^{\varphi . \cot\lambda},$$

quae aequatio est *logarithmicae spiralis*, unde iterum ponendo $\lambda = \frac{1}{2}\pi$ aequatio *circuli* proficiscitur. Prout $\lambda <$ aut $> \frac{1}{2}\pi$ est, curvae natura magnopere mutatur. Si quidem λ *acutus* est, crescente angulo φ a limite 0 usque ad ∞, etiam crescit r, ac quidem a valore a usque ad ∞. Punctum igitur mobile in hoc casu removetur in infinitum a centro, innumeris revolutionibus circa centrum percursatis. Sin autem λ *obtusus* est, ponatur $\lambda = \frac{1}{2}\pi + \lambda'$, ubi nunc $\lambda' < \frac{1}{2}\pi$ sit, ita ut habeamus:

$$\text{III}_{(1)}. \qquad r = a . e^{-\varphi . \operatorname{tang}\lambda'}.$$

Nunc crescente angulo φ in infinitum, radius vector diminuitur usque ad 0; punctum igitur mobile in hoc casu perpetuo centrum petit percurrens innumeras circa polum volutationes.

Quadratura nullo negotio efficitur. Nimirum habemus in primo casu

$$\sigma = \tfrac{1}{2} a^2 \int_0^\varphi e^{2\varphi \cot\lambda} . \partial\varphi = \tfrac{1}{4} a^2 \operatorname{tang}\lambda (e^{2\varphi . \cot\lambda} - 1)$$

et in altero casu

$$\sigma' = \tfrac{1}{2} a^2 \int_0^\varphi e^{-2\varphi . \operatorname{tang}\lambda'} . \partial\varphi = \tfrac{1}{4} a^2 \cot\lambda' (1 - e^{-2\varphi . \operatorname{tang}\lambda'})$$

aut

$$\text{III}_{(2)}. \qquad \begin{cases} \sigma = \tfrac{1}{4} \operatorname{tang}\lambda (r^2 - a^2) \\ \sigma' = \tfrac{1}{4} . \cot\lambda' (a^2 - r^2). \end{cases}$$

Jam videmus, in primo casu totam aream esse infinite magnam, dum in altero erit

$$\text{III}_{(3)}. \qquad \Sigma' = \tfrac{1}{4} a^2 . \cot\lambda'.$$

Pariter res se habet, si temporis spatium respiciamus. Area sectoris σ cum factore $\frac{2}{c} = \frac{2}{ak . \sin\lambda}$, et area sectoris σ' cum $\frac{2}{c} = \frac{2}{ak . \cos\lambda'}$ multiplicata evadit

$$\text{III}_{(4)}. \qquad \begin{cases} t = \dfrac{r^2 - a^2}{2ak . \cos\lambda} \\ t' = \dfrac{a^2 - r^2}{2ak . \sin\lambda'}. \end{cases}$$

Unde colligis, si λ *acutus* sit, punctum mobile in tota via describenda infinite magnum consumere tempus, dum pro λ *obtuso* post finitum temporis intervallum, scilicet post

$$\text{III}_{(5)}. \qquad T' = \frac{a}{2k . \sin\lambda'}$$

centrum adipiscitur cum velocitate infinite magna, sicuti ex relatione $v = \frac{ak}{r}$ intelligitur.

2. Casus.

Si nunc ponamus in integrali (2)

$$\varphi = \int_a^r \frac{c . dr}{r \sqrt{\left[\mu - c^2 + \left(k^2 - \frac{\mu}{a^2}\right) r^2\right]}}$$

neque $\mu - c^2 = 0$ neque $k^2 - \frac{\mu}{a^2} = 0$ esse, omnino tres casus distinguendi sunt; ac quidem esse potest:

α) $\qquad \mu - c^2 > 0 \quad$ et $\quad k^2 - \frac{\mu}{a^2} > 0$

β) $\qquad \mu - c^2 > 0 \quad$ et $\quad k^2 - \frac{\mu}{a^2} < 0$

γ) $\qquad \mu - c^2 < 0 \quad$ et $\quad k^2 - \frac{\mu}{a^2} > 0.$

Faciamus esse $\mu - c^2 > 0$ et $k^2 - \frac{\mu}{a^2} > 0$.

Separato factore $= \frac{1}{\sqrt{(\mu - c^2)}}$ nanciscimur:

$$\varphi = \frac{c}{\sqrt{(\mu - c^2)}} \cdot \int_a^r \frac{\partial r}{r\sqrt{\left(1 + \frac{a^2k^2 - \mu}{\mu - c^2} \cdot \frac{r^2}{a^2}\right)}},$$

unde colligis propter coefficientem plane positivum

$$\frac{a^2k^2 - \mu}{\mu - c^2} = \frac{a^2k^2 - \mu}{\mu - a^2k^2.\sin^2\lambda},$$

angulum λ nunquam esse posse *rectum*. Ponendo hunc coefficientem $= \frac{1}{b^2}$ atque $\frac{c}{\sqrt{(\mu - c^2)}} = \frac{1}{n}$ emergit proxime:

$$n\varphi = \int_a^r \frac{\partial r}{r\sqrt{\left(1 + \frac{r^2}{a^2 b^2}\right)}}.$$

Valor a sit maximus radii vectoris, ita ut integrali signum $-$ anteponendum sit; si praeterea collocatur $r = \frac{ab}{x}$, erit $x = b$ pro $r = a$, sed $x = \infty$ pro $r = 0$, quare habemus

$$n\varphi = \int_b^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1 + x^2)}} \text{ pro } x < \infty.$$

Functiones hyperbolicae, ab Illmo *Gudermann* *) primo excultae, quum formis logarithmicis magnopere sint praeferendae, utamur ipsius characteribus ponentes:

$$\tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \mathfrak{Cos}\,x \quad , \quad \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \mathfrak{Sin}\,x \quad , \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \mathfrak{Tang}\,x$$

$$\frac{1}{\mathfrak{Tang}\,x} = \mathfrak{Cot}\,x,$$

ita ut valeat relatio fundamentalis:

$$\mathfrak{Cos}^2 x - \mathfrak{Sin}^2 x = 1.$$

Ex aequationibus illis, quibus functiones definiuntur, facile derivabis:

$$\partial\,\mathfrak{Sin}\,x = \mathfrak{Cos}\,x.\partial x \quad , \quad \partial\,\mathfrak{Cos}\,x = \mathfrak{Sin}\,x.\partial x\,,$$

$$\partial\,\mathfrak{Tang}\,x = \frac{\partial x}{\mathfrak{Cos}^2 x} \quad , \quad \partial\,\mathfrak{Cot}\,x = \frac{-\partial x}{\mathfrak{Sin}^2 x},$$

*) Conf. Theorie der Potenzialfunctionen, *Crelle's* Journal Band VI — IX.

unde sequuntur integralia fundamentalia:

$$\left.\begin{array}{ll}(9.) & \mathfrak{Arc\,Sin.}\,x = \displaystyle\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} \\ (10.) & \mathfrak{Arc\,Cos.}\,x = \displaystyle\int_1^x \frac{\partial x}{\sqrt{(x^2-1)}}\end{array}\right\} \text{ubi } x \text{ crescere potest usque ad } \infty.$$

$$(11.) \quad \mathfrak{Arc\,Tang.}\,x = \int_0^x \frac{\partial x}{1-x^2} \text{ pro } x < 1$$

$$(12.) \quad \mathfrak{Arc\,Cot.}\,x = \int_\infty^x \frac{-\partial x}{x^2-1} \text{ pro } x > 1.$$

Jam perspicies, nostrum integrale (8) pertinere ad formulam (9); quare emergit

$$n\varphi = \mathfrak{Arc\,Sin.}\,x - \mathfrak{Arc\,Sin.}\,b \quad \text{sive}$$

$$n\varphi = \mathfrak{Arc\,Sin.}\left(\frac{ab}{r}\right) - \mathfrak{Arc\,Sin.}\,b$$

Ut formula magis constringatur, ponamus

$$(13.) \qquad \mathfrak{Arc\,Sin.}\,b = \beta$$

itaque oritur

$$\text{IV.} \qquad r = \frac{ab}{\mathfrak{Sin}(\beta+n\varphi)} = a\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\beta}{\mathfrak{Sin}(\beta+n\varphi)},$$

ubi $n = \frac{\sqrt{(\mu-c^2)}}{c}$ et positivi et negativi valoris esse potest.

Ex aequatione (13) deducimus

$$b = \mathfrak{Sin}\beta = \sqrt{\frac{\mu-c^2}{a^2k^2-\mu}}, \quad \mathfrak{Cos}\beta = \sqrt{(1+b^2)} = \sqrt{\frac{a^2k^2-c^2}{a^2k^2-\mu}} \text{ atque}$$

$$\mathfrak{Tang}\beta = \frac{b}{\sqrt{(1+b^2)}} = \sqrt{\frac{\mu-c^2}{a^2k^2-c^2}} = \sin\lambda\sqrt{\frac{\mu-c^2}{c^2-c^2\sin\lambda}} = \operatorname{tang}\lambda\sqrt{\frac{\mu-c^2}{c^2}},$$

est igitur:

$$(14.) \qquad \mathfrak{Tang}\beta = n.\operatorname{tang}\lambda.$$

Haec formula, ex qua connexus inter constantes b et n intelligitur, simul docet, propterea quod $\mathfrak{Tang}\beta$ pro reali β negativa esse non potest, angulum λ *acutum* esse oportere pro $n > 0$, contra *obtusum* pro $n < 0$.

Curvam nostram itidem spiralem aliquam esse, cui maxima similitudo cum curva (I) sit, haud difficile erit demonstratu. Nimirum pro $\varphi=0$ fit $\mathfrak{Sin}(\beta+n\varphi)=b$, itaque $r = a$; si igitur $n > 0$, aut $\lambda < \frac{1}{2}\pi$ est, angulus φ in infinitum crescit, et pro $\varphi = \infty$ erit $\mathfrak{S}(\beta+n\varphi) = \infty$, itaque $r = 0$. Punctum igitur mobile

post innumeras revolutiones assidue petit centrum, quod adipiscitur cum velocitate infinite magna.

Sin autem $n < 0$ simulque $\frac{1}{2}\pi < \lambda < \pi$ erit, mobile punctum removetur a centro in infinitum, dum φ tardissime crescit a valore 0 usque ad $\varphi = -\frac{\beta}{n}$, qui valor directionem asymptotae determinat.

Facile deducitur ex aeq. (IV.)

$$\partial\sigma = \tfrac{1}{2}r^2.\partial\varphi = \frac{\frac{1}{2}a^2b^2.\partial\varphi}{\mathfrak{Sin}^2(\beta+n\varphi)} \text{ aut}$$

$$\sigma = \tfrac{1}{2}a^2b^2\int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\mathfrak{Sin}^2(\beta+n\varphi)}.$$

Quoniam autem est $-\partial\,\mathfrak{Cot}x = \frac{\partial x}{\mathfrak{Sin}^2 x}$ itaque

$$-\partial\,\mathfrak{Cot}(\beta+n\varphi) = \frac{n\partial\varphi}{\mathfrak{Sin}^2(\beta+n\varphi)}$$

invenitur

$$\text{IV}_{(1)}.\qquad \sigma = \frac{a^2b^2}{2n}[\mathfrak{Cot}\beta - \mathfrak{Cot}(\beta+n\varphi)].$$

Sed est $\mathfrak{Cot}\beta - \mathfrak{Cot}(\beta+n\varphi) = \frac{\mathfrak{Sin}\,n\varphi}{\mathfrak{Sin}\beta.\mathfrak{Sin}(\beta+n\varphi)}$ atque $\mathfrak{Sin}\beta = b$, igitur habemus

$$\text{IV}_{(2)}.\qquad \sigma = \frac{a^2}{2n}.\frac{\mathfrak{Sin}\beta.\mathfrak{Sin}\,n\varphi}{\mathfrak{Sin}(\beta+n\varphi)}.$$

Si denique ope formulae (14) n eliminaveris, orietur:

$$\text{IV}_{(3)}.\qquad \sigma = \tfrac{1}{2}a^2\operatorname{tang}\lambda.\frac{\mathfrak{Cos}\beta.\mathfrak{Sin}\left(\varphi.\frac{\mathfrak{Tang}\beta}{\operatorname{tang}\lambda}\right)}{\mathfrak{Sin}\left(\beta+\varphi.\frac{\mathfrak{Tang}\beta}{\operatorname{tang}\lambda}\right)}.$$

Sectoris area evanescit pro $\varphi = 0$. Pro $n > 0$ et $\lambda < \frac{1}{2}\pi$ tota area Σ finito gaudet valore, ac quidem suppeditat aequatio ($\text{IV}_{(1)}$) formulam

$$\Sigma = \frac{a^2b^2}{2n}.\mathfrak{Cot}\beta,$$

quae eliminando b^2, n et $\mathfrak{Cot}\beta$ abit in

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}a^2\operatorname{tang}\lambda.\mathfrak{Cos}^2\beta = \tfrac{1}{2}a^2\operatorname{tang}\lambda.\frac{a^2k^2-c^2}{a^2k^2-\mu} = \tfrac{1}{2}a^2\operatorname{tang}\lambda.\frac{a^2k^2.\cos^2\lambda}{a^2k^2-\mu}$$

igitur

$$\text{IV}_{(4)}.\qquad \Sigma = \tfrac{1}{4}.\frac{a^4k^2.\sin 2\lambda}{a^2k^2-\mu} \text{ pro } \lambda < \tfrac{1}{2}\pi.$$

Contra pro $n < 0$ et $\varphi = -\frac{\beta}{n}$ fit $\sigma = \infty$.

Tempus invenitur, area multiplicata cum factore $\frac{2}{c} = \frac{2}{ak.\sin\lambda}$; itaque est

$$\text{IV}_{(5)}. \qquad t = \frac{a}{k}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\beta}{\cos\lambda}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}n\varphi}{\mathfrak{Sin}(\beta+n\varphi)}$$

atque

$$\text{IV}_{(6)}. \qquad T = \frac{a^2k.\cos\lambda}{a^2k^2-\mu} \text{ pro } \lambda < \tfrac{1}{2}\pi$$

Mobile igitur pro $n > 0$ aut $\lambda < \frac{1}{2}\pi$ post *finitum* tempus ad centrum pervenit, dum pro $n < 0$ aut $\lambda > \frac{1}{2}\pi$ tempus t infinite magnum esse oportet, ut tota curva describatur.

4. Casus.

Sit $\mu - c^2 > 0$ et $k^2 - \frac{\mu}{a^2} < 0$. Seiuncto factore $\frac{1}{\sqrt{(\mu-c^2)}}$ oritur ex aeq. (2)

$$\varphi = \frac{c}{\sqrt{(\mu-c^2)}}\cdot\int_a^r \frac{-\partial r}{r\sqrt{\left(1-\frac{\mu-a^2k^2}{\mu-c^2}\cdot\frac{r^2}{a^2}\right)}}$$

ubi iterum a maximus habeatur radius vector. Posito $r = \frac{a}{x}$ procedit

$$(15.)\quad \varphi = \frac{c}{\sqrt{(\mu-c^2)}}\cdot\int_1^x \frac{\partial x}{\sqrt{\left(x^2-\frac{\mu-a^2k^2}{\mu-c^2}\right)}} \text{ pro } x < \infty.$$

Notissimum autem est, in qualibet curva polaribus coordinatis expressa cyclicam tangentem eius anguli, quem radius vector cum linea curvam tangente facit, et quem supra per λ designavimus, determinatam esse hac formula:

$$\operatorname{tang}\lambda = r.\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

Sed in curva nostra est

$$\operatorname{tang}\lambda = r.\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{c}{\sqrt{(\mu-c^2)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\mu-a^2k^2}{\mu-c^2}\cdot\frac{r^2}{a^2}\right)}}$$

unde concludimus esse $\lambda = \frac{1}{2}\pi$, quum primum erit

$$\frac{r^2}{a^2} = \frac{\mu-c^2}{\mu-a^2k^2}.$$

Quoniam autem pro $\lambda = \frac{1}{2}\pi$ evadit $c^2 = a^2k^2$, angulus λ erit $= \frac{1}{2}\pi$, quum primum $\frac{r^2}{a^2} = 1$ est. Exstat igitur in hac curva punctum aliquod, ubi $\lambda = \frac{1}{2}\pi$ esse potest.

Itaque in hoc ipso puncto movendi initium capiatur, i. e. is curvae radius vector, qui cum linea curvam tangente angulum facit rectum, significetur per a. Quare habemus

$$\varphi = \frac{ak}{\sqrt{(\mu - a^2k^2)}} \cdot \int_1^x \frac{\partial x}{\sqrt{(x^2-1)}} \text{ pro } x < \infty,$$

quod ponendo $\frac{ak}{\sqrt{(\mu - a^2k^2)}} = \frac{1}{n}$ mutatur in

$$(16.) \qquad n\varphi = \int_1^x \frac{\partial x}{\sqrt{(x^2-1)}} = \mathfrak{Arc\,Cos.}\left(\frac{a}{r}\right), \text{ unde proficiscitur:}$$

$$(\text{V.}) \qquad r = \frac{a}{\mathfrak{Cos}\, n\varphi}.$$

Quum cosinus hyperbolicus, crescente arcu ab limite 0 usque ad $\pm\infty$, versetur inter valores 1 et $+\infty$, inde colligimus hanc curvam etiam esse aliquam *spiralem*, eamque, quae in *spatio finito* continetur. Aequatio non mutatur, seu $n\varphi$ positivo, seu negativo erit valore, unde sequitur, curvam esse *duplam spiralem*, quae ab una et altera verticis parte emittit duo membra perfecte aequalia. Quae duo continua membra versus regiones contrarias faciunt circa eundem polum infinitatem revolutionum, sine intermissione ad hoc punctum appropinquando. Itaque punctum mobile, quia r decrescit a valore a usque ad 0, post innumeras revolutiones cum velocitate infinite magna ad centrum perveniet. (Conf. fig. 4.)

Curvae quadratura nullam difficultatem affert. Nimirum proficiscitur ex (V):

$$\partial\sigma = \tfrac{1}{2}r^2.\partial\varphi = \tfrac{1}{2}a.\frac{\partial\varphi}{\mathfrak{Cos}^2 n\varphi} \text{ aut}$$

$$\sigma = \tfrac{1}{2}a^2\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\mathfrak{Cos}^2 n\varphi}$$

et propter relationem

$$\partial\,\mathfrak{Tang}\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\mathfrak{Cos}^2\varphi} \text{ iam obtinemus:}$$

$$(\text{V})_{(1)}. \qquad \sigma = \frac{a^2}{2n}.\mathfrak{Tang}\,n\varphi.$$

σ crescit cum φ, ac quidem augescente φ a valore 0 usque ad ∞, succrescit $\mathfrak{Tang}\,n\varphi$ a valore 0 usque ad 1; itaque sectoris area a valore 0 usque ad $\frac{a^2}{2n}$; est igitur

$$(\text{V})_{(2)}. \qquad \Sigma = \frac{a^2}{2n} = \frac{\tfrac{1}{2}a^3k}{\sqrt{(\mu - a^2k^2)}}.$$

unde derivamus

$$(\mathrm{V})_{(3)}. \qquad t = \frac{a}{nk}.\,\mathrm{Tang}\, n\varphi,$$

$$(\mathrm{V}.)_{(4)} \qquad \begin{cases} T = \dfrac{a}{nk} = \dfrac{a^2}{\sqrt{(\mu - a^2k^2)}} \\ \mu = \dfrac{a^4 + a^2k^2T^2}{T^2}. \end{cases}$$

5. Casus.

Sit vice versa $\mu - c^2 < 0$ et $k^2 - \frac{\mu}{a^2} > 0$, ita ut habeamus:

$$\varphi = \frac{c}{\sqrt{(c^2 - \mu)}}.\int_a^r \frac{\partial r}{r\sqrt{(-1 + \frac{a^2k^2 - \mu}{c^2 - \mu}.\frac{r^2}{a^2})}}.$$

Pari modo, quo in priore casu, facile intelligitur, curvam hac aequatione expressam puncto aliquo ornatam esse, cujus radius vector cum linea curvam tangente angulum includit rectum. Quare ponamus esse $c = ak$, i. e. $\lambda = \frac{1}{2}\pi$; quo posito valet aequatio

$$\varphi = \frac{ak}{\sqrt{(a^2k^2 - \mu)}}.\int_a^r \frac{\partial r}{r\sqrt{(-1 + \frac{r^2}{a^2})}}.$$

Si iterum $r = \frac{a}{x}$, $\frac{ak}{\sqrt{(a^2k^2 - \mu)}} = \frac{1}{n}$ introducatur, evadit

$$n\varphi = \int_1^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1 - x^2)}} = \arccos\left(\frac{a}{r}\right),$$

unde emergit aequatio:

$$(\mathrm{VI.}) \qquad r = \frac{a}{\cos n\varphi},$$

quae docet esse radium vectorem $= a$ pro $\varphi = 0$ atque $= \infty$ pro $\varphi = \pm\frac{\pi}{2n}$. Mobile igitur punctum a primo ipsius loco removetur in infinitum, dum angulus φ succrescit a valore 0 usque ad $\pm\frac{\pi}{2n}$, qui valor directionem utriusque asymptotae praescribit. Curva igitur ab ipsius vertice duo emittit membra plane congrua versus regiones oppositas in infinitum. (Conf. fig 5.)

Quia $n = \frac{\sqrt{(a^2k^2 - \mu)}}{ak} < 1$ est, erit $\frac{\pi}{2n} > 90^0$, atque quo minor n erit, eo major fiet $\frac{\pi}{2n}$. Unde colligimus, angulum φ non solum $> \frac{1}{2}\pi$ esse, verum etiam saepenumero fieri posse multiplum periodi 2π, priusquam $r = \infty$ evasit.

Si ad tempus non respiciamus curva propter periodicam functionem *cos* post saltum ex infinito negativo redibit atque circulum cum radio a constructum tanget, quum primum φ valorem $\pm\frac{\pi}{n}$ nactus erit. Tunc curva iterum a circulo removebitur usque in infinitum, et sic deinceps. Sed mox intelliges, punctum attractum habere non posse motum periodicum. Nimirum si curvae aream

$$(\text{VI.})_{(1)} \qquad \sigma = \tfrac{1}{2}a^2 . \int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\cos^2 n\varphi} = \frac{a^2}{2n} . \operatorname{tang} n\varphi ,$$

quae ipsa infinite magna evadere potest, cum factore $\frac{2}{c} = \frac{2}{ak}$ multiplicaveris, orietur

$$(\text{VI.})_{(2)} \qquad t = \frac{a}{kn} . \operatorname{tang} n\varphi ,$$

unde videmus, crescente φ a valore 0 usque ad $\frac{\pi}{2n}$, ipsum tempus in infinitum adaugescere. Punctum igitur sollicitatum adipiscitur infinitatem post infinitum tempus, i. e. nunquam redibit. Insuper, quoniam r pro $\varphi > \frac{\pi}{2n}$ negativus redditur, punctum mobile, ut redire posset, ab infinito positivo in negativum infinitum salire oporteret; id quod fierie non potest.

Nota. Iam summus *Newton* hunc attractionis casum consideravit; porro reperies eum in Mechanice *Poisson* et Ill[mi] *Duhamel*, sed prorsus aliter tractatum. At alii, quatenus rei notitiam acquisivi, casus nondum sunt examinati.

(Res. in fasc. prox.)

Druckfehler in diesem Heft.

Seite 190 Zeile 7 v. o. lies $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum\limits_{-\infty}^{+\infty}$ statt $\sum\limits_{+\infty}^{-\infty} \sum\limits_{+\infty}^{-\infty}$

» 191 » 3 v. o. » $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}$ » $\sum\limits_{+\infty}^{-\infty}$

» 191 » 10 v. o. sind in dem ersten Summenzeichen die Grenzen mit einander zu vertauschen.

» 191 » 2 v. u. lies $\vartheta(x+\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\tau)$ statt $\vartheta(x+\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{1}\tau)$.

» 192 » 3 v. u. » $\frac{ie^{-ix}}{\sqrt[8]{\varepsilon}}\gamma(x)$ statt $\frac{ie^{-ix}}{\sqrt[8]{\varepsilon}}y(x)$.

» 194 Formel (V.) » $\frac{-k'\psi(x)}{f(x)}$ statt $\frac{=k'\psi(x)}{f(x)}$.

» 195 Zeilen 5, 6, 7 v. o. lies γ' statt φ'.

» 195 Zeile 4 v. u. unter dem zweiten Integralzeichen lies im Nenner $\varphi(x)$ statt $\vartheta(x)$.

» 197 » 8 v. u. lies γ, θ statt φ, θ.

» 200 Formeln (38. und 40.) lies $\vartheta(x+y)\vartheta(x-y)$ und $\eta(x+y)\eta(x-y)$ resp.
statt $\vartheta(x+y).(x-y)$ und $\eta(x+y).(x-y)$.

» 206 Zeilen 5, 6 v. o. lies überall u, und v, statt u_1 und v_1.

» 207 Zeile 2 v. u. lies $\sin\mathrm{am}(u+v)$ statt $\sin\mathrm{am}(u+)v$.

» 212 Zeilen 8 v. o., 6, 7, 8, 9, 11 v. u. und Formeln (*a.*) (*b.*) (*c.*) (*d.*) lies überall t statt w oder w
und nur in den Zeilen 3, 4 und 5 von unten ist w beizubehalten.

» 217 Formel (68.) ist w, w' resp. statt ω, ω' zu setzen.

» 219 Zeilen 7, 8, 10, v. o. ist ω statt w zu setzen, und in Zeile 9 v. o. muss $\omega = \sin\mathrm{am}\left(\frac{\varrho x}{\pi}, \lambda\right)$
stehen; ebenso ist in den Zeilen 4 und 7 ω statt w zu setzen.

» 220 Formel (B.) im zweiten Integral muss λ^2 statt λ^1 stehen.

13.

De orbitis et motibus puncti cuiusdam corporei circa centrum attractivum aliis, quam Newtoniana, attractionis legibus sollicitati.

(Ab *Joh. Franc. Stader*, stud. math.)

(Vide No. 12. fasc. praec.)

---

§. 3.

Valeat lex attractionis expressa hac formula:

$$R = \frac{\frac{3}{2}\mu}{r^4}.$$

Quod ad coefficientem $\frac{3}{2}$ attinet, mihi dicendum est, si exponens radii vectoris est n, me semper adiungere facturem $\frac{1}{2}(n-1)$, qui $= 1$ est pro $n=3$, contra $= \frac{3}{2}$ pro $n = 4$ etc. Eodem modo quo supra primum invenitur

$$c^2 = k^2 - 2\int_a^r R.\partial r = k^2 - \mu\int_a^r \frac{3\partial r}{r^4}, \text{ igitur}$$

$$(1.) \qquad c^2 = k^2 - \frac{\mu}{a^3} + \frac{\mu}{r^3},$$

quo valore in generali orbitarum aequatione substituto, oritur

$$\varphi = \int_a^r \frac{c.\partial r}{r\sqrt{\left[-c^2 + \frac{\mu}{r} + \left(k^2 - \frac{\mu}{a^3}\right)r^2\right]}} \quad \text{sive}$$

$$(2.) \qquad \varphi = \int_a^r \frac{c.\partial r}{\sqrt{\left[\mu r - c^2 r^2 + \left(k^2 - \frac{\mu}{a^3}\right)r^4\right]}}$$

Neque μ neque c^2 esse possunt $= 0$, quapropter unus tantum casus singularis hic nobis occurrit, ubi est $k^2 - \frac{\mu}{a^3} = 0$.

1. Casus.

Sit $k^2 - \frac{\mu}{a^2} = 0$, igitur $\mu = k^2 a^2 = \frac{ac^2}{\sin^2\lambda}$, tunc evadit

$$(3.)\qquad c^2 = \frac{\mu}{r^2}$$

atque

$$\varphi = \int_a^r \frac{c\,\partial r}{\sqrt{(\mu r - c^2 r^2)}} = \int_a^r \frac{\partial r}{\sqrt{\left[r\left(\frac{\mu}{c^2} - r\right)\right]}} = \int_a^r \frac{\partial r}{\sqrt{\left[r\left(\frac{a}{\sin^2\lambda} - r\right)\right]}}.$$

Quaeritur, num in curva eruenda punctum aliquod exstet, ubi $\lambda = \frac{1}{2}\pi$ esse possit. Sane autem est

$$\operatorname{tang}\lambda = r \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{r}{\sqrt{\left[r\left(\frac{a}{\sin^2\lambda} - r\right)\right]}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{r\sin^2\lambda} - 1\right)}}$$

$$\text{ergo}\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\pi = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{r} - 1\right)}},$$

quod postulat, ut sit $r = a$. Quamobrem simplicissima positio est, si sumamus, celeritatem initialem puncto sollicitando ita impressam esse, ut angulus λ sit $= \frac{1}{2}\pi$ Hoc modo obtinemus:

$$(4.)\qquad \varphi = \int_a^r \frac{-\,\partial r}{\sqrt{[r(a - r)]}},$$

ubi signum — antepositum est, quod ex radicando intelligitur, radium vectorem r versari inter limites a et 0.

Denique ponendo $\frac{a - r}{r} = x^2$ habes pro $r = a$ limitem $x = 0$ et pro $r = 0$ limitem $x = \infty$, atque integrale ipsum mutatur in

$$\varphi = \int_0^x \frac{2\,\partial x}{1 + x^2} \quad \text{pro } x < \infty,$$

unde sequitur

$$\tfrac{1}{2}\varphi = \operatorname{arctang.} x = \operatorname{arctang.} \sqrt{\frac{a - r}{r}}$$

aut vice versa:

$$\operatorname{tang.}\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{a - r}{r}} \quad \text{unde}$$

$$(5.)\qquad r = a.\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Si denique $a = 4\varrho$ ponitur, emergit notissima aequatio

$$(\text{I.})\qquad r = 2\varrho(1 + \cos\varphi)$$

quae pertinet ad curvam, quam dicunt *cardioïden*, et quae procreatur, dummodo de omnibus rectis, ex aliquo peripheriae circuli cum radio ϱ constructi puncto ductis, attamen ibi exordiens, ubicunque rectis illis peripheria secatur, utrimque aequales abscideris partes longitudine datae diametri 2ϱ. Insuper cardioïdes etiam ea est *epicycloïdes*, in qua rotandi circuli radius par est radio fixi circuli. (Tab. V. fig. 6.)

In fixo illo circuli puncto vis attractiva sedem sibi collocavit, et mobile ex eo curvae puncto, quod a polo remotissimum est, petit hunc polum cum celeritate, quae omni momento crescit, ita ut ea in polo, propterea quod valet relatio $v^2 = \frac{\mu}{r^3}$, infinite magna sit. Cum eadem celeritate mobile a polo removetur et alterum curvae dimidium describit. Propter periodicam functionem $\cos\varphi$ motus ipse periodicus erit. Sane enim inveniemus, mobile, finito temporis intervallo praeterlapso, curvam circuiturum fuisse. Nimirum est

$$\partial\sigma = 2\varrho^2(1+\cos\varphi)^2\partial\varphi \quad \text{aut}$$
$$\partial\sigma = \varrho^2(3+4\cos\varphi+\cos 2\varphi)\partial\varphi,$$

unde integrando ab $\varphi = 0$ usque ad $\varphi = \varphi$ proficiscitur

$$\text{I}_{(1)}. \qquad \sigma = \varrho^2(3\varphi + 4\sin\varphi + \sin\varphi.\cos\varphi);$$

sed tota area Σ invenitur, si integramus ab $\varphi = 0$ usque ad $\varphi = 2\pi$, est igitur

$$\text{I}_{(2)}. \qquad \Sigma = 6\varrho^2\pi.$$

Denique, ut inde tempus derivetur, sectoris area cum $\frac{2}{c} = \frac{2}{ak} = \frac{1}{2\varrho.k}$ multiplicanda est; itaque habemus

$$\text{I}_{(3)}. \qquad \begin{cases} t = \frac{\varrho}{2k}(3\varphi + 4\sin\varphi + \sin\varphi.\cos\varphi) \\ T = 3\pi.\frac{\varrho}{k} = \frac{3}{4}\pi.\frac{a}{k}. \end{cases}$$

Unde, quia in hoc motu est $k^2 = \frac{\mu}{a^3}$, deducimus

$$T^2 = \frac{9}{16}\pi^2.\frac{a^5}{\mu} \text{ sive}$$

$$\text{I}_{(4)}. \qquad \mu = \frac{9}{16}\pi^2.\frac{a^5}{T^2}.$$

Faciamus nunc, alterum punctum corporeum iisdem dimensionibus praeditum in altera cardioïde, cuius diametrus $= a'$ est, circa eundem moveri polum. Quo posito μ non mutatur, sed T fiet T', ita ut habeamus aequationem

$$\mu = \frac{1}{16}\pi^2 \cdot \frac{a'^5}{T'^2}$$

quae cum priore combinata suppeditat relationem

$$(1.)_{(a)} \qquad \frac{a^5}{T^2} = \frac{a'^5}{T'^2}$$

i. e. *Pro omnibus punctis in diversis cardioïdibus circa eundum polum se moventibus, temporum **quadrata** in uno circuitu consumptorum proportionalia sunt **quintis** potentiis diametrorum.*

2. Casus.

Differentia illa $k^2 - \frac{\mu}{a^2}$ *positivo* gaudeat valore. Iam loco aeq. (2) scribamus:

$$(6.) \qquad \varphi = \frac{c}{\sqrt{(k^2 - \frac{\mu}{a^2})}} \cdot \int_\alpha^r \frac{\partial r}{\sqrt{\left[r\left(r^2 - \frac{c^2}{k^2 - \frac{\mu}{a^2}} r + \frac{\mu}{k^2 - \frac{\mu}{a^2}}\right)\right]}}$$

et quoniam quantitates μ et c^2 prorsus positivae sunt, collocemus

$$r^3 - \frac{c^2}{k^2 - \frac{\mu}{a^2}} r + \frac{\mu}{k^2 - \frac{\mu}{a^2}} = (r-\alpha)(r-\beta)(r+\gamma)$$

$$= r^3 - (\alpha+\beta-\gamma)r^2 - \{(\alpha+\beta)\gamma - \alpha\beta\}r + \alpha\beta\gamma,$$

unde membratim comparando colliges esse:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha+\beta-\gamma = 0 \\ (\alpha+\beta)\gamma - \alpha\beta = \frac{c^2}{k^2 - \frac{\mu}{a^2}} \\ \alpha\beta\gamma = \frac{\mu}{k^2 - \frac{\mu}{a^2}} \end{array}\right\} \text{ sive } \left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta = \gamma \\ \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \frac{c^2}{k^2 - \frac{\mu}{a^2}} \\ \alpha\beta(\alpha+\beta) = \frac{\mu}{k^2 - \frac{\mu}{a^2}}. \end{array}\right.$$

Quibus valoribus in (6) substitutis orietur:

$$(7.) \qquad \varphi = \sqrt{(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)} \cdot \int_\alpha^r \frac{\partial r}{\sqrt{[r(r-\alpha)(r-\beta)(r+\alpha+\beta)]}}$$

quae forma, quod ad radices α et β pertinet, symmetria gaudet. Ponamus esse $\alpha > \beta$, ita ut valores quatuor radicum sequantur hunc ordinem:

$$r_0 = \alpha$$
$$r_1 = \beta$$

$$r_2 = 0$$
$$r_3 = -(\alpha + \beta)\,.$$

Nunc quaeritur, qui sint valores radio vectori attribuendi. Quod diiudicaturus graphice construas functionem

$$y = (\alpha - r)(\beta - r)\,r\,(\alpha + \beta + r),$$

ponens r designare abscissas, y ordinatas. Quo facto illico intelligis, radicandum sive ordinatas y esse positivas, quamdiu

r aut inter limites 0 et β
" " " α et ∞
" " " $-(\alpha+\beta)$ et $-\infty$

versetur. Ultimum casum rejiciamus necesse est, propterea quod radius vector semper negativus erit. Restant igitur duo casus, ubi radicandus valore gaudet positivo; quapropter duo consideranda sunt integralia. Quod autem ad eorum limites attinet, limes inferior ad libidinem eligi potest. Itaque, quod ad simplicitatem plurimum valet, id amplectamur. Sed manifestum est, aeque aptum ac simplex esse, si ponamus, punctum ad motum sollicitatum fuisse, quum primum radius vector r extremos ipsius valores accepit, 0 et ∞ exceptis. Quo posito proficiscuntur haec duo integralia:

$$(8.)\qquad \varphi = \sqrt{(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}\,.\int_\beta^r \frac{-\partial r}{\sqrt{[r(\alpha - r)(\beta - r)(\gamma + r)]}}\;,\quad \beta > r > 0\,,$$

ubi valent aequationes:

$$(9.)\qquad c^2 = k^2 - \mu\,.\int_\beta^r \frac{3\partial r}{r^4} = k^2 - \frac{\mu}{\beta^3} + \frac{\mu}{r^3}$$

$$(10.)\qquad \begin{cases} \alpha + \beta = \gamma \\ \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \dfrac{c^2\beta^6}{\beta^6 k^2 - \mu} \\ \alpha\beta(\alpha + \beta) = \dfrac{\mu\beta^6}{\beta^6 k^2 - \mu} \end{cases}$$

atque

$$(11.)\qquad \varphi = \sqrt{(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}\,.\int_\alpha^r \frac{+\partial r}{\sqrt{[r(r - \alpha)(r - \beta)(r + \gamma)]}}\,,\quad \alpha < r < \infty\,,$$

ubi valent:

$$(12.)\quad c^2 = k^2 - \mu.\int_a^r \frac{3\partial r}{r^4} = k^2 - \frac{\mu}{a^3} + \frac{\mu}{r^3},$$

$$(13.)\quad \begin{cases} \alpha + \beta = \gamma \\ \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \dfrac{\varepsilon a^3}{a^3 k^2 - \mu} \\ \alpha\beta(\alpha + \beta) = \dfrac{\mu a^3}{a^3 k^2 - u} \end{cases}$$

Simul facile intelligitur, angulum λ, quem radius vector cum tangente facit, rectum esse illic pro $r = \beta$, hic pro $r = \alpha$; itaque illic est $c = \beta k$, hic $c = \alpha k$.

Utrumque integrale ducit ad functiones ellipticas primae speciei.

Consideratur primum integrale:

$$\varphi = \sqrt{(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}.\int_\beta^r \frac{-\partial r}{\sqrt{[r(\alpha - r)(\beta - r)(\gamma + r)]}}, \quad \beta > r > 0.$$

Posito $\frac{\beta - r}{r} = z^2$ oritur

$$\varphi = 2.\sqrt{\frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{(\alpha - \beta)(\beta + \gamma)}}.\int_0^z \frac{\partial z}{\sqrt{[(1 + \frac{\alpha}{\alpha - \beta}z^2)(1 + \frac{\gamma}{\beta + \gamma}z^2)]}}$$

$$\text{pro } 0 < z < \infty$$

quod, ut moduli inveniantur, cum generali formula

$$u = \int_0^{x} \frac{\partial x}{\sqrt{[(1 + x^2)(1 + \varkappa'^2 x^2)}} \quad \text{pro } x = \text{tang am } u$$

comparandum est. Quum autem sit $\frac{\alpha}{\alpha - \beta} < 1$ et $\frac{\gamma}{\beta + \gamma} < 1$, ponamus

$$(14.)\quad \begin{cases} \dfrac{\gamma}{\beta + \gamma} z^2 = \varkappa'^2 x^2 \\ \dfrac{\alpha}{\alpha + \beta} z^2 = x^2 \end{cases}$$

unde sequitur esse modulos:

$$(15.)\quad \begin{cases} \varkappa'^2 = \dfrac{\gamma(\alpha + \beta)}{\alpha(\beta + \gamma)} = \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + 2\alpha\beta} \\ \varkappa^2 = \dfrac{\beta(\alpha + \gamma)}{\alpha(\beta + \gamma)} = \dfrac{\beta^2 + 2\alpha\beta}{\alpha^2 + 2\alpha\beta} \end{cases}$$

atque

$$\varphi = 2\sqrt{\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha(\beta+\gamma)}}\cdot\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1+x^2)(1+\varkappa^2 x^2)}} \text{ pro } 0<x<\infty.$$

Si nunc $x = \operatorname{tang am} u$ ponitur, emergit

$$\varphi = 2\sqrt{\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^2+2\alpha\beta}}\cdot u$$

aut brevius

$$(16.)\qquad u = \varepsilon\varphi \text{ pro } \varepsilon = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha^2+2\alpha\beta}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}}.$$

Quo valore introducto habebis:

$$\operatorname{tang am} u = \operatorname{tang am}(\varepsilon\varphi) = x = z\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}\cdot\sqrt{\frac{\beta-r}{r}} \text{ unde}$$

$$\text{II.}\qquad \begin{cases} r = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha+(\alpha-\beta)\operatorname{tang}^2\operatorname{am}(\varepsilon\varphi)}, \text{ sive} \\ r = \dfrac{\alpha\beta\cos^2\operatorname{am}(\varepsilon\varphi)}{\alpha-\beta\sin^2\operatorname{am}(\varepsilon\varphi)} \end{cases}$$

quae est aequatio inter r et φ.

Orbita, quae puncto mobili describitur, facile construi licet. Nimirum enim $\varepsilon\varphi$ crescente a limite 0 usque ad limitem K*), decrescit r a valore β usque ad 0; mobile igitur petit centrum, ac quidem cum velocitate, quae omni momento augescit atque in centro infinite magna redditur. Motus autem sine intermissione perdurabit, propterea quod functiones ellipticae periodicae sunt, atque spatium, quod decrescente radio vectore ab β usque ad 0 describitur, finibus conclusum est. Is valor anguli φ, qui $\varepsilon\varphi$ adaequat cum K, designetur per Φ. Sin autem $\varepsilon\varphi$ secundum quadrantem percurrat, mobile a centro removebitur usque ad distantiam β, quo in puncto $\varepsilon\varphi = 2K$ aut $\varphi = 2\Phi$ evasit. Tunc denuo mobile ad centrum adpropinquat atque ipsum adipiscitur, simulac $\varepsilon\varphi = 3K$, aut $\varphi = 3\Phi$ factus est. Sic motus continuabitur. Curvae aequatio non mutatur ponendo $-\varepsilon\varphi$ loco $\varepsilon\varphi$, qua de causa versus regionem oppositam aeque talis curvae ductus evolvitur, quem modo descripsi. Ut curvam delineare possimus, scrutemur, quantus sit angulus Φ. Notissimum est, modularem quadrantem K esse maiorem, quam $\frac{1}{2}\pi$, itaque etiam erit

$$\varepsilon\Phi > \tfrac{1}{2}\pi,$$

sed factore

*) K, qui nominatur *quadrans modularis*, definitus est hoc integrali finito:

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)}} = \int_0^1\frac{\partial x}{\sqrt{((1-x^2)(1-\varkappa^2x^2))}}.$$

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha^2+2\alpha\beta}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}},$$

qui monade minor est, angulus Φ diminuitur, ergo est

$$\Phi > K$$

atque eo magis $$\Phi > \tfrac{1}{2}\pi,$$

quapropter curvae extrema delineamenta erunt, ut in (Tab. VI. Fig. 7). Postquam argumentum u sive $\varepsilon\varphi$ n^{ties} quadrantem modularem permeavit, itaque $\varphi = n.\Phi$ evasit, certe angulus φ saepenumero circuli circuitum, e. g. m^{ties}, percurrerit; si igitur ponere liceret

$$n\Phi = 2m\pi, \text{ aut}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{2\pi}.\Phi,$$

radius vector quadrante modulari finito eundem, quem quando antea, locum obtinere posset. Sed hoc postulat, ut ratio $\Phi:2\pi$ sit *commensurabilis;* id quod sane fortuito accideret. Quamobrem colligimus, in universum curvae finem abesse, eamque tot habere vertices, quoties radius vector adeptus erit maximum β. Itaque circulus cum radio β constructus omnes curvae vertices tangit.

Ex formula (II) deducimus

$$\partial\sigma = \tfrac{1}{2}r^2.\partial\varphi = \frac{\alpha^2\beta^2}{2\varepsilon}.\frac{\cos^4\text{am}\,u.\partial u}{(\alpha-\beta\sin^2\text{am}\,u)^2} = \frac{1}{2\varepsilon}.\left(\frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}\right)^2\frac{\cos^4\text{am}\,u.\partial u}{\left(1+\frac{\beta}{\alpha-\beta}\cos^2\text{am}\,u\right)^2}, \text{ aut}$$

$$\text{II}_{(1)}.\quad \sigma = \frac{1}{2\varepsilon}.\left(\frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}\right)^2\int_0^u\frac{\cos^4\text{am}\,u.\partial u}{\left(1+\frac{\beta}{\alpha-\beta}\cos^2\text{am}\,u\right)^2}$$

et area Σ, quae describitur, dum $\varepsilon\varphi = u$ crescit a valore 0 usque ad $\varepsilon\Phi = K$, erit:

$$(\text{II.})_{(2)}\qquad \Sigma = \frac{1}{2\varepsilon}.\left(\frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}\right)^2.\int_0^K\frac{\cos^4\text{am}\,u.\partial u}{\left(1+\frac{\beta}{\alpha-\beta}.\cos^2\text{am}\,u\right)^2}.$$

Hoc integrale formula reductionis adhibita ad integralia elliptica tertiae speciei reducere licet; sed id praetermittamus. Si denique hoc integrale cum factore $\frac{2}{e} = \frac{2}{\beta k}$ multiplicaveris, etiam tempus t habebis.

Consideratur alterum integrale:

$$(17.)\quad \varphi = \sqrt{(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}.\int_\alpha^r\frac{+\partial r}{\sqrt{[r(r-\alpha)(r-\beta)(r+\gamma)]}} \text{ pro } \alpha < r < \infty$$

Posito $\frac{r-\alpha}{r-\beta} = z^2$, novi limites erunt 0 et 1, atque integrale mutabitur in hoc:

$$\varphi = 2 \,.\, \sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha(\alpha+\gamma)}\right)} \cdot \int_0^z \frac{\partial z}{\sqrt{\left[\left(1-\frac{\beta}{\alpha}z^2\right)\left(1-\frac{\beta+\gamma}{\alpha+\gamma}z^2\right)\right]}} \text{ pro } z < 1 \,.$$

Sed haec forma nondum congruit cum forma principali

$$u = \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)]}} \text{ pro } x = \sin\operatorname{am} u \,,$$

quam ob causam ponamus

$$\frac{\beta}{\alpha} z^2 = \varkappa^2 x^2 \quad , \quad \frac{\beta+\gamma}{\alpha+\gamma} z^2 = x^2,$$

unde sequitur modulus

$$\varkappa^2 = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma},$$

qui ipse idem est, quem supra adhibuimus. Hac substitutione oriuntur limites $x = 0$ et $x = \sqrt{\frac{\beta+\gamma}{\alpha+\gamma}}$, quae fractio sincera est. Quo facto habemus nunc

$$\varphi = \sqrt{\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^2+2\alpha\beta}} \cdot \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{[(1+x^2)(1-\varkappa^2 x^2)]}} \text{ sive}$$

$$\varepsilon\varphi = \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)]}} \text{ pro } x < \sqrt{\frac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta}},$$

ubi valor coefficientis ε cum priore omnino congruit. Si nunc $x = \sin\operatorname{am} u$ posueris, eandem obtinemus relationem, quam supra invenimus,

$$\varepsilon\varphi = u$$

ita ut valet aequatio

$$x = \sin\operatorname{am}(\varepsilon\varphi).$$

Si praeterea ille angulus φ, qui adaequat x cum $\sqrt{\frac{\beta+\gamma}{\alpha+\gamma}}$, per η designetur, emergit

$$\sin^2\operatorname{am}(\varepsilon\varphi) = x^2 = \sin^2\operatorname{am}(\varepsilon\eta) \,.\, z^2 = \sin^2\operatorname{am}(\varepsilon\eta) \cdot \frac{r-\alpha}{r-\beta}, \text{ unde}$$

$$r = \frac{\alpha \sin^2\operatorname{am}(\varepsilon\eta) - \beta \sin^2\operatorname{am}(\varepsilon\varphi)}{\sin^2\operatorname{am}(\varepsilon\eta) - \sin^2\operatorname{am}(\varepsilon\varphi)} \,.$$

Crescente angulo φ a valore 0 usque ad η, crescit r a valore α usque ad ∞. Si φ magis augesceret, i. e. si φ valorem η transiret, r proximo momento $= -\infty$ fieret, ita ut punctum mobile ab uno infinito in alterum infinitum salire oporteret; id quod fieri non potest. Quum praeterea radius vector r non mute-

tur, quatenus $-\varphi$ loco φ collocatur, inde colligimus, curvam in vertice duobus ramis diffundi, qui ut *aliqua parabola,* usque in infinitum expanduntur, et quorum asymptotas angulus η determinat. (Taf. VI. fig. 8.)

Curvae quadratura ducit ad similem expressionem, quae supra nobis occurrit atque, formula recursionis adhibita, ad integralia elliptica tertiae speciei reducenda est; qua de causa hanc disquisitionem omittamus.

In utroque integrali sit $\alpha = \beta$.

Quo posito integranda sunt:

$$\varphi = \alpha\sqrt{3}\int_{\alpha}^{r}\frac{\partial r}{(\alpha-r)\sqrt{[r(r+2\alpha)]}} \text{ pro } 0 < r < \alpha$$

et

$$\varphi = \alpha\sqrt{3}\int_{\alpha}^{r}\frac{\partial r}{(r-\alpha)\sqrt{[(r(r+2\alpha)]}} \text{ pro } \alpha < r < \infty,$$

ubi nunc valet $\alpha^3 = \frac{3\mu}{2k^2}$, aut $\alpha = \frac{3\mu}{2c^2}$.

Ponendo $\frac{r+2\alpha}{3r} = x^2$, invenies limites novos esse in priore integrali 1 et ∞, in altere 1 et $\sqrt{\frac{1}{3}}$; porro esse $r = \frac{2\alpha}{3x^2-1}$, $\partial r = \frac{-12\alpha x\partial x}{(3x^2-1)}$, ideoque

$$\tfrac{1}{2}\varphi = \int_{1}^{x}\frac{\partial x}{x^2-1} \text{ pro } x > 1,$$

$$\tfrac{1}{2}\varphi = \int_{1}^{x}\frac{-\partial x}{1-x^2} \text{ pro } \sqrt{\tfrac{1}{3}} < x < 1.$$

Quia utrumque integrale in limite inferiore infinite magnum redditur, integremus in altero limite incipientes, ita ut habeamus:

$$(18.)\qquad \tfrac{1}{2}\varphi = \int_{\infty}^{x}\frac{-\partial x}{x^2-1} \text{ pro } x > 1 \text{ atque}$$

$$(19.)\qquad \tfrac{1}{2}\varphi = \int_{\sqrt{\frac{1}{3}}}^{x}\frac{\partial x}{1-x^2} \text{ pro } \sqrt{\tfrac{1}{3}} < x < 1$$

unde proficiscuntur:

$$\tfrac{1}{2}\varphi = \text{Arc Cot.}\,x \qquad \text{atque}$$

$$\tfrac{1}{2}\varphi = \text{Arc Tang.}\,x - \text{Arc Tang.}\sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Si $\text{Arc Tang.}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\nu$ posueris, emergent aequationes:

$$\mathfrak{Cot}\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{r+2a}{3r}},$$

$$\mathfrak{Tang}\tfrac{1}{2}(\nu+\varphi) = \sqrt{\frac{r+2a}{3r}}, \text{ aut}$$

$$\text{IV.} \qquad r = \frac{2a}{3\,\mathfrak{Cot}^2\tfrac{1}{2}\varphi - 1} = a\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,\varphi - 1}{\mathfrak{Cos}\,\varphi + 2},$$

$$\text{V.} \qquad r = \frac{2a}{3\,\mathfrak{Tang}^2\tfrac{1}{2}(\nu+\varphi) - 1} = a\,\frac{\mathfrak{Cos}(\nu+\varphi)+1}{\mathfrak{Cos}(\nu+\varphi)-2},$$

ubi $\mathfrak{Cos}\,\nu = 2$ est.

Quum sit $\mathfrak{Cos}\,0 = 1$ et $\mathfrak{Cos}\,\infty = \infty$, docet aequatio (IV.), crescente angulo φ a valore 0 usque ad ∞, radium vectorem r succrescere a valore 0 usque ad a. Simul aequatio non mutatur, posito $-\varphi$ loco φ. Itaque curva *dupla aliqua spiralis* est, cuius vertex in circulo cum radio a constructo iacet, et cuius duo rami innumeris circa centrum volutationibus factis ad centrum ipsum perveniunt. Huic curvae magna similitudo est cum illa: $r = \frac{a}{\mathfrak{Cos}\,n\varphi}$ in priore §. sub V. considerata (conf. fig. 4.).

Sed altera aequatio (V.) ostendit, radium vectorem r, augescente angulo φ a valore 0 usque ad ∞, decrescere ab ∞ usque ad a. Curva igitur est *aliqua spiralis*, quae post innumeras revolutiones circa centrum ex infinito progressa sensim ad circulum cum radio a constructum appropinquat (Conf. fig. 9.). Quod autem pertinet ad relationes inter tempus et spatium, motum exordiri in iis punctis, ubi $r = a$ est, sinere non possumus, propterea quod ita integravimus, ut φ pro $r = a$ sit infinite magnus; neque minus in iis punctis motus incipere potest, ubi $\varphi = 0$ est. Namque in prima curva est $r = 0$ pro $\varphi = 0$, unde sequitur, ibi celeritatem initialem esse oportere infinite magnam; in altera curva pro $\varphi = 0$ evadit $r = \infty$. Qua de causa inter alios limites integrandum est; id quod nullam difficultatem habet, sed implicitas offert expressiones.

3. Casus.

Differentia illa $k^2 - \frac{\mu}{a^3}$ in integrali (2) sit *negativa*. Hoc posito obtinemus

$$(20.) \qquad \varphi = \frac{c}{\sqrt{(\frac{\mu}{a^3}-k^2)}}\cdot\int_a^r \frac{\partial r}{\sqrt{\left[-r\left(r^3+\frac{c^2}{\frac{\mu}{a^3}-k^2}\,r-\frac{\mu}{\frac{\mu}{a^3}-k^2}\right)\right]}}$$

Quoniam prima potentia radii vectoris r coefficiente positivo praedita est, cubica aequatio

$$r^3 + \frac{c^2}{\frac{\mu}{a^3}-k^2}\,r - \frac{\mu}{\frac{\mu}{a^3}-k^2} = 0$$

duas habet radices imaginarias. Qua de causa ponere licet:

$$r^3 + \frac{c^2}{\frac{\mu}{a^3} - k^2} r - \frac{\mu}{\frac{\mu}{a^3} - k^2}$$

$$= (r-p)(r+\tfrac{1}{2}p+qi)(r+\tfrac{1}{2}p-qi)$$

$$= (r-p)(r^2+pr+\tfrac{1}{4}p^2+q^2)$$

$$= r^3 + (q^2 - \tfrac{3}{4}p^2)r - p(\tfrac{1}{4}p^2+q^2)$$

unde sequitur esse

$$(21.)\quad \begin{cases} \dfrac{c^2}{\frac{\mu}{a^3} - k^2} = q^2 - \tfrac{3}{4}p^2, \text{ igitur } 4q^2 > 3p^2 \\ \dfrac{\mu}{\frac{\mu}{a^3} - k^2} = p(\tfrac{1}{4}p^2 + q^2) \end{cases}$$

Praeterea liquet, radium vectorem r tantummodo inter limites p et 0 versari posse; quare ponamus esse $a = p$, aut $\lambda = \frac{1}{2}\pi$. Quo facto orietur:

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4q^2 - 3p^2)}.\int_p^r \frac{-\partial r}{\sqrt{[r(p-r)(r^2+pr+\frac{1}{4}p^2+q^2)]}}.$$

Si nunc ponitur

$$\frac{p-r}{r} = z^2,$$

mutatur integrale in hoc:

$$\varphi = 2\sqrt{(4q^2-3p^2)}.\int_0^z \frac{\partial z}{\sqrt{[(9p^2+4q^2)+2(3p^2+4q^2)z^2+(p^2+4q^2)z^4]}}$$

pro $0 < z < \infty$.

Brevitatis gratia sit

$$(22.)\quad \begin{cases} 9p^2 + 4q^2 = m^2 \\ p^2 + 4q^2 = n^2 \\ 3p^2 + 4q^2 = mn\gamma \end{cases}$$

igitur

$$(23.)\quad \begin{cases} \gamma = \dfrac{m^2+3n^2}{4mn} \\ 2\sqrt{(4q^2-3p^2)} = \sqrt{(6n^2-2m^2)}. \end{cases}$$

Tunc fit

$$\varphi = \sqrt{(6n^2-2m^2)}.\int_0^z \frac{\partial z}{\sqrt{(m^2+2mn\gamma.z^2+n^2z^4)}}, \quad 0 < z < \infty,$$

quod integrale comparandum est cum generali formula

$$u = \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{[1+2(\varkappa'^2-\varkappa^2)x^2+x^4]}}$$

$$\text{pro } x = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}2u = \operatorname{tang}\operatorname{am}u.\Delta\operatorname{am}u.$$

Scribamus igitur primum:

$$\varphi = \sqrt{\frac{6n^2-2m^2}{m^2}}\cdot\int_0^x \frac{\partial z}{\sqrt{(1+2\gamma\cdot\frac{n}{m}z^2+\frac{n^2}{m^2}z^4)}}$$

atque radicandum $1+2\gamma.\frac{n}{m}z^2+\left(\frac{n}{m}z^2\right)^2$ cum illo radicando $1+2(\varkappa'^2-\varkappa^2)x^2+x^4$ membratim adaequemus. Inde sequitur esse $\frac{n}{m}z^2 = x^2$, $\partial z = \partial x\sqrt{\frac{m}{n}}$,

$$\gamma\cdot\frac{n}{m}z^2 = (\varkappa'^2-\varkappa^2)x^2 = (1-2\varkappa^2)x^2, \text{ igitur}$$

$$\gamma = 1-2\varkappa^2,$$

unde

$$(24.)\quad \left\{\begin{aligned} \varkappa &= \sqrt{\frac{1-\gamma}{2}} = \sqrt{\frac{(m-n)(3n-m)}{8mn}},\\ \varkappa' &= \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}} = \sqrt{\frac{(m+n)(3n+m)}{8mn}};\end{aligned}\right.$$

quibus substitutionibus transit integrale in hoc:

$$\varphi = \sqrt{\frac{6n^2-2m^2}{mn}}\cdot\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{[1+2(\varkappa'^2-\varkappa^2)x^2+x^4]}},\quad 0<x<\infty.$$

Si denique $\sqrt{\frac{mn}{6n^2-2m^2}} = \varepsilon$ et $x = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}2u$ ponitur, emergit

$$u = \varepsilon\varphi,$$

igitur

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\operatorname{am}2u = \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\operatorname{am}(2\varepsilon\varphi) = x^2 = \frac{n}{m}z^2 = \frac{n}{m}.\frac{p-r}{r},$$

unde

$$\text{VI.}\qquad r = \frac{pn}{n+m.\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\operatorname{am}(2\varepsilon\varphi)},$$

$$\text{ubi valet}\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}(2\varepsilon\varphi) = \operatorname{tang}\operatorname{am}(\varepsilon\varphi).\Delta\operatorname{am}(\varepsilon\varphi) = \frac{\sin\operatorname{am}(\varepsilon\varphi)}{\sin\operatorname{coam}(\varepsilon\varphi)}.$$

Si $u=\varepsilon\varphi$ crescit a valore 0 usque ad K, fit $\operatorname{am}2u=\pi$, igitur $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}2u=\infty$, quare decrescit radius vector r a valore p usque ad 0; magis crescente φ simul augescit r, ac quidem erit $r=p$, si $u=\varepsilon\varphi=2K$ evaserit; pro $u=3K$ iterum erit $r=0$, et sic deinceps. Itaque motus est periodicus propter periodicam functionem. Omnino igitur curva perpetuo circulum cum radio p constructum invicem tangit eiusque per centrum transit, ubi vis attractiva sedem sibi collocavit. Simul vides, aequationem non mutari, si $-\varphi$ loco φ ponatur; unde sequitur, a

primo vertice in contrariam partem aeque talem evagari curvam excurrentem. Curva igitur similitudinem speciemque gerit illius, quam sub (II.) invenimus. (Tab. VI. fig. 7.).

Gubernet lex attractionis determinata hac formula:

$$R = \frac{2\mu}{r^5}$$

§. 4.

Iterum primum derivemus velocitatem v. Secundum formulam (I. §. 1.) statim obtinebis aequationem

$$(1.) \qquad v^2 = k^2 - \int_a^r \frac{4\mu}{r^5} \cdot \partial r = k^2 - \frac{\mu}{a^4} + \frac{\mu}{r^4},$$

quam si in formula (II. §. 1.) substitueris, orietur

$$(2.) \qquad \varphi = \int_a^r \frac{c\partial r}{\sqrt{\left[\mu - c^2 r^2 + \left(k^2 - \frac{\mu}{a^4}\right) r^4\right]}}.$$

Primum consideremus *singularem* casum, ubi est

$$k^2 - \frac{\mu}{a^4} = 0 \quad , \quad v^2 = \frac{\mu}{r^4}.$$

Quo posito habemus

$$\varphi = \int_a^r \frac{c\partial r}{\sqrt{(\mu - c^2 r^2)}},$$

aut, quia $\mu = a^4 k^2 = \frac{a^2 c^2}{\sin^2 \lambda}$ est:

$$\varphi = \int_a^r \frac{\partial r}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{\sin^2 \lambda} - r^2\right)}},$$

unde deducimus:

$$\tang \lambda = r . \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{r}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{\sin^2 \lambda} - r^2\right)}}, \quad \text{itaque}$$

$$\tang \tfrac{1}{2}\pi = \frac{r}{\sqrt{(a^2 - r^2)}} = \frac{r}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{r^2} - 1\right)}}.$$

quod conveniet, si $r = a$ evaserit. Quapropter simplicitatis gratia initialem vim puncto movendo ita impressam esse ponamus, ut ipsius directio primam radii vectoris directionem sub angulis rectis dissecaverit. Quia $0 < r < a$ est, in integrali nostro signum — adhuc desideratur. Quare valet

$$\varphi = \int_a^r \frac{-\partial r}{\sqrt{(a^2 - r^2)}} = \arccos\left(\frac{r}{a}\right),$$

unde proficiscitur *aequatio circuli:*

$$\text{I.} \qquad r = a.\cos\varphi = 2\varrho\cos\varphi$$

relata ad polares coordinatas, quarum initium in circuli cum radio ϱ constructi peripheria positum est.

Sine negotio invenitur sectoris area

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\int_0^\varphi r^2\partial\varphi = 2\varrho^2\int_0^\varphi \cos^2\varphi.\partial\varphi = \varrho^2\int_0^\varphi (1 + \cos 2\varphi)\partial\varphi, \text{ sive}$$

$$\text{I.}_{(1)} \qquad \sigma = \varrho^2(\varphi + \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi) = \varrho^2(\varphi + \sin\varphi.\cos\varphi),$$

unde integrando a $\varphi = 0$ usque $\varphi = \pi$ *tota area* procedit:

$$\text{I.}_{(2)} \qquad \Sigma = \pi\varrho^2;$$

ut notissimum est. Tempus inde deducimus multiplicando sectorem cum factore $\frac{2}{c} = \frac{2}{ak} = \frac{1}{\varrho k}$; itaque est

$$\text{I.}_{(3)} \qquad t = \frac{\varrho}{k}(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) \text{ pro } \varphi < \tfrac{1}{2}\pi,$$

dum tempus in uno circuitu consumptum habet valorem

$$\text{I.}_{(4)} \qquad T = \pi.\frac{\varrho}{k},$$

aut, quia posuimus esse $\mu = a^4 k^2$, igitur $k = \sqrt{\mu} : a^2 = \sqrt{\mu} : 4\varrho^2$, etiam erit

$$\text{I.}_{(5)} \qquad T = \frac{4\pi\varrho^3}{\sqrt{\mu}}, \quad \text{itaque } \sqrt{\mu} = \frac{4\pi\varrho^3}{T}.$$

Ponamus nunc, alterum mobile punctum iisdem dimensionibus possidere eundem polum, ita ut, quoniam $\sqrt{\mu}$ non mutatur, valeat relatio

$$\sqrt{\mu} = \frac{4\pi\cdot\varrho'^3}{T'},$$

unde sequitur esse

$$\text{I.}_{(6)} \qquad \frac{\varrho^3}{T} = \frac{\varrho'^3}{T'},$$

i. e. *Si in circulis in eodem puncto, ubi vis attractiva posita est, sese tangen-*

tibus diversa puncta corporea moventur, ***tempora ipsa*** *in uno circuitu consumpta proportionalia sunt* ***cubo*** *radiorum.*

Casus generalior.

1. Differentia $k^2 - \frac{\mu}{\alpha^4}$ sit positiva.

Nunc radicandus integralis

$$(3.)\quad \varphi = \frac{c}{\sqrt{(k^2 - \frac{\mu}{\alpha^4})}} \cdot \int_\alpha^r \frac{\partial r}{\sqrt{\left(\frac{\mu}{k^2 - \frac{\mu}{\alpha^4}} - \frac{c^2}{k^2 - \frac{\mu}{\alpha^4}} r^2 + r^4\right)}}$$

propter ipsius formam biquadraticam ita scribatur:

$$(a^2 - r^2)(\beta^2 - r^2) = a^2\beta^2 - (a^2 + \beta^2) r^2 + r^4,$$

unde comparando invenies esse:

$$a^2\beta^2 = \frac{\mu}{k^2 - \frac{\mu}{\alpha^4}}, \quad a^2 + \beta^2 = \frac{c^2}{k^2 - \frac{\mu}{\alpha^4}};$$

quare oritur

aut $$\varphi = \sqrt{(a^2 + \beta^2)} \int_\alpha^r \frac{\partial r}{\sqrt{[(a^2 - r^2)(\beta^2 - r^2)]}}$$

aut $$\varphi = \sqrt{(a^2 + \beta^2)} \int_\alpha^r \frac{\partial r}{\sqrt{[(r^2 - a^2)(r^2 - \beta^2)]}},$$

prout r minor aut maior est quam utraque radix. Sit $a > \beta$; quam ob rem in prima aequatione ponamus $r = \beta x$, in altera $r = ax$; est igitur:

$$\text{aut } \varphi = \frac{\sqrt{(a^2 + \beta^2)}}{a} \cdot \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^x \frac{-\partial x}{\sqrt{\left[(1 - x^2)(1 - \frac{\beta^2}{a^2} x^2)\right]}},$$

$$\text{aut } \varphi = \frac{\sqrt{(a^2 + \beta^2)}}{a} \cdot \int_{\frac{\alpha}{a}}^x \frac{\partial x}{\sqrt{\left[(x^2 - 1)(x^2 - \frac{\beta^2}{a^2})\right]}}.$$

Iam perspicies, in uno integrali valorem variabilis x inter limites 1 et 0, in altero inter limites 1 et ∞ versari posse. Quapropter simplicitatis gratia ponamus, in utroque casu primam radii vectoris directionem esse eam, ubi $x = 1$ est; obtinemus igitur

$$(4.)\qquad \varphi = \frac{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}{\alpha}\cdot\int_1^x \frac{-\partial x}{\sqrt{\left[(1-x^2)(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}x^2)\right]}}$$

$$(5.)\qquad \varphi = \frac{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}{\alpha}\cdot\int_1^x \frac{\partial x}{\sqrt{\left[(x^2-1)(x^2-\frac{\beta^2}{\alpha^2})\right]}}$$

ac quidem valent in primo integrali relationes

$$(6.)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha^2\beta^2 &= \frac{\mu}{k^2-\frac{\mu}{\beta^4}} \\ \alpha^2+\beta^2 &= \frac{c^2}{k^2-\frac{\mu}{\beta^4}} \end{aligned}\right\} \text{ unde } \left\{\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{\beta^2\mu}{\beta^4k^2-\mu} \text{ pro} \\ c^2 &= \beta^2k^2, \end{aligned}\right.$$

atque in altero integrali:

$$(7.)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha^2\beta^2 &= \frac{\mu}{k^2-\frac{\mu}{\alpha^2}} \\ \alpha^2+\beta^2 &= \frac{c^2}{k^2-\frac{\mu}{\alpha^2}} \end{aligned}\right\} \text{ unde } \left\{\begin{aligned} \beta^2 &= \frac{\alpha^2\mu}{\alpha^4k^2-\mu} \text{ pro} \\ c^2 &= \alpha^2k^2. \end{aligned}\right.$$

Si denique $\frac{\beta^2}{\alpha^2}$ = modulo $\varkappa^2$ atque in primo integrali $x = \sin\operatorname{coam} u$, in altero $x = \frac{\Delta\operatorname{am} u}{\cos\operatorname{am} u} = \frac{1}{\sin\operatorname{coam} u}$ posueris, emergent aequationes

$$\varphi = u\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}} = u.\sqrt{(1+\varkappa^2)} = \frac{\beta c}{\sqrt{\mu}}\cdot u,$$

$$\text{II.}\qquad r = \beta.\sin\operatorname{coam}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{(1+\varkappa^2)}}\right)$$

atque

$$\text{III.}\qquad r = \frac{\alpha}{\sin\operatorname{coam}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{(1+\varkappa^2)}}\right)}.$$

Quoniam $\sin\operatorname{coam} u$ et $= \sin\operatorname{am}(K-u)$ et $= \sin\operatorname{am}(K+u)$ est, aequationes nostras scribere possumus:

$$r = \beta\sin\operatorname{am}\left(K+\frac{\varphi}{\sqrt{(1+\varkappa^2)}}\right)$$

$$r = \frac{\alpha}{\sin\operatorname{am}\left(K+\frac{\varphi}{\sqrt{(1+\varkappa^2)}}\right)}.$$

Si nunc φ succrescit a valore 0 usque ad $K\sqrt{(1+\varkappa^2)}$, crescit $\sin\operatorname{am}\left(K+\frac{\varphi}{\sqrt{(1+\varkappa^2)}}\right)$ a valore 1 usque ad 0; itaque illic radius vector a valore

β usque ad 0 decrescit, hic a valore α usque ad ∞ augescit. Magis crescente angulo φ in utroque casu radius vector negativus redditur. In ultima curva statim intelliges, radium vectorem, ut primum $\varphi > K.\sqrt{(1+\varkappa^2)}$ evasit, a positivo infinito in negativum infinitum salire, id quod a puncti motu abhorret. Itaque haec curva similis est *cuidam parabolae*, quae ab ipsius vertice in distantia $r = \alpha$ posito emittit duos ramos, quorum asymptotae determinantur valore $\varphi = \sqrt{(1+\varkappa^2)}.K$. Quoniam omnino modularis quadrans $K > \frac{1}{2}\pi$ est, a fortiori erit $K.\sqrt{(1+\varkappa^2)} > \frac{1}{2}\pi$. Qua de causa accidere potest, ut ambo rami circulum cum radio α constructum includentes semetipsos saepius perscindant, priusquam adipiscuntur infinitum (Tab. VI. Fig. 11.)

Quod autem ad priorem curvam pertinet, negativus r facile interpretari potest. Siquidem, quandocunque r negativus est, ipsius valores in contrariam directionem a polo egrediens construxeris, curva orietur continua, quae nusquam interrupta est. Quum autem valeat $\sin \operatorname{am}(2m.K) = 0$ atque $\sin \operatorname{am}((2m+1)K) = (-1)^m$, dummodo m numerus sit integer, radius vector statis auctibus ac diminutionibus crescit decrescitque, ita ut curva sine ulla intermissione invicem modo circulum cum radio β constructum tangat, modo centrum eius pervadat. In universum curva non concludetur, nisi ratio $K.\sqrt{(1+\varkappa^2)} : 2\pi$ commensurabilis reddatur. (Fig. 10.)

Quadratura utriusque curvae nullo negotio efficitur. Nimirum obtinemus pro priore curva

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\beta^2 \int_0^\varphi \sin^2 \operatorname{coam} u.\partial\varphi = \tfrac{1}{2}\beta^2.\sqrt{(1+\varkappa^2)}.\int_0^u \sin^2 \operatorname{coam} u.\partial u.$$

Si ellipticum integrale secundae speciei $\int_0^u \Delta^2 \operatorname{am} u.\partial u$ designatur per $\operatorname{el}(u)$ *) et totum integrale

$$\int_0^K \Delta^2 \operatorname{am} u.\partial u = \operatorname{el}(K) \text{ per } E, \text{ inde facile deducimus:}$$

$$\int_0^u \sin^2 \operatorname{am} u.\partial u = \frac{u - \operatorname{el}(u)}{\varkappa^2}$$

unde sequitur esse

$$\sin^2 \operatorname{coam} u.\partial u = -\partial\left(\frac{K-u-\operatorname{el}(K-u)}{\varkappa^2}\right) = \frac{\partial u + \partial \operatorname{el}(K-u)}{\varkappa^2},$$

---

*) Hoc symbolum *Gudermanni* alteri $E(u)$, quod *Jacobi*, nova variabili $u = F(\varkappa, \varphi)$ introducta, *Fundamentis* ipsius iam editis, in huius diarii tomo IV. (pag. 373) praecepit, praeponendum esse putavi, propterea quod illud facile cum E commutatur, praesertim quum, ut in functionibus ellipticis primae speciei fieri solet, simplicitatis gratia modulus $\varkappa$ demittatur. Etenim si in $E(u)$ posueris loco argumenti u ipsius complementum $K-u$, expressione $E(K-u)$ etiam significari posse ellipticum quadrantem E, qui multiplicatus est cum $K-u$, plane perspicuum erit.

atque integrando:

$$\int_0^u \sin^2 \operatorname{coam} u . \partial u = \frac{u - [E - \operatorname{el}(K-u)]}{\varkappa^2},$$

cuius loco ope notissimae relationis

$$E = \operatorname{el}(u) + \operatorname{el}(K-u) - \varkappa^2 \sin \operatorname{am} u . \sin \operatorname{coam} u$$

scribere possumus

$$\int_0^u \sin^2 \operatorname{coam} u . \partial u = \frac{u + \varkappa^2 \sin \operatorname{am} u . \sin \operatorname{coam} u - \operatorname{el} u}{\varkappa^2},$$

quo integrali adhibito erit sectoris area

$$\text{II}_{(1)}. \quad \sigma = \frac{\beta^2 \sqrt{(1+\varkappa^2)}}{2\varkappa^2}(u - \operatorname{el} u + \varkappa^2 . \sin \operatorname{am} u . \sin \operatorname{coam} u)$$

unde tota area Σ, quam curva a vertice usque ad centrum includit, invenitur ponendo $u = K$, est igitur

$$\text{II}_{(2)}. \qquad \Sigma = \frac{\beta^2 \sqrt{(1+\varkappa^2)}}{2\varkappa^2}(K-E).$$

Notissimae sunt series pro quadrantibus K et E, ac quidem est

$$K = \tfrac{1}{2}\pi \left\{ 1 + (\tfrac{1}{2}\varkappa)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\varkappa^2\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\varkappa^3\right)^2 + \dots \right\} \text{ et}$$

$$E = \tfrac{1}{2}\pi \left\{ 1 - \frac{1}{1}(\tfrac{1}{2}\varkappa)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\varkappa^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\varkappa^3\right)^2 - \dots \right\},$$

unde proficiscitur

$$K - E = \pi \left\{ \frac{1}{1}(\tfrac{1}{2}\varkappa)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\varkappa^2\right)^2 + \frac{3}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\varkappa^3\right)^2 + \frac{4}{7}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\varkappa^4\right)^2 + \dots \right\}.$$

Pro altera curva nanciscimur integrale

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\alpha^2 \int_0 \frac{\partial \varphi}{\sin^2 \operatorname{coam} u} = \tfrac{1}{2}\alpha^2 . \sqrt{(1+\varkappa^2)} \cdot \int_0^u \frac{\partial u}{\sin^2 \operatorname{coam} u}$$

quod hoc modo invenitur. Differentiando $\log \cos \operatorname{am} u$ obtinebis

$$\frac{\partial \log \cos \operatorname{am} u}{\partial u} = -\operatorname{tang} \operatorname{am} u . \Delta \operatorname{am} u, \text{ atque}$$

$$\frac{\partial^2 \log \cos \operatorname{am} u}{\partial u^2} = \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} u - \frac{\Delta^2 \operatorname{am} u}{\cos^2 \operatorname{am} u}$$

$$= 1 - \Delta^2 \operatorname{am} u - \frac{1}{\sin^2 \operatorname{coam} u},$$

unde integrando emergit

$$-\operatorname{tang} \operatorname{am} u . \Delta \operatorname{am} u = u - \operatorname{el} u - \int_0^u \frac{\partial u}{\sin^2 \operatorname{coam} u}, \text{ itaque est}$$

$$\int_0^u \frac{\partial u}{\sin^2 \operatorname{coam} u} = \operatorname{tang}\operatorname{am} u . \Delta \operatorname{am} u + u - \operatorname{el} u,$$

ita ut habeamus

$$\text{III}_{(1)}. \quad \sigma = \tfrac{1}{4}\alpha^2 . \sqrt{(1+\varkappa^2)} . (\operatorname{tang}\operatorname{am} u . \Delta \operatorname{am} u + u - \operatorname{el} u).$$

Iam intelliges, sectoris huius aream infinite magnam fieri pro $u = K$, id quod valde convenit, quippe quum radius vector pro $u = K$ ipse infinite magnus reddatur.

Tempus a vertice usque ad aliquem locum praeterlapsum invenies, si illum sectorem cum $\frac{2}{c} = \frac{2}{k\beta}$, hunc cum $\frac{2}{c} = \frac{2}{ak}$ multiplicaveris; itaque habebimus pro illa curva:

$$\text{II}_{(3)}. \quad t = \frac{\beta}{k} . \frac{\sqrt{(1+\varkappa^2)}}{\varkappa^2} (u - \operatorname{el} u + \varkappa^2 \sin \operatorname{am} u . \sin \operatorname{coam} u)$$

et totum tempus a vertice usque ad centrum consumptum erit

$$\text{II}_{(4)}. \qquad T = \frac{\beta}{k} . \frac{\sqrt{(1+\varkappa^2)}}{\varkappa^2} (K - E),$$

(ubi celeritas initialis k non est commutanda cum modulo $\varkappa$.)

Pro altera curva obtinebis

$$\text{III}_{(2)}. \qquad t = \frac{\alpha}{k} \cdot \sqrt{(1+\varkappa^2)} (\operatorname{tang}\operatorname{am} u . \Delta \operatorname{am} u + u - \operatorname{el} u),$$

sed totum tempus fiet hic $= \infty$.

Singularis casus.

Sit in utroque integrali $\alpha = \beta$.

Tunc ex aequationibus 4 et (5) proficiscuntur hae novae:

$$\varphi = \sqrt{2} \int_1^x \frac{-\partial x}{1 - x^2} \text{ pro } x < 1,$$

$$\varphi = \sqrt{2} \int_1^x \frac{+\partial x}{x^2 - 1} \text{ pro } x > 1.$$

Sed quia functiones pro $x = 1$ infinite magnae redduntur, ita integrare malimus, ut functiones in limite inferiore evanescant; quare habemus

$$\varphi \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \int_0^x \frac{+\partial x}{1 - x^2} \text{ pro } x < 1$$

$$\varphi \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \int_\infty^x \frac{-\partial x}{x^2 - 1} \text{ pro } x > 1,$$

unde procedunt aequationes

$$\text{IV.} \qquad r = \alpha . \mathfrak{Tang} \frac{\varphi}{\sqrt{2}} ,$$

$$\text{V.} \qquad r = \alpha . \mathfrak{Cot} \frac{\varphi}{\sqrt{2}} ,$$

quarum prima ad *curvam spiralem* in circulo cum radio α constructo contentam, altera ad *spiralem aliquam* pertinet, cui summa similitudo est cum illa in (§. 3. V) descripta, ex infinito progrediente sensimque ad circulum cum radio α constructum prope accedente.

Quia limites mutavimus, ad tempus eruendum inter alios limites, scilicet φ_0 et φ, integretur necesse est. Statim obtinemus

$$\sigma = \frac{\alpha^2}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \mathfrak{d} \varphi \, \mathfrak{Tang}^2 \frac{\varphi}{\sqrt{2}} \quad \text{atque}$$

$$\sigma = \frac{\alpha^2}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \mathfrak{d} \varphi \, \mathfrak{Cot}^2 \frac{\varphi}{\sqrt{2}} .$$

Quum autem sit

$$\mathfrak{d} \mathfrak{Tang} x = \mathfrak{d} x (1 - \mathfrak{Tang}^2 x),$$

$$\mathfrak{d} \mathfrak{Cot} x = - \mathfrak{d} x (\mathfrak{Cot}^2 x - 1), \text{ igitur}$$

$$\mathfrak{d} x . \mathfrak{Tang}^2 x = \mathfrak{d} x - \mathfrak{d} \mathfrak{Tang} x,$$

$$\mathfrak{d} x . \mathfrak{Cot}^2 x = \mathfrak{d} x - \mathfrak{d} \mathfrak{Cot} x,$$

invenimus pro prima curva:

$$\text{IV}_{(1)}. \qquad \sigma = \alpha^2 [\tfrac{1}{2} (\varphi - \varphi_0) - \sqrt{\tfrac{1}{2}} (\mathfrak{Tang} \varphi \sqrt{\tfrac{1}{2}} - \mathfrak{Tang} \varphi_0 \sqrt{\tfrac{1}{2}})]$$

et pro altera curva:

$$\text{V}_{(1)}. \qquad \sigma = \alpha^2 \left[\tfrac{1}{2} (\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathfrak{Cot} \frac{\varphi_0}{\sqrt{2}} - \mathfrak{Cot} \frac{\varphi}{\sqrt{2}} \right) \right]$$

Crescente φ a limite φ_0 usque ad ∞, in utroque casu area sectoris infinite magna fiet. Itaque tempus in tota curva describenda consumptum etiam erit infinite magnum; sed tempus ab eo loco, ubi $\varphi = \varphi_0$ usque ad quemlibet alterum locum computari licet his formulis, ac quidem pro priore curva ope formulae

$$\text{IV}_{(2)}. \qquad t = \frac{\alpha}{k} \left[(\varphi - \varphi_0) - \sqrt{2} \left(\mathfrak{Tang} \frac{\varphi}{\sqrt{2}} - \mathfrak{Tang} \frac{\varphi_0}{\sqrt{2}} \right) \right]$$

atque pro altera curva ope formulae

$$\text{V}_{(2)}. \qquad t = \frac{\alpha}{k} \left[(\varphi - \varphi_0) + \sqrt{2} \left(\mathfrak{Cot} \frac{\varphi_0}{\sqrt{2}} - \mathfrak{Cot} \frac{\varphi}{\sqrt{2}} \right) \right].$$

2. Casus generalioris altera positio.

Differentia $k^2 - \frac{\mu}{a^4}$ *sit negativa.*

Quo posito habemus

$$\varphi = \frac{c}{\sqrt{(\frac{\mu}{a^4} - k^2)}} \cdot \int_a^r \frac{\partial r}{\sqrt{\left[\frac{\mu}{\frac{\mu}{a^4} - k^2} - \frac{c^2}{\frac{\mu}{a^4} - k^2} r^2 - r^4\right]}},$$

ubi loco radicandi ponere licet

$$(\alpha^2 + r^2)(\beta^2 - r^2) = \alpha^2\beta^2 - (\alpha^2 - \beta^2) r^2 - r^4,$$

unde intelliges, hanc substitutionem fieri posse, si $\alpha^2 > \beta^2$ esse ponamus. Quo facto invenimus:

$$\alpha^2\beta^2 = \frac{a^4\mu}{\mu - a^4 k^2}, \quad \alpha^2 - \beta^2 = \frac{a^4 c^2}{\mu - a^4 k^2},$$

$$\varphi = \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)} \cdot \int_a^r \frac{\partial r}{\sqrt{(\alpha^2 + r^2)(\beta^2 - r^2)}}$$

Iam perspicuum est, limites radii vectoris esse 0 et β, quare ubique littera a cum β commutemus, ut motus ibi initium capiat, ubi radius vector cum linea tangente facit angulum $\lambda = \frac{1}{2}\pi$. Inde oritur

$$\left\{\begin{aligned} \alpha^2\beta^2 &= \frac{\beta^4\mu}{\mu - \beta^4 k^2}, \quad \text{unde } \alpha^2 = \frac{\beta^2\mu}{\mu - \beta^4\mu}, \\ \alpha^2 - \beta^2 &= \frac{\beta^4 c^2}{\mu - \beta^4 k^2}, \quad \text{atque} \end{aligned}\right.$$

$$\varphi = \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)} \cdot \int_\beta^r \frac{-\partial r}{\sqrt{[(\alpha^2 + r^2)(\beta^2 - r^2)}}.$$

Ponendo praeterea $r = \beta x$ evadit

$$\varphi = \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)} \cdot \int_1^r \frac{-\partial x}{\sqrt{(1 - x^2)(\alpha^2 + \beta^2 x^2)}},$$

quod integrale, si comparaveris cum formula fundamentali

$$u = \int_1^x \frac{-\partial x}{\sqrt{[(1 - x^2)(\varkappa'^2 + \varkappa^2 x^2)]}} \text{ pro } x = \cos\operatorname{am} u,$$

statim perspicies, ponendum esse $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\varkappa'^2}{\varkappa^2}$; aut si parumper $\varkappa' = \cos\theta$, $\varkappa = \sin\theta$ ponatur, valeat oportere aequatio

$$\operatorname{tang}^2\theta = \frac{\beta^2}{\alpha^2},$$

unde sequitur esse $\varkappa'^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}$, $\varkappa^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$, quamobrem scribamus

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right)} \cdot \int_1^x \frac{-\partial x}{\sqrt{\left[(1-x^2)\left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}x^2\right)\right]}},$$

ita ut ponendo

$$\begin{cases} \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} = \varkappa'^2, \\ \frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} = \varkappa^2, \end{cases}$$

proficiscatur aequatio

$$\varphi = \sqrt{(\varkappa'^2-\varkappa^2)} \cdot \int_0^x \frac{-\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(\varkappa'^2+\varkappa^2 x^2)]}},$$

quae, posito $x = \cos\operatorname{am} u$, transit in hanc:

$$\varphi = \sqrt{(\varkappa'^2-\varkappa^2)}.u;$$

est igitur

$$\text{VI.}\qquad \begin{cases} r = \beta\cos\operatorname{am} u = \beta\cos\operatorname{am}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{(\varkappa'^2-\varkappa^2)}}\right) \\ \quad = \beta\cos\operatorname{am}\left[\varphi\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}\right)}\right]. \end{cases}$$

Haec curva propterea quod $-\varphi$ loco φ ponere licet, a primo vertice duos aequales ramos emittit versus regiones oppositas, qui usque in infinitum modo per centrum transeunt, modo circulum cum radio β constructum tangunt. (Fig. 10.) Itaque forma huius curvae similis est ei, cuius aequatio erat

$$r = \beta\sin\operatorname{coam} u.$$

Facile invenies pro sectoris area:

$$\sigma = \frac{\beta^2}{2}\cdot\int_0^\varphi \cos^2\operatorname{am}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{(\varkappa'^2-\varkappa^2)}}\right)\partial\varphi = \frac{\beta^2}{2}\sqrt{\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right)}\int_0^u \cos^2\operatorname{am} u.\partial u;$$

quoniam autem est $\Delta^2\operatorname{am} u = \varkappa'^2 + \varkappa^2\cos^2\operatorname{am} u$, igitur

$$\operatorname{el} u = \varkappa'^2.u + \varkappa^2\int_0 \cos^2\operatorname{am} u.\partial u,$$

obtinemus

$$\text{VI}_{(1)}.\qquad \sigma = \frac{\beta^2}{2}\sqrt{\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right)}\cdot\left(\frac{\operatorname{el} u - \varkappa'^2.u}{\varkappa^2}\right)$$

et tota area Σ, quae includitur radio vectore β et una curvae parte a vertice usque ad centrum se porrigente, invenitur ponendo $u = K$; est igitur

$$\text{VI}_{(2)} \qquad \Sigma = \frac{\beta^2}{2}\sqrt{\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right)}\cdot\left(\frac{E-\varkappa'^2.K}{\varkappa^2}\right).$$

Denique inde tempus derivatur multiplicando σ cum $\frac{2}{c} = \frac{2}{\beta k}$, ita ut fiat

$$\text{VI}_{(3)}. \qquad t = \frac{\beta}{k}\sqrt{\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right)}\cdot\left(\frac{\text{el}\,u-\varkappa'^2.u}{\varkappa^2}\right),$$

et totum tempus, quod a vertice usque ad centrum praeterlapsum est, habet valorem

$$\text{VI}_{(4)} \qquad T = \frac{\beta}{k}\sqrt{\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right)}\cdot\left(\frac{E-\varkappa'^2.K}{\varkappa^2}\right).$$

Lex attractionis sit praescripta per

$$R = \frac{\frac{5}{2}\mu}{r^6}.$$

§. 5.

Eodem modo, quo supra, oritur formula

$$(1.) \qquad c^2 = k^2 - \mu.\int_a^r \frac{5\partial r}{r^6} = k - \frac{\mu}{a^5} + \frac{\mu}{r^5},$$

quae in generali orbitarum aequatione substituta suppeditat

$$\varphi = \int_a^r \frac{c.r^{\frac{1}{2}}.\partial r}{\sqrt{\left[\mu - c^2 r^3 + \left(k^2 - \frac{\mu}{a^5}\right) r^5\right]}}$$

$$= \int_a^r \frac{cr.\partial r}{\sqrt{\left\{r\left[\mu - c^2 r^3 + \left(k^2 - \frac{\mu}{a^5}\right) r^5\right]\right\}}}$$

Quum radicandus sit *sexti gradus*, expressionem vulgaribus subsidiis integrare non poteris. Sed singularem casum, ubi $k^2 = \frac{\mu}{a^5}$ est, sine ulla difficultate absolvere licet. Nimirum evadit hoc posito

$$\varphi = \int_a^r \frac{r^{\frac{1}{2}}.\partial r}{\sqrt{\left(\frac{\mu}{c^2} - r^3\right)}}$$

aut, quia $\mu = k^2 a^5$, $c^2 = a^2 k^2 \sin^2\lambda$, igitur $\frac{\mu}{c^2} = \frac{a^3}{\sin^2\lambda}$, oritur

$$\varphi = \int_a^r \frac{r^{\frac{1}{2}}.\partial r}{\sqrt{\left(\frac{a^3}{\sin^2\lambda} - r^3\right)}}$$

unde facile derivabis

$$\operatorname{tang}\lambda = r.\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \sqrt{\left(\frac{r^3}{\frac{a^3}{\sin^2\lambda} - r^3}\right)}, \text{ itaque est}$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\pi = \sqrt{\left(\frac{r^3}{a^3 - r^3}\right)};$$

quod postulat, ut sit $r = a$ pro $\lambda = \frac{1}{2}\pi$. Exstat igitur punctum aliquod curvae, ubi radius vector et linea tangens angulum faciunt rectum. Quare in hoc puncto initium movendi capiatur. Simul intelligis, radium vectorem inter limites a et 0 vagari, ita ut habeamus

$$\varphi = \int_a^r \frac{-r^{\frac{1}{2}}\partial r}{\sqrt{(a^3 - r^3)}} \text{ pro } a > r > 0$$

Quoniam autem est $\partial(r^{\frac{3}{2}}) = \frac{3}{2}r^{\frac{1}{2}}\partial r$, ponamus $\frac{r^3}{a^3} = x^2$, unde procedit:

$$\tfrac{3}{2}\varphi = \int_1^x \frac{-\partial x}{\sqrt{(1 - x^2)}} \text{ pro } 1 > x > 0;$$

itaque est

$$\tfrac{3}{2}\varphi = \arccos x = \arccos\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\right],$$

aut vice versa

$$\text{I.} \qquad r^3 = a^3.\cos^2\tfrac{3}{2}\varphi = \tfrac{1}{2}a^3(1 + \cos 3\varphi).$$

Pro $\varphi = 0$, $= 2.\frac{1}{3}\pi$ et $= 4.\frac{1}{3}\pi$ est $r = a$,
Pro $\varphi = 1.\frac{1}{3}\pi$, $= 3.\frac{1}{3}\pi$ et $= 5.\frac{1}{3}\pi$ est $r = 0$ atque
Pro $\varphi = 1.\frac{1}{6}\pi$, $= 3.\frac{1}{6}\pi$, $= 5.\frac{1}{6}\pi$, $\ldots = 11.\frac{1}{6}\pi$ est $r = a\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

Peripheria igitur circuli cum radio a constructi in tres aequales partes divisa, curva in his punctis tangitur, porro his tribus arcubus dimidiatis, radii ad haec tria nova peripheriae puncta directi curvam in centro tangunt; denique his sex arcubus, iterum dimidiatis, radii ad haec sex nova peripheriae puncta ducti curvam in sex punctis ita secant, ut ibi radii vectores sint longitudine $a\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. Unde colligimus, curvam ex tribus constare paribus foliis, quorum quodvis inter crura continetur anguli, qui $= \frac{1}{3}\pi$ est. Quapropter hanc curvam appellare licet *trifo-*

liam. Quamquam ponendo $-\varphi$ loco φ aequatio non mutatur, tamen eadem folia describuntur inverso ordine. (Tab. VI. Fig. 12.).

Curvam quadraturus in difficultatem aliquam incurres. Ex curvae aequatione invenies

$$r^2 = a^2 . \cos^{\frac{2}{3}} \tfrac{3}{2}\varphi,$$

unde

$$\sigma = \tfrac{1}{2} a_2 \int_0^{\varphi} \cos^{\frac{2}{3}} \tfrac{3}{2}\varphi . \partial\varphi \quad \text{pro } \varphi < \tfrac{1}{3}\pi.$$

Substitutio, quae maxime convenire videtur, erit

$$\cos^{\frac{2}{3}} \tfrac{3}{2}\varphi = x^2,$$

unde fit

$$\cos\tfrac{3}{2}\varphi = x^3 \ , \ \sin\tfrac{3}{2}\varphi = \sqrt{(1-x^3)} \ , \ \partial\varphi = \frac{-x^{\frac{1}{2}}.\partial x}{\sqrt{(1-x^3)}}, \text{ atque}$$

$$\sigma = \tfrac{1}{2} a^2 \int_1^x \frac{-x^2 . x^{\frac{1}{2}} . \partial x}{\sqrt{(1-x^3)}} = \tfrac{1}{2} a^2 \int_1^x \frac{-x^3 . \partial x}{\sqrt{[x(1-x^3)]}},$$

$$\text{pro } 1 > x > 0.$$

Integrationis causa haec formula ita scribatur:

$$\sigma = \tfrac{1}{2} a^2 \int_1^x \frac{-x^2 \partial x}{\sqrt{[x(1-x)(1+x+x^2)]}}$$

atque ponatur

$$\frac{1-x}{x} = y^2,$$

ita ut fiat

$$\sigma = a^2 . \int_0^y \frac{\partial y}{(1+y^2)^2 \sqrt{(3+3y^2+y^4)}} \text{ pro } 0 < y < \infty.$$

Radicandus $3+3y^2+y^4$ dissolvi non potest in duos factores realis formae $(\alpha^2+y^2)(\beta^2+y^2)$, qua de causa hoc integrale cum illo congruit, quod supra consideravimus:

$$t = \int_0^y \frac{\partial y}{\sqrt{(m^2+2mn\gamma . y^2+n^2y^4)}},$$

ubi pro $\frac{n}{m}y^2 = z^2$, $\varkappa = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\gamma^2)}$, $\varkappa' = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\gamma^2)}$ et $z = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am} 2u$, invenimus esse

$$\partial t = \frac{\partial u}{\sqrt{(mn)}}.$$

In nostro casu est

$$m^2 = 3 \;,\; n^2 = 1 \;,\; \gamma = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \cos 30^0 \;,\; \varkappa = \sin 15^0 \;,\; \varkappa' = \cos 15^0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}y^2 = z^2 = \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\operatorname{am} 2u \quad , \quad \frac{\partial y}{\sqrt{(3+3y^2+y^4)}} = \frac{\partial u}{\sqrt[4]{3}};$$

si igitur ponimus $y^2 = \sqrt{3}.\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\operatorname{am} 2u$, integrale mutatur in

$$\text{I}_{(1)}. \qquad \sigma = \frac{a^2}{\sqrt[4]{3}}.\int_0^{\partial u} \frac{\partial u}{(1+\sqrt{3}.\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\operatorname{am} 2u)^3},$$

ubi $$\sqrt{3}.\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\operatorname{am} 2u = y^2 = \frac{1-x}{x} = \frac{1-\cos^{\frac{3}{2}}\frac{3}{2}\varphi}{\cos^{\frac{3}{2}}\frac{3}{2}\varphi} = \operatorname{tang}^{\frac{3}{2}}\tfrac{3}{2}\varphi \text{ est, igitur}$$

$$\operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}\operatorname{am} 2u = \sqrt[4]{(\tfrac{1}{3})^3}.\operatorname{tang}\tfrac{3}{2}\varphi.$$

Integrale illud, formula recursionis adhibita, ad elliptica integralia tertiae speciei reducere licet, cui rei operam dare nolumus; sed plenum integrale infra derivatur.

Difficultates, quae hic apud sextam potentiam nobis occurrerunt, repetentur apud omnes, quae sequuntur, *pares* potentias. Sed, quod ad *impares* potentias attinet, tractatio *septimi* gradus adhuc sine negotio succedit.

Lex attractionis sit determinata per

$$R = \frac{3\mu}{r^7}\text{*)}.$$

§. 6.

Noto modo erues formulam

$$(1.) \qquad c^2 = k^2 - \mu\int_a^r \frac{6\partial r}{r^7} = k^2 - \frac{\mu}{a^6} + \frac{\mu}{r^6},$$

quam in generali orbitarum aequatione substituendo, obtinebis

$$\varphi = \int_a^r \frac{c.\partial r}{r\sqrt{\left[-c^2 + \frac{\mu}{r^4} + (k^2 - \frac{\mu}{a^6})r^2\right]}} \qquad \text{sive}$$

$$\varphi = \int_a^r \frac{c.r.\partial r}{\sqrt{\left[\mu - c^2 r^4 + (k^2 - \frac{\mu}{a^6})r^6\right]}},$$

---

*) Hic erat casus, quem ad praemium reportandum fusius tractavi.

aut posito $r^2 = \varrho$, habebis

$$(2.)\qquad \varphi = \int_{a^2}^{\varrho} \frac{\frac{1}{2}c.\partial\varrho}{\sqrt{\left[\mu - c^2\varrho^2 + (k^2 - \frac{\mu}{a^6})\varrho^4\right]}}.$$

1. Casus.

Primum ponamus esse $k^2 - \frac{\mu}{a^6} = 0$, quo in casu aequatio (2) in simpliciorem formam se constringit:

$$\varphi = \int_{a^2}^{\varrho} \frac{\frac{1}{2}c.\partial\varrho}{\sqrt{(\mu - c^2\varrho^2)}}$$

aut, quia

$$\mu = k^2 a^6 = \frac{c^2 a^4}{\sin^2\lambda}$$

est, oritur

$$(3.)\qquad 2\varphi = \int_{a^2}^{\varrho} \frac{\partial\varrho}{\sqrt{(\frac{a^4}{\sin^2\lambda} - \varrho^2)}},$$

unde facile derivabis $\tang\lambda = r\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\varrho}{\sqrt{(\frac{a^4}{\sin^2\lambda} - \varrho^2)}}$, itaque est $\tang\frac{1}{2}\pi = \frac{\varrho}{\sqrt{(a^4 - \varrho^2)}}$, quod postulat, ut sit $\varrho = a^2$. Exstat igitur punctum aliquod curvae, ubi radius vector cum tangente angulum facit rectum. Quare in hoc puncto initium movendi capiatur. Est igitur

$$2\varphi = \int_{a^2}^{\varrho} \frac{-\partial\varrho}{\sqrt{[(a^2)^2 - \varrho^2]}} = \arccos\left(\frac{\varrho}{a^2}\right),$$

unde proficiscitur aequatio

$$\text{I.}\qquad r^2 = a^2.\cos 2\varphi,$$

pertinens ad curvam *lemniscatam*, quam primus consideravit *Jac. Bernoulli* et quam duplo gaudere oriundi modo notissimum est. Etenim primum, omnibus trigonis supra eandem basin ita constructis, ut ipsorum latera variabilia secum multiplicata dimidium baseos suppeditent quadratum, curva, quae trigonorum verticibus describitur, est lemniscata. Porro, si perpendicula ex hyperbolae aequilaterae centro in lineas, quae ipsam tangunt, omnes demiseris, perpendiculorum pedes positae sunt in lemniscata. (Fig. 13.)

Illico ex aequatione curva obtinebis:

$$\text{I}(A).\qquad \sigma = \tfrac{1}{2}a^2\cdot\int_0^{\varphi} \cos 2\varphi.\partial\varphi = \tfrac{1}{4}a^2 \sin 2\varphi \quad \text{pro} \quad \varphi < \tfrac{1}{4}\pi,$$

ita ut area Σ unius quadrantis sit

$$\mathrm{II}_{(2)}. \qquad \Sigma = \tfrac{1}{4}a^2.$$

Pro tempore t invenies

$$\mathrm{II}_{(3)}. \qquad t = \frac{a}{2k}\cdot\sin 2\varphi \text{ pro } 0 < \varphi < \tfrac{1}{4}\pi$$

et pro toto tempore T ad unum lemniscatae quadrantem describendum praeterlapso

$$\mathrm{II}_{(4)}. \qquad T = \frac{a}{2k}$$

Secundum positionem est $k = \frac{\sqrt{\mu}}{a^3}$, igitur $T = \frac{a^4}{2\sqrt{\mu}}$, sive

$$\mathrm{II}_{(5)}. \qquad \sqrt{\mu} = \frac{a^4}{2T},$$

ita ut eadem conditione servata pro alio puncto mobili valeat $\sqrt{\mu} = \frac{a'^4}{2T'}$, unde concludimus esse

$$\mathrm{II}_{(6)}. \qquad \frac{a^4}{T} = \frac{a'^4}{T'}$$

i. e. *Pro omnibus punctis mobilibus, quae circa eundem polum in lemniscatis moventur, tempora ipsa proportionalia sunt quartis potentiis semidiametrorum.*

2. Casus.

Nunc sit differentia $k^2 - \frac{\mu}{a^6}$ *positiva*, ita ut accipiamus

$$(4.) \qquad \varphi = \frac{ca^3}{\sqrt{(k^2a^6-\mu)}}\cdot\int_a^{\varrho}\frac{\frac{1}{2}\partial\varrho}{\sqrt{(\varrho^3 - \frac{a^6c^2}{k^2a^6-\mu}\varrho^2 + \frac{\mu a^6}{k^2a^6-\mu})}},$$

in qua, si loco radicandi ponatur

$$(\varrho-\alpha^2)(\varrho-\beta^2)(\varrho+\gamma^2) = \varrho^3 - (\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)\varrho^2 - \{(\alpha^2+\beta^2)\gamma^2 - \alpha^2\beta^2\}\varrho + \alpha^2\beta^2\gamma^2,$$

membratim adaequando invenies esse:

$$\alpha^2+\beta^2-\gamma^2 = \frac{c^2a^6}{k^2a^6-\mu},$$
$$(\alpha^2+\beta^2)\gamma^2-\alpha^2\beta^2 = 0,$$
$$\alpha^2\beta^2\gamma^2 = \frac{\mu a^6}{k^2a^6-\mu},$$

unde deducitur

$$
(5.)\quad \begin{cases} \gamma^2 = \dfrac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}, \\ \dfrac{\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4}{\alpha^2+\beta^2} = \dfrac{c^2a^6}{k^2a^6-\mu}, \\ \dfrac{\alpha^4\beta^4}{\alpha^2+\beta^2} = \dfrac{\mu a^6}{k^2a^6-\mu}. \end{cases}
$$

Si ponatur esse $\alpha^2 > \beta^2$, radices sequuntur hunc ordinem:

$$\alpha^2 > \beta^2 > \gamma^2,$$

propterea quod $\frac{\gamma^2}{\beta^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}$ monade minus est. Variabilis ϱ aut inter limites 0 et β^2, aut inter limites α^2 et ∞ versari potest. Prout unum aut alterum casum valentem facimus, curvae prorsus alia erit natura. Insuper facile intelligitur, et pro $\varrho = \beta^2$, et pro $\varrho = \alpha^2$, fieri $\tang\lambda = r\,\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \infty$, quapropter simplicitatis gratia limitem arbitrarium a in uno casu cum β^2, in altero cum α^2 commutetur, ut movendi initium capiatur in eo curvae puncto, ubi radius vector cum linea tangente angulum facit rectum. Quo posito, consideranda sunt integralia

$$
(6.)\quad \varphi = \sqrt{\frac{\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4}{\alpha^2+\beta^2}}\cdot\int_{\beta^2}^{\varrho}\frac{-\frac{1}{2}\partial\varrho}{\sqrt{[(\alpha^2-\varrho)(\beta^2-\varrho)(\gamma^2+\varrho)]}} \text{ pro } \beta^2>\varrho>0,
$$

ubi valent relationes

$$
(7.)\quad \begin{cases} \gamma^2 = \dfrac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} \\ \dfrac{\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4}{\alpha^2+\beta^2} = \dfrac{c^2\beta^6}{k^2\beta^6-\mu} = \dfrac{k^2\beta^6}{k^2\beta^6-\mu} \\ \dfrac{\alpha^4\beta^4}{\alpha^2+\beta^2} = \dfrac{\mu\beta^6}{k^2\beta^6-\mu} \end{cases}
$$

atque

$$
(8.)\quad \varphi = \sqrt{\frac{\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4}{\alpha^2+\beta^2}}\cdot\int_{\alpha^2}^{\varrho}\frac{+\frac{1}{2}\partial\varrho}{\sqrt{[(\varrho-\alpha^2)(\varrho-\beta^2)(\varrho+\gamma^2)]}} \text{ pro } \alpha^2<\varrho<\infty
$$

ubi exstant aequationes

$$
(9.)\quad \begin{cases} \gamma^2 = \dfrac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} \\ \dfrac{\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4}{\alpha^2+\beta^2} = \dfrac{c^2\alpha^6}{k^2\alpha^6-\mu} = \dfrac{k^2\alpha^6}{k^2\alpha^6-\mu} \\ \dfrac{\alpha^4\beta^4}{\alpha^2+\beta^2} = \dfrac{\mu\alpha^6}{k^2\alpha^6-\mu}\cdot \end{cases}
$$

Consideratur primum integrale:

$$\varphi = \sqrt{\frac{\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4}{\alpha^2+\beta^2}}\cdot\int_{\beta^2}^{\varrho}\frac{-\frac{1}{2}\partial\varrho}{\sqrt{[(\alpha^2-\varrho)(\beta^2-\varrho)(\gamma^2+\varrho)]}}.$$

Ponendo $\frac{\beta^2-\varrho}{\gamma^2+\varrho}=x^2$, nanciscimur limites $x=0$ et $x=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}{\alpha}$, quod monade maius est. Qua ex substitutione proficiscitur integrale

$$\varphi = \sqrt{\frac{\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4}{\alpha^4-\beta^4}}\cdot\int_0^x\frac{\partial x}{\sqrt{\left[(1+x^2)\left(1+\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha^2-\beta^2}x^2\right)\right]}},$$

cuius forma haud plane congruit cum forma fundamentali

$$u=\int_0^z\frac{\partial z}{\sqrt{[(1+z^2)(1+\varkappa'^2z^2)]}}\ \text{pro}\ z=\operatorname{tang}\operatorname{am}u,$$

propterea quod $\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha^2-\beta^2}>1$ modulus esse non potest. Qua de causa ponatur

$$\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha^2-\beta^2}x^2=z^2,$$

$$x^2=\varkappa'^2z^2,$$

ita ut fiat

$$\text{(10.)}\qquad \varkappa'^2=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\gamma^2},\quad\text{igitur}\ \varkappa^2=\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2+\gamma^2},$$

atque limites evadant $z=0$ et $z=\frac{\beta}{\gamma}\cdot\sqrt{\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha^2-\gamma^2}}=\frac{\beta}{\gamma}\cdot\frac{1}{\varkappa'}$, qui a fortiori monade maior est. Quo facto emergit integrale

$$\varphi=\sqrt{\frac{\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4}{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\gamma^2)}}\cdot\int_0^z\frac{\partial z}{\sqrt{[(1+z^2)(1+\varkappa'^2z^2)]}}\ \text{pro}\ 0<z<\frac{\beta}{\gamma}\cdot\frac{1}{\varkappa'}.$$

Si nunc ponatur $z=\operatorname{tang}\operatorname{am}u$, limes superior $\frac{\beta}{\gamma}\cdot\frac{1}{\varkappa'}=\operatorname{tang}\operatorname{am}p$ et coefficiens

$$\sqrt{\frac{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\gamma^2)}{\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4}}=\varepsilon,$$

inde procedunt relationes

$$\text{(11.)}\qquad u=\varepsilon\varphi\quad\text{atque}\quad p=\varepsilon\eta,$$

dummodo is valor anguli φ, qui argumentum u cum p adaequat, per η designetur. Itaque ex aequationibus

$$\operatorname{tang}^2\operatorname{am}u=z^2=\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha^2-\beta^2}x^2=\frac{x^2}{\varkappa'^2}$$

et $\qquad \operatorname{tang}^2 \operatorname{am} p = \frac{\beta^2}{\gamma^2} \cdot \frac{1}{\varkappa'^2}$ proficiscuntur:

$$x^2 = \varkappa^2 \operatorname{tang}^2 \operatorname{am} u = \frac{1}{\operatorname{tang}^2 \operatorname{coam} u} = \frac{1}{\operatorname{tang}^2 \operatorname{coam} \varepsilon\varphi},$$

$$\frac{\beta^2}{\gamma^2} = \varkappa'^2 \operatorname{tang}^2 \operatorname{am} p = \frac{1}{\operatorname{tang}^2 \operatorname{coam} p} = \frac{1}{\operatorname{tang}^2 \operatorname{coam} \varepsilon\eta},$$

et quia posuimus $x^2 = \frac{\beta^2 - \varrho}{\gamma^2 + \varrho} = \frac{\beta^2 - r^2}{\gamma^2 + r^2}$, emergit aequatio curvae

$$\text{II.} \qquad \operatorname{tang}^2 \operatorname{coam} u = \frac{\gamma^2 + r^2}{\beta^2 - r^2},$$

aut vice versa

$$r^2 = \beta^2 \sin^2 \operatorname{coam} u - \gamma^2 \cos^2 \operatorname{coam} u, \text{ aut melius}$$

$$r^2 = \beta^2 (\sin^2 \operatorname{coam} u - \operatorname{tang}^2 \operatorname{coam} p . \cos^2 \operatorname{coam} u), \text{ igitur}$$

$$\text{II}_{(1)}. \quad \left\{ \begin{array}{l} r^2 = \beta^2 . \dfrac{\cos^2 \operatorname{coam} p - \cos^2 \operatorname{coam} u}{\cos^2 \operatorname{coam} p} \\ \qquad\qquad \text{seu} \\ r^2 = \beta^2 . \dfrac{\cos^2 \operatorname{coam} (\varepsilon\eta) - \cos^2 \operatorname{coam} (\varepsilon\varphi)}{\cos^2 \operatorname{coam} (\varepsilon\eta)} \end{array} \right.$$

Crescente angulo φ a valore 0 usque ad η, decrescit r a valore $\pm\beta$ usque ad 0. Magis augescente φ, fit r imaginarius, donec $u = 2K - p$ evasit; tunc r realis fieri coepit atque manebit realis usque ad $u = 2K + p$. Omnino facile intelligitur, r esse *realem*

$$(12.) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \text{ab } u = -p & \text{usque ad} & & u = \quad +p \\ \text{» } u = 2K - p & \text{»} & \text{»} & u = 2K + p \\ \text{» } u = 4K - p & \text{»} & \text{»} & u = 4K + p \\ \dots & & & \dots \\ \text{» } u = 2nK - p & \text{»} & \text{»} & u = 2nK + p; \end{array} \right.$$

contra, *imaginarium*

$$(13.) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \text{ab } u = \quad p & \text{usque ad} & & u = 2K - p \\ \text{» } u = 2K + p & \text{»} & \text{»} & u = 4K - p \\ \text{» } u = 4K + p & \text{»} & \text{»} & u = 6K - p \\ \dots & & & \dots \\ \text{» } u = 2nK + p & \text{»} & \text{»} & u = 2(n+1)K - p. \end{array} \right.$$

Ex innumeris igitur congruentibus lemniscis curva composita est, ita ut formam in modum rosae concinnatam induat; quorum lemniscorum vertices circulo cum radio β constructo tanguntur. Praeterea aequatio non mutabitur, si $-\varphi$ loco φ et $-r$ loco r posueris; quare curva in quatuor partes demittit tales ramos, quales modo descripsi, quorum duo, qui in contrariam partem flectantur, initium capiunt in primo curvae vertice, ubi $\varphi = 0$ est; et duo alteri, pariter in contrariam partem abeuntes, in eo exordiuntur vertice, qui primo diametraliter oppositus est. Qui quidem quatuor curvae ductus in universum per circuli spatium procurrunt, folium post folium devolventes, sed nunquam circuli peripheriam in eodem puncto tangentes, in quo forte ante fuerunt. (Fig. 14. a et b.).

Quadratura nullo negotio efficitur. Nimirum ex curvae aequatione

$$r^2 = \beta^2\left(1 - \frac{\cos^2 \operatorname{coam} u}{\cos^2 \operatorname{coam} p}\right)$$

illico derivabis:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\beta^2 \cdot \left(\varphi - \int_0^{\varphi} \frac{\cos^2 \operatorname{coam} u . \partial\varphi}{\cos^2 \operatorname{coam} p}\right) \text{ sive}$$

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\beta^2 . \left(\varphi - \int_0^{u} \frac{\cos^2 \operatorname{coam} u . \partial u}{\varepsilon \cos^2 \operatorname{coam} p}\right) \text{ pro } u < p.$$

atque quum sit $\int_0^u \cos^2 \operatorname{coam} u . \partial u = \dfrac{\operatorname{el} u - \varkappa^2 \sin \operatorname{am} u . \sin \operatorname{coam} u - \varkappa'^2 . u}{\varkappa^2}$, oritur

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\beta^2 \cdot \left(\varphi - \frac{\operatorname{el} u - \varkappa^2 \sin \operatorname{am} u . \sin \operatorname{coam} u - \varkappa'^2 . u}{\varepsilon \varkappa^2 \cos^2 \operatorname{coam} p}\right) \text{ sive}$$

$$\text{II}_{(2)}. \quad \sigma = \tfrac{1}{2}\beta^2 \cdot \frac{\Delta^2 \operatorname{coam} p . u + \varkappa^2 \sin \operatorname{am} u . \sin \operatorname{coam} u - \operatorname{el} u}{\varepsilon \varkappa^2 \cos^2 \operatorname{coam} p},$$

$$\text{pro } u < p.$$

Qua in formula si $u = p$ ponitur, emergit sectoris area Σ unius dimidii lemnisci. Denique si σ cum factore $\frac{2}{c} = \frac{2}{\beta k}$ multiplicatur, iam oritur tempus

$$\text{II}_{(3)}. \quad t = \frac{\beta}{k} \cdot \frac{u . \Delta^2 \operatorname{coam} p + \varkappa^2 \sin \operatorname{am} u . \sin \operatorname{coam} u - \operatorname{el} u}{\varepsilon \varkappa^2 \cos^2 \operatorname{coam} p}$$

et pro toto tempore ad quodvis dimidium folium describendum praeterlapso habebis:

$$\text{II}_{(4)}. \quad T = \frac{\beta}{k} . \frac{p . \Delta^2 \operatorname{coam} p + \varkappa^2 \sin \operatorname{am} p . \sin \operatorname{coam} p - \operatorname{el}(p)}{\varepsilon \varkappa^2 \cos^2 \operatorname{coam} p},$$

ubi valent formulae:

$$\operatorname{tang}\operatorname{coam}p = \frac{\gamma}{\beta}\quad,\quad \sin\operatorname{coam}p = \frac{\gamma}{\sqrt{(\beta^2+\gamma^2)}},$$

$$\cos\operatorname{coam}p = \frac{\beta}{\sqrt{(\beta^2+\gamma^2)}}\quad,\quad \Delta\operatorname{coam}p = \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2+\gamma^2)}},$$

et $$\sin\operatorname{am}p = \frac{\cos\operatorname{coam}p}{\Delta\operatorname{coam}p} = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}} = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{1}{\varkappa}.$$

Consideratur alterum integrale:

$$\varphi = \sqrt{\frac{\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4}{\alpha^2+\beta^2}}\int_{\alpha^2}^{\varrho}\frac{\frac{1}{2}\partial\varrho}{\sqrt{[(\varrho-\alpha^2)(\varrho-\beta^2)(\varrho+\gamma^2)]}}\ \text{pro}\ \alpha^2<\varrho<\infty.$$

Statuto $\frac{\varrho-\alpha^2}{\varrho-\beta^2}=x^2$ variabilis x inde a limite 0 usque ad limitem 1 crescet, dum ϱ inter α^2 et ∞ versatur. Unde facile derivabis

$$(14.)\quad \varphi = \sqrt{\frac{\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4}{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\gamma^2)}}\cdot\int_0^x\frac{\partial x}{\sqrt{\left[(1-x^2)\left(1-\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2+\gamma^2}x^2\right)\right]}}\ \text{pro}\ x<1,$$

quod integrale non solum cum formula fundamentali

$$u = \int_0^x\frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)]}}\ \text{pro}\ x=\sin\operatorname{am}u$$

plane congruit, verum etiam modulus $\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2+\gamma^2}=\varkappa^2$ et ille, quem modo in priore integrali adhibuimus, in eundem valorem coïncidunt; imo etiam coefficiens idem est, qui supra nobis occurrit, et qui ob eam causam iterum per ε designetur. Obtinemus igitur, ponendo $\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2+\gamma^2}=\varkappa^2$, $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\gamma^2}=\varkappa'^2$, $x=\sin\operatorname{am}u$ et

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\gamma^2)}{\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4}} = \sqrt{\frac{\alpha^4+2\alpha^2\beta^2}{\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4}}:$$

relationem $$(15.)\qquad u = \varepsilon\varphi,$$

itaque $$\sin^2\operatorname{am}(\varepsilon\varphi) = x^2 = \frac{\varrho-\alpha^2}{\varrho-\beta^2} = \frac{r^2-\alpha^2}{r^2-\beta^2},\ \text{aut vice versa}$$

$$\text{III.}\qquad r^2 = \alpha^2+(\alpha^2-\beta^2)\operatorname{tangam}^2(\varepsilon\varphi)\ .$$

Sed, ut formam huius curvae intelligas, tecum reputare velis, esse $r=\pm\alpha$, quotiescunque argumentum u aut $\varepsilon\varphi$ adaequasti cum pari multiplo quadrantis K, sed $=\pm\infty$ fieri, ut primum u evasit impar multiplum quadrantis. Curva igitur infinitis repetitionibus circulum, qui cum radio α constructus est, relinquit in infinitum abitura, atque ex infinito regressa semper circulum illum tangit. Aequatio non mutatur, si $-\varphi$ loco φ et $-r$ loco r ponitur. Qua de causa haec

curva, ut superior, in quatuor partes demittit tales ramos, quales positivo φ et positivo r describuntur. (Fig. 15.) Quod autem ad punctum mobile pertinet, hoc tantummodo per unum procurrere potest ramorum membrum, quum quodvis infinite magnum sit.

Ex curvae aequatione statim habebis:

$$\sigma = \frac{\alpha^2}{2}.\varphi + \frac{\alpha^2-\beta^2}{2}\int_0^{\varphi}\text{tang}^2\text{am}\,u.\partial\varphi \quad \text{sive}$$

$$\sigma = \frac{\alpha^2}{2}.\varphi + \frac{\alpha^2-\beta^2}{2\varepsilon}\int_0^{u}\text{tang}^2\text{am}\,u.\partial u.$$

Quum autem sit $\text{tang}^2\text{am}\,u = \frac{1-\cos^2\text{am}\,u}{\cos^2\text{am}\,u} = \frac{1}{\cos^2\text{am}\,u} - 1$, obtinemus

$$\sigma = \frac{\alpha^2}{2}.\varphi + \frac{\alpha^2-\beta^2}{2\varepsilon}\left(\int_0^u\frac{\partial u}{\cos^2\text{am}\,u} - u\right).$$

Sed $\int_0^u\frac{\partial u}{\cos^2\text{am}\,u}$ invenitur hoc modo. Differentiando $\log\cos\text{am}\,u$ oritur

$$\frac{\partial\log\cos\text{am}\,u}{\partial u} = -\,\text{tang}\,\text{am}\,u.\Delta\text{am}\,u \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial^2\log\cos\text{am}\,u}{\partial u^2} = -\,\varkappa^2\cos^2\text{am}\,u - \frac{\varkappa'^2}{\cos^2\text{am}\,u},$$

ita ut integrando procedat:

$$\text{tg}\,\text{am}\,u.\Delta\text{am}\,u = \varkappa^2\int_0^u\cos^2\text{am}\,u.\partial u + \varkappa'^2\int_0^u\frac{\partial u}{\cos^2\text{am}\,u},$$

et quoniam est $\int_0^u\cos^2\text{am}\,u.\partial u = \frac{\text{el}\,u - \varkappa'^2.u}{\varkappa^2}$, evadit

$$\int_0^u\frac{\partial u}{\cos^2\text{am}\,u} = \frac{\text{tang}\,\text{am}\,u.\Delta\text{am}\,u - \text{el}\,u + \varkappa'^2.u}{\varkappa'^2};$$

quem valorem, si supra substitueris, iam emerget

$$\text{III.}_{(1)} \qquad \sigma = \frac{\alpha^2}{2}.\varphi + \frac{\alpha^2-\beta^2}{2.\varepsilon}.\frac{\text{tang}\,\text{am}\,u.\Delta\text{am}\,u - \text{el}\,u}{\varkappa'^2},$$

unde intelligis sectorem σ propter functionem *tang am u* infinite magnum fieri, si u a valore 0 usque ad K succrescat. Multiplicando σ cum $\frac{2}{c} = \frac{2}{\alpha k}$, iam obtinemus:

$$\text{III.}_{(2)} \qquad t = \frac{\alpha}{k}.\varphi + \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha\varepsilon k}.\frac{\text{tang}\,\text{am}\,u.\Delta\text{am}\,u - \text{el}\,u}{\varkappa'^2},$$

ubi loco $tang\, am\, u . \Delta am\, u$ scribere licet $tang \frac{1}{2} am\, 2u$. Tempus t, ut sectorem σ, pro $u = K$ infinite magnum fieri, plane perspicuum est.

3. Casus.

Differentia $k^2 - \frac{\mu}{a^2}$ sit *negativa*. Quo posito fit

$$\varphi = \frac{ca^2}{\sqrt{(\mu - k^2 a^2)}} \int_a^\varrho \frac{\frac{1}{2}\partial\varrho}{\sqrt{\left(-\varrho^3 - \frac{c^2 a^4}{\mu - k^2 a^2}\cdot\varrho^2 + \frac{\mu a^6}{\mu - k^2 a^2}\right)}},$$

ubi radicandus compositus esse potest ex his factoribus:

$$(\alpha^2 + \varrho)(\beta^2 + \varrho)(\gamma^2 - \varrho)$$
$$= -\varrho^3 - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)\varrho^2 + \{(\alpha^2 + \beta^2)\gamma^2 - \alpha^2\beta^2\}\varrho + \alpha^2\beta^2\gamma^2;$$

unde comparando intelliges esse

$$\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = \frac{c^2 a^4}{\mu - k^2 a^2},$$
$$(\alpha^2 + \beta^2)\gamma^2 - \alpha^2\beta^2 = 0,$$
$$\alpha^2\beta^2\gamma^2 = \frac{\mu a^6}{\mu - k^2 a^2},$$

sive

$$\begin{cases} \gamma^2 = \dfrac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \\ \dfrac{\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4}{\alpha^2 + \beta^2} = \dfrac{c^2 a^4}{\mu - k^2 a^2}, \\ \dfrac{\alpha^4\beta^4}{\alpha^2 + \beta^2} = \dfrac{\mu a^6}{\mu - k^2 a^2}, \end{cases}$$

quare oritur

$$(16.)\qquad \varphi = \sqrt{\left(\frac{\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4}{\alpha^2 + \beta^2}\right)} \cdot \int_a^\varrho \frac{\frac{1}{2}\partial\varrho}{\sqrt{[(\alpha^2 + \varrho)(\beta^2 + \varrho)(\gamma^2 - \varrho)}}.$$

Quia $\varrho = r^2$ negativo valore esse non potest, ϱ tantummodo inter limites 0 et γ^2 morabitur. Itaque ponamus γ^2 loco arbitrarii limitis a, unde fit

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4}{\alpha^2 + \beta^2}\right)} \cdot \int_{\gamma^2}^\varrho \frac{-\frac{1}{2}\partial\varrho}{\sqrt{(\alpha^2 + \varrho)(\beta^2 + \varrho)(\gamma^2 - \varrho)}} \text{ pro } 0 < \varrho < \gamma^2,$$

ubi valent relationes

$$(17.)\qquad \begin{cases} \gamma^2 = \dfrac{\alpha^2\beta_2}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad c = \gamma k, \\ \dfrac{\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4}{\alpha^2 + \beta^2} = \dfrac{c^2\gamma^4}{\mu - k^2\gamma^2} = \dfrac{k^2\gamma^6}{\mu - k^2\gamma^2}, \\ \dfrac{\alpha^4\beta^4}{\alpha^2 + \beta^2} = \dfrac{\mu\gamma^6}{\mu - k^2\gamma^2}. \end{cases}$$

Posito $\frac{\gamma^2-\varrho}{\beta^2+\varrho}=x^2$, oriuntur limites 0 et $\frac{\gamma}{\beta}=\sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}\right)}<1$, atque integrale ipsum mutatur in

$$\varphi=\sqrt{\left(\frac{\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4}{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\gamma^2)}\right)}\cdot\int_0^x\frac{\partial x}{\sqrt{\left[(1+x^2)\left(1+\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\gamma^2}x^2\right)\right]}}\text{ pro } 0<x<\frac{\gamma}{\beta}.$$

Faciamus nunc iterum esse $\alpha^2>\beta^2$, ita ut habeamus eundem modulum, quo supra usi sumus, scilicet

$$\varkappa'^2=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\gamma^2},\quad \varkappa^2=\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2+\gamma^2};$$

praeterea coefficiens integralis plane congruit cum illo, qui in prioribus duobus integralibus apparuit. Itaque, si ponatur $x=tang\,am\,u$ et maximus valor quantitatis $x=\frac{\gamma}{\beta}=tang\,am\,p$, emergit

$$(18.)\qquad u=\varepsilon\varphi,\quad p=\varepsilon\eta;$$

dummodo η valor sit is anguli φ, qui respondet maximo argumento p; atque aequatio curvae fit $\tang^2 am\,u=\tang^2 am(\varepsilon\varphi)=x^2=\frac{\gamma^2-\varrho}{\beta^2+\varrho}=\frac{\gamma^2-r^2}{\beta^2+r^2}$, aut vice versa:

$$\text{IV.}\qquad r^2=\gamma^2\cos^2 am(\varepsilon\varphi)-\beta^2\sin^2 am(\varepsilon\varphi),$$

aut melius:

$$r^2=\gamma^2\left(\cos^2 am(\varepsilon\varphi)-\frac{\sin^2 am(\varepsilon\varphi)}{\tang^2 am(\varepsilon\eta)}\right),\quad\text{unde}$$

$$\text{IV}_{(1)}\qquad r^2=\gamma^2.\frac{\sin^2 am(\varepsilon\eta)-\sin^2 am(\varepsilon\varphi)}{\sin^2 am(\varepsilon\eta)},$$

Quod ad formam huius curvae attinet, ei summam similitudinem esse cum illa (II), cuius aequatio erat:

$$r^2=\beta^2.\frac{\cos^2 coam\,p-\cos^2 coam\,u}{\cos^2 coam\,p}$$

illico perspicies. Pari modo, quo illa, haec curva formam induit in modum rosae concinnatam, propterea quod itidem ex innumeris composita est congruentibus lemniscis, quorum vertices circulum cum radio γ constructum tangunt. Pariterque ac illa in quatuor partes demittit ramos, qui per circuli spatium extenduntur, lemniscos continuatim devolventes, sed nunquam ibi circuli periphe-

riam tangentes, ubi quando eam tetigerunt. (Fig. 14, a et b.) Exemplo curvae aream eruere licebit. Revera nancisceris

$$\sigma = \frac{\gamma^2}{2}\left(\varphi - \int_0^\varphi \frac{\sin^2 \operatorname{am} \varepsilon\varphi . \partial\varphi}{\sin^2 \operatorname{am} \varepsilon\eta}\right) \text{ pro } \varphi < \eta, \text{ aut}$$

$$\sigma = \frac{\gamma^2}{2}\left(\varphi - \int_0^u \frac{\sin^2 \operatorname{am} u . \partial u}{\varepsilon \sin^2 \operatorname{am} p}\right) \text{ pro } u < p, \text{ unde}$$

$$\sigma = \frac{\gamma^2}{2}\left(\varphi - \frac{u - \operatorname{el} u}{\varepsilon x^2 \sin^2 \operatorname{am} p}\right) \text{ aut}$$

$$\text{IV}_{(2)}. \qquad \sigma = \frac{\gamma^2}{2} . \frac{\operatorname{el} u - u . \Delta^2 \operatorname{am} p}{\varepsilon x^2 . \sin \operatorname{am} p},$$

unde pro $u = p$ proficiscitur tota area Σ unius dimidii lemnisci:

$$\text{IV}_{(3)}. \qquad \Sigma = \frac{\gamma^2}{2} . \frac{\operatorname{el} p - p . \Delta^2 \operatorname{am} p}{\varepsilon x^2 \sin^2 \operatorname{am} p},$$

et tempus a vertice usque ad aliquem locum in dimidio lemnisco praeterlapsum,

$$\text{IV}_{(4)}. \qquad t = \frac{\gamma}{k} . \frac{\operatorname{el} u - u . \Delta^2 \operatorname{am} p}{\varepsilon x^2 . \sin^2 \operatorname{am} p},$$

et denique totum tempus T in dimidio quodam lemnisco describendo consumptum,

$$\text{IV}_{(5)} \qquad T = \frac{\gamma}{k} . \frac{\operatorname{el} p - p . \Delta^2 \operatorname{am} p}{\varepsilon x^2 . \sin^2 \operatorname{am} p}.$$

In tribus ultimis integralibus sit $\alpha = \beta$.

Quo posito fit $\gamma^2 = \frac{1}{2}\alpha^2$, atque in duobus primis integralibus $\alpha^6 = \frac{3\mu}{k^2}$, in ultimo $\alpha^6 = \frac{6\mu}{k^2}$; itaque oriuntur integralia

$$\varphi = \alpha \sqrt{\tfrac{3}{2}} . \int_{\alpha^2}^{\varrho} \frac{-\frac{1}{2}\partial\varrho}{(\alpha^2 - \varrho)\sqrt{(\frac{1}{2}\alpha_2 + \varrho)}} \text{ pro } \alpha > \varrho > 0,$$

$$\varphi = \alpha \sqrt{\tfrac{3}{2}} . \int_{\alpha^2}^{\varrho} \frac{+\frac{1}{2}\partial\varrho}{(\varrho - \alpha^2)\sqrt{(\frac{1}{2}\alpha^2 + \varrho)}} \text{ pro } \alpha^2 < \varrho < \infty,$$

$$\varphi = \alpha \sqrt{\tfrac{3}{2}} . \int_{\frac{1}{2}\alpha^2}^{\varrho} \frac{-\frac{1}{2}\partial\varrho}{(\alpha^2 + \varrho)\sqrt{(\frac{1}{2}\alpha^2 - \varrho)}} \text{ pro } \tfrac{1}{2}\alpha^2 > \varrho > 0,$$

quae omnia in limite inferiore infinite magna redduntur; qua de causa ita integremus, ut integralia in limite inferiore evanescant, id est limites invertamus, ponentes

$$\varphi = \alpha\sqrt{\tfrac{3}{2}}.\int_0^\varrho \frac{+\frac{1}{2}\partial\varrho}{(\alpha^2-\varrho)\sqrt{(\frac{1}{2}\alpha^2+\varrho)}} \text{ pro } \alpha^2 > \varrho > 0\ ,$$

$$\varphi = \alpha\sqrt{\tfrac{3}{2}}.\int_\infty^\varrho \frac{-\frac{1}{2}\partial\varrho}{(\varrho-\alpha^2)\sqrt{(\frac{1}{2}\alpha^2+\varrho)}} \text{ pro } \alpha < \varrho < \infty\ ,$$

$$\varphi = \alpha\sqrt{\tfrac{3}{2}}.\int_0^\varrho \frac{+\frac{1}{2}\partial\varrho}{(\alpha^2+\varrho)\sqrt{(\frac{1}{2}\alpha^2-\varrho)}} \text{ pro } 0 < \varrho < \tfrac{1}{2}\alpha^2.$$

Si nunc in duobus primis posueris $\frac{\alpha^2+2\varrho}{3\alpha^2} = z^2$, in ultimo $\frac{\alpha^2-2\varrho}{3\alpha^2} = x^2$, emergent integralia

$$\varphi = \int_{\sqrt{\frac{1}{3}}}^z \frac{\partial z}{1-z^2} \text{ pro } \sqrt{\tfrac{1}{3}} < z < 1\ ,$$

$$\varphi = \int_\infty^z \frac{-\partial z}{z^2-1} \text{ pro } 1 < z < \infty\ ,$$

$$\varphi = \int_x^{\sqrt{\frac{1}{3}}} \frac{\partial x}{1-x^2} \text{ pro } 0 < x < \sqrt{\tfrac{1}{3}},$$

unde, ponendo $\text{ArcTang}\sqrt{\frac{1}{3}} = \delta$, procedunt aequationes:

$$\text{Tang}(\delta+\varphi) = z = \sqrt{\left(\frac{\alpha^2+2r^2}{3\alpha^2}\right)}\ ,$$

$$\text{Cot}\,\varphi = z = \sqrt{\left(\frac{\alpha^2+2r^2}{3\alpha^2}\right)}\ ,$$

$$\text{Tang}(\delta-\varphi) = x = \sqrt{\left(\frac{\alpha^2-2r^2}{3\alpha^2}\right)}\ ,$$

aut vice versa.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{V.} & r^2 = \frac{1}{2}\alpha^2[3\,\text{Tang}^2(\delta+\varphi)-1], \\ \text{VI.} & r^2 = \frac{1}{2}\alpha^2[3\,\text{Cot}^2\varphi-1], \\ \text{VII.} & r^2 = \frac{1}{2}\alpha^2[1-3\,\text{Tang}^2(\delta-\varphi)], \end{array}\right\} \text{ ubi est } \text{Tang}\,\delta = \sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Quod ad primam curvam pertinet, crescente angulo φ a limite 0 usque ad ∞, etiam crescit r a valore 0 usque $\pm\alpha$. Curva igitur est *dupla spiralis* aliqua ex centro circuli cum radio α constructi demittens duo membra, quae per circuli spatium in contrariam partem procurrunt atque, infinitis circa centrum revolutionibus factis, circulum ipsum tangere contendunt.

Altera aequatio (VI.) docet, radium vectorem, crescente angulo φ a valore 0 usque ad $\pm\infty$, decrescere a valore $\pm\infty$ usque ad $\pm\alpha$. Itaque haec curva

spiralis est quadruplex, quae et ex positivo et ex negativo infinito duo demittit membra, quorum bina in contrarias partes extenduntur atque, infinitis conversionibus circa centrum peractis temporeque infinito praeterlapso, ad circulum cum radio α constructum appropinquare petunt. Sed hoc per se intelligitur, punctum mobile per unum tantummodo ramum progredi posse, quum quodvis membrorum tempusque in ipso describendo consumptum infinite magna sint.

In ultima curva est $r = 0$ pro $\varphi = 0$, sed $r = \pm\alpha\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ pro $\varphi = \delta$; angulo φ magis crescente decrescit r atque iterum $= 0$ evadit, simulac φ valorem 2δ adeptus est. Sed pro omnibus ceteris anguli φ valoribus, qui 2δ quantitate superant, radius vector permanebit imaginarius. Itaque ex duobus foliis constat haec curva, ita ut ea aliqua ex parte similis sit lemniscatae. Angulus, cuius inter crura utrumque folium continetur, definitus est per formulam

$$\mathfrak{Tang}\, 2\delta = \frac{2\,\mathfrak{Tang}\,\delta}{1+\mathfrak{Tang}^2\delta} = \frac{2\sqrt{\frac{1}{3}}}{1+\frac{1}{3}} = \tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{1}{3}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \sin 60^\circ$$

ac quidem, *Gudermanni tabula numerorum longitudinalium* adhibita, invenitur esse

$$\delta = 37^\circ\, 43'\, 41''.$$

Ut denique curvarum areae deriventur, ipsarum aequationibus primum ita scriptis:

$$r^2 = \tfrac{1}{2}\alpha^2[2 - 3(1 - \mathfrak{Tang}(\delta + \varphi))],$$
$$r^2 = \tfrac{1}{2}\alpha^2[2 + 3(\mathfrak{Cot}^2\varphi - 1)],$$
$$r^2 = \tfrac{1}{2}\alpha^2[3(1 - \mathfrak{Tang}(\delta - \varphi)) - 2],$$

formulisque $\partial\,\mathfrak{Tang}\,x = (1 - \mathfrak{Tang}\,x)\,\partial x$,
$\partial\,\mathfrak{Cot}\,x = -(\mathfrak{Cot}^2 x - 1)\,\partial x$

rite adhibitis, integrandum est, postquam aequationes cum $\tfrac{1}{2}\partial\varphi$ multiplicatae sunt.

Denique valeat lex attractionis pronunciata in hac formula:

$$R = \frac{n-1}{2}\cdot\frac{\mu}{r^n}$$

§. 7.

Postquam omnes eos casus, qui vulgaribus tractari queunt subsidiis, in disceptationem vocavi, nunc consideretur problema generale, quod in singulari casu etiam absolvere licet.

Revera reperies

$$(1.)\qquad \varphi^2 = k^2 - 2\int_a^r R.\partial r = k^2 - \mu.\int_a^r \frac{(n-1)\partial r}{r^n} = k^2 - \frac{\mu}{a^{n-1}} + \frac{\mu}{r^{n-1}},$$

quo valore in generali orbitarum aequatione substituto orietur:

$$\varphi = \int_a^r \frac{c.\partial r}{r\sqrt{\left[-c^2 + \frac{\mu}{r^{n-3}} + (k^2 - \frac{\mu}{a^{n-1}})r^2\right]}} \text{ sive}$$

$$(2.)\qquad \varphi = \int_a^r \frac{c.r^{\frac{1}{2}(n-3)}.\partial r}{\sqrt{\left[\mu - c^2 r^{n-3} + (k^2 - \frac{\mu}{a^{n-1}})r^{n-1}\right]}}.$$

Si nunc ponamus, celeritatem initialem ita comparatam esse, ut sit

$$(3.)\qquad \begin{cases} k^2 = \frac{\mu}{a^{n-1}}, \text{ igitur} \\ v^2 = \frac{\mu}{r^{n-1}}, \end{cases}$$

in aequatione (2) tertium radicandi membrum evanescet, atque integratio ipsa succedet.

Casus singularis.

Ponendo $k^2 = \frac{\mu}{a^{n-1}}$, aequatio (2) transit in

$$\varphi = \int_a^r \frac{r^{\frac{1}{2}(n-3)}.\partial r}{\sqrt{(\frac{\mu}{c^2} - r^{n-3})}},$$

aut quia est $\mu = k^2.a^{n-1}$, $c^2 = a^2 k^2 \sin^2\lambda$:

$$(4.)\qquad \varphi = \int_a^r \frac{r^{\frac{1}{2}(n-3)}.\partial r}{\sqrt{(\frac{a^{n-3}}{\sin^2\lambda} - r^{n-3})}}.$$

Haud difficile erit intellectu, etiam in hac generaliore curva exstare aliquod punctum, ubi $\lambda = \frac{1}{2}\pi$ esse potest; nimirum invenies valere formulam

$$\text{tang}\lambda = r\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \sqrt{\frac{r^{n-3}}{\frac{1}{\sin^2\lambda}\cdot a^{n-3} - r^{n-3}}}$$

$$\text{ideoque tang}\tfrac{1}{2}\pi = \sqrt{\frac{a^{n-3} - r^{n-3}}{r^{n-3}}},$$

id quod conveniet, si $r = a$ evaserit. Quare in hoc puncto motus exordiatur, ita

ut celeritatis initialis k directio primam puncti sollicitandi distantiam a centro sub angulis rectis perscindat. Quo facto habemus

$$\varphi = \int_a^r \frac{-r^{\frac{1}{2}(n-5)}.\,\partial r}{\sqrt{(a^{n-3}-r^{n-3})}}, \quad a > r > 0,$$

unde, ponendo $\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{n-3}{2}} = x$, proficiscitur

$$\frac{n-3}{2}\cdot\varphi = \int_1^x \frac{-\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}}, \quad \text{itaque}$$

$$\frac{n-3}{2}\cdot\varphi = \arccos\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{1}{2}(n-3)}\right], \quad \text{aut}$$

$$\text{I}_{(1)}. \qquad r^{\frac{1}{2}(n-3)} = a^{\frac{1}{2}(n-3)}.\cos[\tfrac{1}{2}(n-3)\varphi], \text{ sive}$$

$$\text{I}_{(2)}. \qquad r^{n-3} = \tfrac{1}{2}.a^{n-3}[1+\cos(n-3)\varphi].$$

Haec aequatio innumeras continet singulares curvas, quarum simplicissima emergit posito $n = 1$, scilicet:

$$(5.) \qquad a = r.\cos\varphi,$$

quae est aequatio *rectae lineae* quantitate a distantis a centro. Ponendo $n = 2$ proficiscitur aequatio *vulgaris parabolae*:

$$(6.) \qquad r = \frac{2a}{1+\cos\varphi} = \frac{a}{\cos^2\frac{\varphi}{2}},$$

ubi $2a$ par est parametro. Sed in eo casu, ubi $n = 3$ est, aequatio nihil docet; id quod dicere vult, hoc in casu relationem inter r et φ non adesse. Etenim supra (§. 2) cognovimus, pro $n = 3$, pro $\lambda = \frac{1}{2}\pi$ et pro $\mu = c^2 = a^2k^2$ oriri aequationem circuli: $r = a$.

Sin autem est $n > 3$, quotiescunque n impar est numerus, prima aequationis forma accommodatissima erit, pro pari n altera magis probabitur. Pro numero integro n et pro $n > 3$, aequatio nostra magnum curvarum repraesentat genus multifoliarium, quarum natura mutatur, prout n par aut impar erit numerus; ac quidem omnes, quae ad *imparem* spectant numerum n, compositae sunt ex foliis, quorum quodvis aeque amplo, ac ipsum implet, angulo separatur a proximo; sed in omnibus, quae ad *parem* numerum n pertinent, folia inter se connexa sunt. Etenim illic radius vector fieri potest et negativus et imaginarius, hic semper positivus est.

Sed id potissimum tantopere opprimit, quod in primo curvarum genere quasi curva *monofolia* primus apparet *circulus*, cuius in peripheria sedes est accelerationis:

$$(7.) \qquad r = a\cos\varphi$$

pro

$$R = \frac{2\mu}{r^5} = \frac{2a^4k^2}{r^5} = \frac{2a^2c^2}{r^5},$$

quem circulum sequitur *lemniscata* quasi *bifolia:*

$$(8.) \qquad r^2 = a^2.\cos 2\varphi$$

pro

$$R = \frac{3\mu}{r^7} = \frac{3a^6k^2}{r^7} = \frac{3a^4c^2}{r^7},$$

cui proxima est *trifolia*, quae constat ex tribus separatis foliis (Tab. VII. Fig. 16.),

$$(9.) \qquad r^3 = a^3\cos 3\varphi$$

pro

$$R = \frac{4\mu}{r^9} = \frac{4a^8k^2}{r^9} = \frac{4a^6c^2}{r^9}$$

et sic deinceps;

quod autem ex altero curvarum genere simplicissima quasi *monofolia* procedit *cardioïdes:*

$$(10.) \qquad r = \tfrac{1}{2}a(1+\cos\varphi)$$

pro

$$R = \tfrac{3}{2}\cdot\frac{\mu}{r^4} = \tfrac{3}{2}\cdot\frac{a^3k^2}{r^4} = \tfrac{3}{2}\cdot\frac{ac^2}{r^4},$$

quam quidem sequitur *trifolia*, sed foliis inter se cohaerentibus praedita:

$$(11.) \qquad r = \tfrac{1}{2}a^3(1+\cos 3\varphi)$$

pro

$$R = \tfrac{5}{2}\cdot\frac{\mu}{r^6} = \tfrac{5}{2}\cdot\frac{a^5k^2}{r^6} = \tfrac{5}{2}\cdot\frac{a^3c^2}{r^6},$$

cui proxima est curva *quinquefolia* item cum foliis inter se connexis (Tab. VII. Fig. 17.):

$$r^5 = \tfrac{1}{2}a^5(1+\cos 5\varphi)$$

pro

$$R = \tfrac{7}{2}\cdot\frac{\mu}{r^8} = \tfrac{7}{2}\cdot\frac{a^7k^2}{r^8} = \tfrac{7}{2}\cdot\frac{a^5c^2}{r^8}$$

et ceterae.

Quod ad huius generalioris pertinet curvae aream, integratio indefinita non succedet; sed totam aream unius dimidii folii parvo artificio ope *functionis Eulerianae* $\Gamma(\;)$ computare licet. Nimirum ex aequatione

$$r^{\frac{1}{2}(n-3)} = a^{\frac{1}{2}(n-3)}.\cos\left[\tfrac{1}{2}(n-3)\right]\varphi$$

43*

intelliges, punctum mobile per unum dimidium folium procurrisse, si angulus φ creverit a valore 0 usque ad $\frac{\pi}{n-3}$. Si igitur aequationem

$$r^2 = a^2(\cos\tfrac{n-3}{2}\varphi)^{\frac{4}{n-3}}$$

cum $\frac{1}{2}\partial\varphi$ multiplicaveris, pro tota unius dimidii folii area Σ obtinebis

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}a^2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{n-3}}(\cos\tfrac{n-3}{2}\varphi)^{\frac{4}{n-3}}.\partial\varphi,$$

quae formula ponendo $\frac{n-3}{2}\varphi = \psi$ redit in hanc:

$$\Sigma = \frac{a^2}{n-3}\cdot\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\cos\psi)^{\frac{4}{n-3}}.\partial\psi.$$

Porro ponatur $\sin\psi = x$, unde fit

$$(\cos\psi)^{\frac{4}{n-3}}.\partial\psi = \partial(\sin\psi)(\cos\psi)^{\frac{4}{n-3}-1} = \partial(\sin\psi)(\cos^2\psi)^{\frac{7-n}{2n-6}} = \partial x(1-x^2)^{\frac{n+1}{2n-6}-1},$$

itaque, si scribamus parumper p loco $\frac{n+1}{2n-6}$, oritur:

$$\Sigma = \frac{a^2}{n-3}\cdot\int_0^1(1-x^2)^{p-1}.\partial x \quad \text{sive}$$

$$\Sigma = \frac{a^2}{n-3}\cdot\int_0^1(1+x)^{p-1}(1-x)^{p-1}.\partial x.$$

Prout nunc $1-x=2y$ aut $1+x=2y$ posueris, emerget:

aut $$\Sigma = \frac{2^{2p-1}.a^2}{n-3}\cdot\int_0^{\frac{1}{2}}y^{p-1}.(1-y)^{p-1}.\partial y$$

aut $$\Sigma = \frac{2^{2p-1}.a^2}{n-3}\cdot\int_{\frac{1}{2}}^1 y^{p-1}.(1-y)^{p-1}.\partial y.$$

Utrumque integrale par est areae unius dimidii folii, itaque addendo procedit

$$2\Sigma = \frac{2^{2p-1}.a^2}{n-3}\cdot\left(\int_0^{\frac{1}{2}}y^{p-1}(1-y)^{p-1}\partial y + \int_{\frac{1}{2}}^1 y^{p-1}(1-y)^{p-1}\partial y\right),$$

quae integralia in unum se constringunt, ita ut habeamus

$$\text{I}_{(3)}.\qquad \Sigma = \frac{2^{2p-2}.a^2}{n-3}\cdot\int_0^1 y^{p-1}.(1-y)^{p-1}.\partial y.$$

Secundum notissimam formulam

$$\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}.\partial y = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

ubi

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x}.x^{\alpha-1}.\partial x = \int_0^1 \left[\log\frac{1}{y}\right]^{\alpha-1}.\partial y$$

est atque α et β valores designant positivos, nanciscimur

$$\Sigma = \frac{2^{2p-2}.a^2}{n-3}\cdot\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)}$$

aut, si valorem numeri p restitueris:

$$\text{I}_{(4)}.\qquad \Sigma = \frac{2^{\frac{n+1}{n-3}-2}.a^2}{n-3}\cdot\frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n-3}\right)\right\}^2}{\Gamma\left(\frac{n+1}{n-3}\right)} \text{ pro } n>3,$$

cuius ope inter alias etiam aream illius *trifoliae*, quam supra (in §. 5) consideravimus, afferre licet, si $n=6$ posueris; ac quidem ipsius area dimidii folii erit:

$$\text{II}.\qquad \Sigma = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{3}\cdot a^2\cdot\frac{[\Gamma(\frac{7}{6})]^2}{\Gamma(\frac{7}{3})} = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{48}\cdot a^2\cdot\frac{[\Gamma(\frac{1}{6})]^2}{\Gamma(\frac{1}{3})}.$$

Ex formula, quam invenimus, etiam tempus T in describenda area Σ consumptum deducimus, tantum multiplicando cum $\frac{2}{c}=\frac{2}{ak}$:

$$\text{I}_{(5)}.\qquad T = \frac{2^{\frac{n+1}{n-3}-1}}{n-3}\cdot\frac{a}{k}\cdot\frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n-3}\right)\right\}^2}{\Gamma\left(\frac{n+1}{n-3}\right)} \text{ pro } n>3.$$

Insuper perspicuum est, conditionis aequatione

$$k^2 = \frac{\mu}{a^{n-1}}$$

servata, numerum n quolibet gaudere posse valore formulasque erutas non mutari.

Ad extremum si respiciamus indolem naturamque curvarum, quas invenimus, constat, nullam adesse, quae, ut vulgaris ellipsis, conclusa sit simulque extra centrum attractionis permaneat. Sed eae, quae per centrum non transeant, semper in infinitum extenduntur. Quam ob rem omnes illas curvas tantummodo cometarum cursibus idoneas esse inde colligimus.

Scriptum Berolini mense Febr. 1853.

14.

Beitrag zur Theorie der Bewegung der Räderfuhrwerke, mit Inbegriff der Dampfwagen.

(Von Herrn *J. P. G. v. Heim*, Königl. würtemb. Oberstlieutenant a. D.)

(Schluss von Nr. 4, 9 und 11 in den drei vorigen Heften.)

Zweites Kapitel.

Der sechsrädrige Dampfwagen.

Bezeichnungen.

§. 69.

Neben den im (§ 56) angeführten Bezeichnungen, welche im gleichen Sinne, wie auf den vierrädrigen Dampfwagen, auch auf den sechsrädrigen bezogen werden, kommen für den letztern noch folgende zur Anwendung:

$2Q_{\prime\prime}$ ist das Gewicht der beiden Tragräder mit ihrer Achse, $r_{\prime\prime}$ der Halbmesser des auf der Bahnlinie gehenden äusseren Umfanges derselben, $\varrho_{\prime\prime}$ der Halbmesser des in den Lagern laufenden Theiles der Achse;

$2N_{\prime\prime}$ der Druck der beiden Tragräder in senkrechter Richtung auf die Bahn;

$2R_{\prime\prime}$ das Reibungs-Erforderniss zur rollenden Umdrehung dieser Räder;

$\frac{2Q_{\prime\prime}}{g}k_{\prime\prime}^2$ das Trägheitsmoment des Tragräderpaares, mit Inbegriff der Achse, in Bezug auf die Axenlinie;

$s_{\prime\prime} = \frac{r_{\prime\prime}^2 + k_{\prime\prime}^2}{r_{\prime\prime}}$,

$u_{\prime\prime}$ die Winkelgeschwindigkeit der Tragräder, in dem Sinne wie u (§. 7.) genommen, und $U_{\prime\prime} = \frac{k_{\prime\prime}^2}{g}\cdot\frac{\partial u_{\prime\prime}}{\partial t}$;

$\varphi_{\prime\prime}$ der Coefficient der Reibung zwischen der Achse der Tragräder und ihren Lagern;

a, der in seiner Projection auf die Bahnlinie genommene Abstand zwischen der Axenlinie der Tragräder und jener des hintern Treibräderpaares.

$E_{,,,}$ $F_{,,}$ und $G_{,,}$ beziehen sich in gleicher Bedeutung auf die Achse der Tragräder, wie E, F, G (§. 7) auf die Achse des zweirädrigen Fuhrwerks.

Rollende Bewegung.

§. 70.

Indem man hier sogleich $G = G_{,}$ wie bei dem vierrädrigen Dampfwagen (§. 57) annimmt, und $E + E_1 = E_2$, $F + F_1 = F_2$, $\frac{F_2}{E_2} = G_2$ setzt, wird der sechsrädrige Dampfwagen als aus drei verschiedenen Systemen fester Körper bestehend betrachtet werden, von denen der ganze Dampfwagen mit seinen Rädern und Achsen zusammen das erste (§. 8), das doppelte Treibräderpaar das zweite, und das Tragräderpaar das dritte ist.

Zu den sechs Unbekannten des vierrädrigen Dampfwagens kommen demnach noch die vier weiteren auf das dritte System bezüglichen hinzu, nämlich $R_{,,,}$ $N_{,,}$, $E_{,,}$ und $G_{,,}$, so dass die ganze Zahl der Unbekannten sich auf *zehn* beläuft, während die Zahl der zu ihrer Bestimmung dienenden Gleichungen nur *neun* beträgt. Hieraus sieht man, dass die vorliegende Aufgabe, wenn sie auf Fuhrwerke oder Dampfwagen mit drei oder überhaupt mit mehr als zwei Räderpaaren angewendet wird, zu den *unbestimmten* gehört; eben so wie die Frage, in welchem Verhältnisse der Druck einer auf mehr als drei festen Puncten ruhenden Last auf diese verschiedenen Puncte sich vertheile, eine unbestimmte ist, und einer Entscheidung auf dem Wege der Rechnung etwa nur dadurch fähig wird, dass diese zugleich auf die durch den Druck entstehende, wenn auch noch so geringe, Gestaltsänderung der unterstützten Theile Rücksicht nimmt. Da es sich hier insbesondere darum handelt, wie gross die Theile N und N_1 der Summe $N + N_1$ sind, d. i. wie der Gesammtdruck der beiden Treibräderpaare auf die Bahn zwischen denselben sich theilt, so wird man die Gleichung $N_1 = \lambda(N + N_1)$ den *neun* aus den Bedingungen der Aufgabe sich ergebenden Gleichungen als *zehnte* hinzufügen, und die Verhältnisszahl λ, welche nur zwischen 0 und 1, beide einschliesslich, liegen kann, in der Folge durch eine weitere, entsprechende Bedingung näher zu bestimmen suchen.

Die in die Gleichungen eingehenden Kräfte und Widerstände werden nach denselben Richtungen wie bisher zerlegt, und deren Momente für das erste System auf den Punct, in welchem das hintere Treibrad und die Bahn sich berühren, für das zweite und dritte System auf die zugehörige Axenlinie bezogen werden.

Wird das Vorausgeschickte zum Grunde gelegt, und beachtet, dass bei der rollenden Bewegung $\frac{dx}{dt} = r_, u_, = r_{,,} u_{,,}$ oder $U_1 = (s_1 - r_1)X$, $U_{,,} = (s_{,,} - r_{,,})X$ ist, so finden sich, die Achsen der Räder als an diesen fest vorausgesetzt, für irgend einen Augenblick der Bewegung folgende

(J.) *Gleichungen der rollenden Bewegung*

des sechsrädrigen Dampfwagens:

$$1)\ -K\cos\beta - S + 4R_, - 2R_{,,} - (P_, + 4Q_, + 4Q_{,,})(\sin\alpha + X) = 0,$$

$$2)\ -K\sin\beta + 2(N + N_, + N_{,,}) - (P_, + 4Q_, + 2Q_{,,})\cos\alpha = 0,$$

$$3)\ -n\cos\beta . K + cP_, + (a\cos\alpha - 2r_,\sin\alpha)2Q_, + (a_,\cos\alpha - r_{,,}\sin\alpha)2Q_{,,} \\ - 2aN_, - 2a_, N_{,,} - mS - (hP_, + 4s_, Q_, + 2s_{,,}4Q_{,,})X = 0,$$

$$4)\ 2E_2(G_2 - \varphi_,) + 4R_, + T.F\theta_+ - 4Q_,(\sin\alpha + X) = 0,$$

$$5)\ -2E_2(1 + \varphi_, G_2) + 2(N + N_,) - T.F_,\theta_+ - 4Q_,\cos\alpha = 0,$$

$$6)\ -\varphi_1\varrho_, . 2E_2\sqrt{(1 + G_2^2)} - 4r_, R_, + T.F_2\theta_+ - 4Q_,(s_, - r_,)X = 0,$$

$$7)\ 2E_{,,}(G_{,,} - \varphi_{,,}) - 2R_{,,} - 2Q_{,,}(\sin\alpha + X) = 0,$$

$$8)\ -2E_{,,}(1 + \varphi_{,,} G_{,,}) + 2N_{,,} - 2Q_{,,}\cos\alpha = 0,$$

$$9)\ -\varphi_, \varrho_{,,} . 2E_{,,}\sqrt{(1 + G_{,,}^2)} + 2r_{,,}R_{,,} - 2Q_{,,}(s_{,,} - r_{,,})X = 0,$$

$$10)\ N_, - \lambda(N + N_,) = 0;$$

aus welchen Gleichungen, indem K und λ vorerst als gegeben betrachtet werden, die Grössen X, $R_,$, $R_{,,}$, N, $N_,$, $N_{,,}$, E_2, G_2, $E_{,,}$, $G_{,,}$ als Unbekannte zu entwickeln sind.

§. 71.

Wird zu diesem Ende, in Uebereinstimmung mit den vorangegangenen Auflösungen,

$$\frac{1 + \varphi_1 G_2}{\sqrt{(1 + \varphi_1^2)}} \text{ statt } \sqrt{(1 + G_2^2)}, \quad \frac{1 + \varphi_{,,} G_{,,}}{\sqrt{(1 + \varphi_{,,}^2)}} \text{ statt } \sqrt{(1 + G_{,,}^2)},$$

$$\frac{\varphi_1 \varrho_1}{r_,\sqrt{(1 + \varphi_1^2)}} = \mu_1, \quad \frac{\varphi_{,,}\varrho_{,,}}{r_{,,}\sqrt{(1 + \varphi_{,,}^2)}} = \mu_{,,},$$

und zugleich $2E_2(G_2 - \varphi_,) = Y^2$, $\quad 2E_2(1 + \varphi_, G_2) = Z_2$,

$$2E_{,,}(G_{,,} - \varphi_{,,}) = Y_{,,}, \quad 2E_{,,}(1 + \varphi_{,,} G_{,,}) = Z_{,,}$$

gesetzt, was $2E_2 = \frac{Z_2 - \varphi_1 Y_2}{1 + \varphi_1^2}$, $\quad 2F_2 = \frac{Y_2 + \varphi_1 Z_2}{1 + \varphi_1^2}$, $\quad G_2 = \frac{Y_2 + \varphi_1 Z_2}{Z_2 - \varphi_1 Y_2}$,

$$2E_{,,} = \frac{Z_{,,} - \varphi_{,,} Y_{,,}}{1 + \varphi_{,,}^2}, \quad 2F_{,,} = \frac{Y_{,,} + \varphi_{,,} Z_{,,}}{1 + \varphi_{,,}^2}, \quad G_{,,} = \frac{Y_{,,} + \varphi_{,,} Z_{,,}}{Z_{,,} - \varphi_{,,} Y_{,,}}$$

giebt, so dass die Grössen Y_2, $Y_{,,}$, Z_2, $Z_{,,}$ statt E_2, $E_{,,}$, G_2, $G_{,,}$ zu entwickeln sind, so erhält man aus den Gleichungen (T):

(1, 4 u. 7) $Y_2 + Y_{,,} = -K\cos\beta - S - T.F\theta_+ - P_1(\sin\alpha + X)$,

(2, 5 u. 8) $Z_2 + Z_{,,} = P_{,}\cos\alpha + K\sin\beta - T.F_{,}\theta_+$,

(3, 5, 8 u. 10) $(a_1 - \lambda a)Z_2 = C + (n\cos\beta + a_1\sin\beta)K - (a_1 - \lambda a)T.F_1\theta_+$
$+ (hP_{,} + 4s_{,}Q_{,} + 2s_{,,}Q_{,,})X$;

wo $C = (a_{,}\cos\alpha - c)P' - a\cos\alpha(1-2\lambda)2Q_{,} + (4r_{,}Q_{,} + 2r_{,,}Q_{,,})\sin\alpha + mS$ ist,

(4 u. 6) $Y_2 - \mu_1 Z_2 = 4Q_1\left(\sin\alpha + \frac{s_1}{r_1}X\right) - T.\left(\frac{1}{r_{,}}F_2\theta_+ + F\theta_+\right)$,

(7 u. 9) $Y_{,,} - \mu_{,,}Z_{,,} = 2Q_{,,}\left(\sin\alpha + \frac{s_{,,}}{r_{,,}}X\right)$,

und findet durch Auflösung dieser fünf abgeleiteten Gleichungen:

$$X = \frac{(a_{,} - \lambda a)\left[T.\left(\frac{1}{r'}F_2\theta_+ + \mu_{,}F_{,}\theta_+\right) - K(\cos\beta + \mu_{,,}\sin\beta) - (P_{,} + 4Q_{,} + 2Q_{,,})\sin\alpha - \mu_{,,}P_{,}\cos\alpha - S\right] - (\mu_{,} - \mu_{,,})[C + (n\cos\beta + a_{,}\sin\beta)K]}{(a_{,} - \lambda a)\left(P_{,} + 4\frac{s_{,}}{r_{,}}Q_{,} + 2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}\right) + (\mu_{,} - \mu_{,,})(hP' + 4s_{,}Q_{,} + 2s_{,,}Q_{,,})},$$

$$Y_2 = \frac{\begin{array}{l}\left(P_{,} + 2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}\right)\left\{\mu_{,}[C + (n\cos\beta + a_{,}\sin\beta)K - (\alpha - \lambda a)T.F_{,}\theta_+ + (a_{,} - \lambda a)\left[T.\left(\frac{1}{r_{,}}F_2\theta_+ + F\theta_+\right) - 4Q_{,}\sin\alpha\right]\right\} \\ -(hP_{,} + 4s_{,}Q_{,} + 2s_{,,}Q_{,,})[\mu_{,}(K\cos\beta + \mu_{,,}\sin\beta) + (P_{,} + 2Q_{,,})\sin\alpha + \mu_{,,}P_{,}\cos\alpha + S + T.(F\theta_+ - \mu_{,,}F\theta_+)] \\ -\mu_{,,}\left[T.\left(\frac{1}{r_{,}}F_2\theta_+ + F\theta_+\right) - 4Q_{,}\sin\alpha\right] - 4\frac{s_{,}}{r_{,}}[(a_{,} - \lambda a)[K(\cos\beta + \mu_{,,}\sin\beta) \\ + (P_{,} + 2Q_{,,})\sin\alpha + \mu_{,,}P_{,}\cos\alpha + T.F\theta_+ + S] - \mu_{,,}[C + (n\cos\beta + a_{,}\sin\beta)K]\end{array}}{(a_{,} - \lambda a)\left(P_{,} + 4\frac{s_{,}}{r_{,}}Q_{,} + 2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}\right) + (\mu_{,} - \mu_{,,})(hP_{,} + 4s_{,}Q_{,} + 2s_{,,}Q_{,,})},$$

$$Z_2 = \frac{\begin{array}{l}\left(P_{,} + 4\frac{s_{,}}{r_{,}}Q_{,} + 2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}\right)[C + (n\cos\beta + a_{,}\sin\beta)K - (a_{,} - \lambda a)T.F_{,}\theta_+] + (hP_{,} + 4s_{,}Q_{,} + 2s_{,,}Q_{,,})\left[T\left(\frac{1}{r_{,}}F_2\theta_+ + \mu_{,,}F_{,}\theta_+\right)\right. \\ \left. - K(\cos\beta + \mu_{,,}\sin\beta) - (P_{,} + 4Q_{,} + 2Q_{,,})\sin\alpha - \mu_{,,}P_{,}\cos\alpha - S\right]\end{array}}{(a_{,} - \lambda a)\left(P' + 4\frac{s_{,}}{r_{,}}Q_{,} + 2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}\right) + (\mu_{,} - \mu_{,,})(hP_{,} + 4s_{,}Q_{,} + 2s_{,,}Q_{,,})},$$

$$Y_{,,} = \frac{\begin{array}{l}\left(P_{,} + 4\frac{s_{,}}{r_{,}}Q_{,}\right)[\mu_{,}[(a_{,} - \lambda a)P_{,}\cos\alpha - (n\cos\beta + \lambda a\sin\beta)K - C] + (a_{,} - \lambda a)2Q_{,,}\sin\alpha] \\ + (hP_{,} + 4s_{,}Q_{,} + 2s_{,,}Q_{,,})\Big[\mu_{,,}\Big[K(\cos\beta + \mu_{,}\sin\beta) + (P_{,} + 4Q_{,})\sin\alpha + \mu_{,}P_{,}\cos\alpha \\ -T.\left(\frac{1}{r_{,}}F_2\theta_+ + \mu_{,}F_{,}\theta_+\right) + S\Big] + \mu_{,}.2Q_{,,}\sin\alpha\Big] + 2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}\Big[(a_{,} - \lambda a)\Big[T.\left(\frac{1}{r_{,}}F_2\theta_+ + \mu_{,}F_{,}\theta_+\right) \\ - K\cos\beta - (P_{,} + 4Q_{,})\sin\alpha - S\Big] - \mu_{,}[C + (n\cos\beta + a_{,}\sin\beta)K]\Big]\end{array}}{(a_{,} - \lambda a)\left(P_{,} + 4\frac{s_{,}}{r_{,}}Q_{,} + 2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}\right) + (\mu_{,} - \mu_{,,})hP_{,} + 4s_{,}Q_{,} + 2s_{,,}Q_{,,})},$$

$$Z_{,,} = \frac{\begin{array}{c}\left[(P_, + 4\frac{s_,}{r_,}Q_, + 2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,})((a_, - \lambda a)P_,\cos\alpha - (n\cos\beta + \lambda a\sin\beta)K - C)\right] \\ + (hP_, + 4s_,Q_, + 2s_{,,}Q_{,,})\left[K(\cos\beta + \mu_,\sin\beta) + (P_, + 4Q_, + 2Q_{,,})\sin\alpha + \mu_,P_,\cos\alpha + S\right. \\ \left. - T\cdot(\frac{1}{r_,}F_2\theta \;\; + \mu_,F_1\theta_+)\right]\end{array}}{(a_, - \lambda a)(P_, + 4\frac{s_,}{r_,}Q_, + 2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}) + (\mu_, - \mu_{,,})(hP_, + 4s_,Q_, + 2s_{,,}Q_{,,})};$$

womit zugleich, vermöge:

$$(4\,\text{u.}\,6)\quad 4R_, = T\cdot\frac{1}{r_,}F_2\theta_+ - \mu_,Z_2 - 4Q_,\left(\frac{s_,}{r_,} - 1\right)X = 4Q_,(\sin\alpha + X) - Y_2 - T.F\theta_+,$$

$$(5)\, 2(N + N_,) = Z_2 + 4Q_,\cos\alpha + T.F_1\theta_+,$$

$$(7\,\text{u.}\,9)\quad 2R_{,,} = \mu_{,,}Z_{,,} + 2Q_{,,}\left(\frac{s_{,,}}{r_{,,}} - 1\right)X = Y_{,,} - 2Q_{,,}(\sin\alpha + X),$$

$$(8)\qquad 2N_{,,} = Z_{,,} + 2Q_{,,}\cos\alpha,$$

so wie, vermöge (**3** oder **10**), N und $N_,$ einzeln genommen, entwickelt sind.

§. 72.

Wird zur Bestimmung von K der so eben gefundene Ausdruck von X dem auf die rollende Bewegung des angehängten Wagenzuges Bezug habenden (§. 59), nämlich

$$X = \frac{K(\cos\beta + \mu\sin\beta) - \{\mathfrak{P}\}}{\{P + 4\frac{s}{r}Q\}}$$

gleich gesetzt, so findet sich für die beschleunigte Bewegung:

$$K = \frac{\begin{array}{c}(a_1 - \lambda a)\left[\left\{P + 4\frac{s}{r}Q\right\}\left(T\cdot(\frac{1}{r_,}F_2\theta_+ + \mu_,F_,\theta_+) - (P_, + 4Q_, + 2Q_{,,})\sin\alpha - \mu_{,,}P_,\cos\alpha - S\right)\right. \\ \left. + (P_, + 4\frac{s_,}{r_,}Q_, + 2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q)\{\mathfrak{P}\}\right] \\ - (\mu_, - \mu_{,,})\left[\left\{P + 4\frac{s}{r}Q\right\}C - (hP_, + 4s_,Q_, + 2s_{,,}Q_{,,})\{\mathfrak{P}\}\right]\end{array}}{\begin{array}{c}(a_, - \lambda a)\left(\left\{P + 4\frac{s}{s}Q\right\}(\cos\beta + \mu_{,,}\sin\beta) + (P_, + 4\frac{s_,}{r_,}Q_, + 2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,})(\cos\beta + \mu\sin\beta)\right) \\ + (\mu_, - \mu_{,,})\left(\left\{P + 4\frac{s}{r}Q\right\}(n\cos\beta + a_,\sin\beta) + (hP_, + 4s_,Q_, + 2s_{,,}Q_{,,})(\cos\beta + \mu\sin\beta)\right)\end{array}},$$

und dadurch

$$X = \frac{\begin{array}{c}(a_{,}-\lambda a)\Big[\Big(T.\big(\frac{1}{r_{,}}F_{2}\theta_{+}+\mu_{,}F_{,}\theta_{+}\big)-(P_{,}+4Q_{,}+2Q_{,,})\sin\alpha-\mu_{,,}P_{,}\cos\alpha-S\Big)(\cos\beta+\mu\sin\beta)\\ -\{\mathfrak{P}\}(\cos\beta+\mu_{,,}\sin\beta)\Big]\\ -(\mu_{,}-\mu_{,,})\Big(C(\cos\beta+\mu\sin\beta)+\{\mathfrak{P}\}(n\cos\beta+a_{,}\sin\beta)\Big)\end{array}}{\begin{array}{c}(a_{,}-\lambda a)\Big[\big\{P+4\frac{s}{r}Q\big\}(\cos\beta+\mu_{,,}\sin\beta)+\big(P_{,}+4\frac{s_{,}}{r_{,}}Q_{,}+2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}\big)(\cos\beta+\mu\sin\beta)\Big]\\ +(\mu_{,}-\mu_{,,})\Big[\big\{P+4\frac{s}{r}Q\big\}(n\cos\beta+a_{,}\sin\beta)+(hP_{,}+4s_{,}Q_{,}+2s_{,,}Q_{,,})(\cos\beta+\mu\sin\beta)\Big]\end{array}}$$

Nachdem auf solche Weise die Unbekannten in der Voraussetzung

$$\sqrt{(1+G_{2}^{2})} = \frac{1+\varphi_{,}G_{2}}{\sqrt{(1+\varphi_{,}^{2})}} \text{ und } \sqrt{(1+G_{,,}^{2})} = \frac{1+\varphi_{,,}G_{,,}}{\sqrt{(1+\varphi_{,,}^{2})}}$$

entwickelt sind, können die auf dem bekannten Wege (§. 13) abgeleiteten Wurzelgrössen

$$\frac{-\frac{\varphi_{,}\varrho_{,}}{r_{,}}\mathfrak{B}_{,}+\mathfrak{C}_{,}\sqrt{\Big[(1+\varphi_{,}^{2})(\mathfrak{B}_{,}^{2}+\mathfrak{C}_{,}^{2})-\big(\frac{\varphi_{,}\varrho_{,}}{r_{,}}\big)^{2}\Big]}}{\mathfrak{B}_{,}^{2}+\mathfrak{C}_{,}^{2}}$$

und

$$\frac{-\frac{\varphi_{,,}\varrho_{,,}}{r_{,,}}\mathfrak{B}_{,,}+\mathfrak{C}_{,,}\sqrt{\Big[(1+\varphi_{,,}^{2})(\mathfrak{B}_{,,}^{2}+\mathfrak{C}_{,,}^{2})-\big(\frac{\varphi_{,,}\varrho_{,,}}{r_{,,}}\big)^{2}\Big]}}{\mathfrak{B}_{,,}^{2}+\mathfrak{C}_{,,}^{2}}$$

durch Vergleichung mit den Wurzelgrössen $\sqrt{(1+\varphi_{,}^{2})}$ und $\sqrt{(1+\varphi_{,,}^{2})}$, an deren Stelle sie treten, dazu dienen, die Genauigkeit jener Voraussetzung und der auf ihr beruhenden Ergebnisse zu prüfen und, wo nöthig, die Exponenten $\mu_{,}$ und $\mu_{,,}$, wie auch insbesondere den bei diesem Verfahren in die Rechnung eintretenden Ausdruck von K nach und nach zu verbessern. Man hat hiezu:

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_{,} = -\frac{(a_{,}-\lambda a)(P_{,}+2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,})-\mu_{,,}(hP_{,}+4s_{,}Q_{,}+2s_{,,}Q_{,,})}{\mathfrak{A}_{,}}&\Big[T.\Big(\frac{1}{r_{,}}F_{2}\theta_{+}+F\theta_{+}-4Q_{,}\sin\alpha\Big)\\ &-\frac{4\frac{s_{,}}{r_{,}}Q_{,}}{\mathfrak{A}_{,}}\big((a_{,}-\lambda a)(K(\cos\beta+\mu_{,,}\sin\beta)+(P_{,}+2Q_{,,})\sin\alpha+\mu_{,,}P_{,}\cos\alpha+T.F\theta_{+}+S\big)\\ &-\mu_{,,}(C(n\cos\beta+a_{,}\sin\beta)K)\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_{,} = \frac{P_{,}+4\frac{s_{,}}{r_{,}}Q_{,}+2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}}{\mathfrak{A}_{,}}&\big[C+(n\cos\beta+a_{,}\sin\beta)K-(a_{,}-\lambda a)\,T.F_{,}\theta_{+}\big]\\ +\frac{hP_{,}+4s_{,}Q_{,}+2s_{,,}Q_{,,}}{\mathfrak{A}_{,}}&\Big[T.\Big(\frac{1}{r_{,}}F_{2}\theta_{+}+\mu_{,,}F_{,}\theta_{+}\Big)-K(\cos\beta+\mu_{,,}\sin\beta)\\ &-(P_{,}+4Q_{,}+2Q_{,,})\sin\alpha-\mu_{,,}P_{,}\cos\alpha-S\Big],\end{aligned}$$

$$\mathfrak{A}_{,}=\left(P_{,}+2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}\right)[C+(n\cos\beta+a_{,}\sin\beta)K-(a_{,}-\lambda a)T.F_{,}\theta_{+}]$$
$$-(hP_{,}+4s_{,}Q_{,}+2s_{,,}Q_{,,})[K(\cos\beta+\mu_{,,}\sin\beta)+(P_{,}+2Q_{,,})\sin\alpha$$
$$+\mu_{,,}P_{,}\cos\alpha+S+T.(F\theta_{+}+\mu_{,,}F_{,}\theta_{+})],$$

$$\mathfrak{B}_{,,}=\frac{(a_{1}-\lambda a)\left(P_{,}+4\frac{s_{,}}{r_{,}}Q_{,}\right)+\mu_{,}(hP_{,}+4s_{,}Q_{,}+2s_{,,}Q_{,,})}{\mathfrak{A}_{,,}}2Q_{,,}\sin\alpha$$
$$+\frac{2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}}{\mathfrak{A}_{,,}}\Big[(a_{,}-\lambda a)\left(T.\left(\frac{1}{r_{,}}F_{2}\theta_{+}+\mu_{,}F_{,}\theta_{+}\right)-K\cos\beta-(P_{,}+4Q_{,})\sin\alpha-S\right)$$
$$-\mu_{,}(C+(n\cos\beta+a_{,}\sin\beta)K)\Big],$$

$$\mathfrak{C}_{,,}=\frac{P_{,}+4\frac{s_{,}}{r_{,}}Q_{,}+2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}}{\mathfrak{A}_{,,}}[(a_{,}-\lambda a)P_{,}\cos\alpha-(n\cos\beta+\lambda a\sin\beta)K-C]$$
$$+\frac{hP_{,}+4s_{,}Q_{,}+2s_{,,}Q_{,,}}{\mathfrak{A}_{,,}}\Big[K(\cos\beta+\mu_{,}\sin\beta)+(P_{,}+4Q_{,}+2Q_{,,})\sin\alpha+\mu_{,}P_{,}\cos\alpha+S$$
$$-T.\left(\frac{1}{r_{,}}F_{2}\theta_{+}+\mu_{,}F_{,}\theta_{+}\right)\Big],$$

$$\mathfrak{A}_{,,}=\left(P_{,}+4\frac{s_{,}}{r_{,}}Q_{,}\right)\Big[(a_{,}-\lambda a)P_{,}\cos\alpha-(n\cos\beta+\lambda a\sin\beta)K-C)$$
$$+(hP_{,}+4s_{,}Q_{,}+2s_{,,}Q_{,,})[K(\cos\beta+\mu_{,}\sin\beta)+(P_{,}+4Q_{,})\sin\alpha+\mu_{,}P_{,}\cos\alpha+S]$$
$$-T.\left(\frac{1}{r_{,}}F_{2}\theta_{+}\mu_{,}+F_{,}\theta_{+}\right)\Big],$$

und eben so, zur Verbesserung des Exponenten K, die Ausdrücke

$$\mathfrak{B}=\frac{|4Q|}{\mathfrak{A}}\{P\}\sin\alpha+\frac{\{4\frac{s}{r}Q\}}{\mathfrak{A}}(K\cos\beta-\{P\}(\sin\alpha),$$
$$\mathfrak{C}=1+\frac{\{4\frac{s}{r}Q\}}{|P|},$$
$$\mathfrak{A}=\{P\}(\}P\}\cos\alpha-K\sin\beta),$$

anzuwenden.

§. 73.

Bei Auflösung der Gleichungen (J) für $X=0$, oder in der Voraussetzung, dass für einen bestimmten Werth des Winkels θ die Beschleunigung der Bewegung gleich Null sei, finden sich aus den abgeleiteten Gleichungen (§. 71):

$$T_1 = \frac{\begin{array}{c}(a_, - \lambda a)[K(\cos\beta + \mu_{,,}\sin\beta) + (P_, + 4Q_, + 2Q_{,,})\sin\alpha + \mu_{,,}P_,\cos\alpha + S] \\ + (\mu_, - \mu_{,,})[C + (n\cos\beta + a_,\sin\beta)K]\end{array}}{(a_, - \lambda a)(\frac{1}{r_,}F_2\theta_+ + \mu_, F_,\theta_+)},$$

und wenn $T_,$ den der Voraussetzung $X = 0$ entsprechenden besondern Werth der hier als zu bestimmende Unbekannte auftretenden Druckkraft T bezeichnet:

$$Y_2 = \mu_{,,}\frac{C + (n\cos\beta + a_,\sin\beta)K}{a_, - \lambda a} - K(\cos\beta + \mu_{,,}\sin\beta) - (P_, + 2Q_{,,})\sin\alpha$$
$$- \mu_{,,}P_,\cos\alpha - S - F\theta_+ . T_, ,$$

$$Z_2 = \frac{C + (n\cos\beta + a_,\sin\beta)K}{a_, - \lambda a} - F_,\theta_+ . T_, ,$$

$$Y_{,,} = \mu_{,,}P_,\cos\alpha + 2Q_{,,}\sin\alpha - \mu_{,,}\frac{C + (n\cos\beta + \lambda a\sin\beta)K}{a_, - \lambda a},$$

$$Z_{,,} = P_,\cos\alpha - \frac{C + (n\cos\beta + \lambda a\sin\beta)K}{a_, - \lambda a};$$

so wie ferner aus den Gleichungen

(J) (4) $$4R_, = K(\cos\beta + \mu_{,,}\sin\beta) + (P_, + 4Q_, + 2Q_{,,})\sin\alpha + \mu_{,,}P_,\cos\alpha + S - \mu_{,,}\frac{C + (n\cos\beta + a_,\sin\beta)K}{a_, - \lambda a},$$

» (5) $$2N + 2N_, = \frac{C + (n\cos\beta + a_,\sin\beta)K}{a_, - \lambda a} + 4Q_,\cos\alpha,$$

» (7) $$2R_{,,} = \mu_{,,}\left(P_,\cos\alpha - \frac{C + (n\cos\beta + \lambda a\sin\beta)K}{a_, - \lambda a}\right),$$

» (9) $$2N_{,,} = (P_, + 2Q_{,,})\cos\alpha - \frac{C + (n\cos\beta + \lambda a\sin\beta)K}{a_, - \lambda a},$$

und sodann aus (3 oder 10) die Grössen N und $N_,$ einzeln genommen sich ergeben.

In diesen Ausdrücken ist $K = \frac{\mathfrak{P}l}{\cos\beta + \mu\sin\beta}$ (§. 59), und es stellt der in T_1, Y_2 und Z_2 vorkommende Winkel θ den als bestimmt angenommenen Werth desselben vor.

Es ist zu bemerken, dass die hier gefundenen Ausdrücke von $Y_{,,}$, $Z_{,,}$, $R_,$, $R_{,,}$, N, $N_,$ und $N_{,,}$ weder den Winkel θ noch den Exponenten $\mu_,$ enthalten, und dass daher für $X = 0$ diese Grössen, folglich auch die Reibungsquotienten $\frac{2R_,}{N + N_,}$ und $\frac{R_{,,}}{N_{,,}}$ des sechsrädrigen Dampfwagens, eben so wie der Reibungsquotient $\frac{2R_,}{N + N_,}$ des vierrädrigen Dampfwagens (§. 60), von dem, absolut

oder relativ genommenen Winkel θ und von der Reibung zwischen den Achsen der Treibräder und ihren Lagern nur in so weit abhangen können, als etwa der Luftwiderstand S als Function der Geschwindigkeit davon abhangt.

Endlich kann man noch für $X = 0$, auf die bekannte Weise, zur Ergänzung des in K vorkommenden Exponenten μ die Grössen

$$\mathfrak{A} = \{P\}\cos(\alpha+\beta) \quad , \quad \mathfrak{B} = \frac{\{4Q\}}{\mathfrak{A}}\sin\alpha\cos\beta \quad , \quad \mathfrak{C} = 1 - \frac{\{4Q\}}{\mathfrak{A}}\sin\alpha\sin\beta,$$

zur Ergänzung des Exponenten $\mu_{,,}$ die Grössen

$$\mathfrak{A}_{,,} = P_{,}\cos\alpha - \frac{C + (n\cos\beta + \lambda a\sin\beta)K}{a_{,} - \lambda a} \quad , \quad \mathfrak{B}_{,,} = \frac{2Q_{,,}}{\mathfrak{A}_{,,}}\sin\alpha \quad , \quad \mathfrak{C}_{,,} = 1,$$

und sodann, eben so, in Bezug auf den Exponenten $\mu_{,}$

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_{,} = {} & (\mu_{,,}F_1\theta_+ - F\theta_+)[C + (n\cos\beta + a_{,}\sin\beta)K] - F_1\theta_+(a - \lambda a) \\ & \times[K(\cos\beta + \mu_{,,}\sin\beta) + (P_{,} + 2Q_{,,})\sin\alpha + \mu_{,,}P_{,}\cos\alpha + S],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_{,} = {} & \frac{\frac{1}{r_{,}}F_2\theta_+ + F\theta_+}{\mathfrak{A}_{,}}\{\mu_{,,}[C + (n\cos\beta + a_{,}\sin\beta)K] - (a_{,} - \lambda a) \\ & \times[K(\cos\beta + \mu_{,,}\sin\beta) + (P_{,} + 4Q_{,} + 2Q_{,,})\sin\alpha + \mu_{,,}P_{,}\cos\alpha + S]\} \\ & + \frac{\frac{1}{r_{,}}F_2\theta_+}{\mathfrak{A}_{,}}(a - \lambda a)4Q_{,}\sin\alpha,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_{,} = {} & \frac{\frac{1}{r_{,}}F_2\theta_+ + \mu_{,,}F_1\theta_+}{\mathfrak{A}_{,}}[C + (n\cos\beta + a_{,}\sin\beta)K] \\ & - \frac{F_1\theta_+}{\mathfrak{A}_{,}}(a_{,} - \lambda a)[K(\cos\beta + \mu_{,,}\sin\beta) + (P_{,} + 4Q_{,} + 2Q_{,,})\sin\alpha + \mu_{,,}P_{,}\cos\alpha + S]\end{aligned}$$

anwenden.

§. 74.

Nach (§. 61) lässt sich die in den entwickelten Ausdrücken der gesuchten Grössen enthaltene Kraft $T.\left(\frac{1}{r_{,}}F_2\theta_+ + \mu_{,}F_1\theta_+\right)$, welche im Allgemeinen mit der relativen Grösse des Winkels θ im Kreise sich ändert, durch eine andere, dieser Veränderlichkeit nicht unterworfene Kraft $2V$ ersetzen, welche die Umdrehungsgeschwindigkeit nach jedem Umlaufe der Treibräder eben so gross wie die erstere Kraft giebt, und insofern als ihr gleichgeltend betrachtet werden kann.

Eben dieses findet bei dem sechsrädrigen Dampfwagen, wie bei dem vier-

rädrigen Statt; und da die Gleichung $\frac{\partial^2 x}{dt^2} = gX$ für beide die gleiche, in (§. 61) angegebene Form annimmt, so ergiebt sich auch in Bezug auf den sechsrädrigen Dampfwagen:

$$2V = \frac{2HT}{e^{4\pi H} - 1} \cdot \int_{2\pi \div 0} e^{2H\theta} \left(\frac{1}{r_{,}} F_2 \theta_{+} + \mu_{,} F_1 \theta_{+} \right) \partial\theta,$$

wenn nur dem Coefficienten H der dem letzteren Dampfwagen entsprechende Werth gegeben wird; und derjenige Werth von $2V$, welcher X gleich Null macht, oder welcher dem mit einer bestimmten beständigen Geschwindigkeit rollenden sechsrädrigen Dampfwagen, sofern der Begriff der gleichförmigen Bewegung hier Anwendung findet, zugehört, ist

$$2V_1 = |\mathfrak{P}| \frac{\cos\beta + \mu_{,,} \sin\beta}{\cos\beta + \mu \sin\beta} + (P_{,} + 4Q_{,} + 2Q_{,,}) \sin\alpha + \mu_{,,} P_{,} \cos\alpha$$
$$+ S(\mu_{,} - \mu_{,,}) \frac{C(\cos\beta + \mu \sin\beta) + (n\cos\beta + a_{,} \sin\beta)\, |\mathfrak{P}|}{(a_{,} - \lambda a)(\cos\beta + \mu \sin\beta)}.$$

Wird nun die Kraft $2V$ in die beiden Theile $2V_{,}$ und $2v_{,}$ getheilt, werden die in (§. 71) entwickelten Ausdrücke ebenfalls in die entsprechenden Theile zerlegt und die der Theilkraft $2V_{,}$, oder der gleichförmigen Bewegung angehörigen Theile dieser Ausdrücke durch eckige Klammern (§. 62) unterschieden; und wird ferner der Nenner von X und K in (§. 72) mit $\mathfrak{N}$ bezeichnet, so findet sich:

$$X = (a_{,} - \lambda a)(\cos\beta + \mu \sin\beta) \frac{2V_{,}}{\mathfrak{N}},$$

$$K = [K] + \frac{\partial K}{\partial(2V)} 2v_{,} = \frac{|\mathfrak{P}|}{\cos\beta + \mu \sin\beta} + (a_{,} - \lambda a) \left\{ P + 4\frac{s}{r} Q \right\} \frac{2v_{,}}{\mathfrak{N}},$$

$$4R_{,} = [4R_{,}] + \frac{\partial(4R_{,})}{\partial(2V)} 2v_{,} = \{\mathfrak{P}\} \frac{\cos\beta + \mu_{,,} \sin\beta}{\cos\beta + \mu \sin\beta} + (P_{,} + 4Q_{,} + 2Q_{,,}) \sin\alpha$$
$$+ \mu_{,,} P_{,} \cos\alpha + S - \mu_{,,} \frac{C(\cos\beta + \mu \sin\beta) + (n\cos\beta + a_{,} \sin\beta)\, |\mathfrak{P}|}{(a_{,} - \lambda a)(\cos\beta + \mu \sin\beta)}$$
$$+ \Big[(a_{,} - \lambda a) \Big(\Big\{ P + 4\frac{s}{r} Q \Big\} (\cos\beta + \mu_{,,} \sin\beta) + \Big(P_{,} + 4Q_{,} + 2\frac{s_{,,}}{r_{,,}} Q_{,,} \Big) (\cos\beta + \mu \sin\beta) \Big)$$
$$- \mu_{,,} \Big(\Big\{ P + 4\frac{s}{r} Q \Big\} (n\cos\beta + a_{,} \sin\beta) + (hP_{,} + 4s_{,} Q_{,} + 2s_{,,} Q_{,,})(\cos\beta + \mu \sin\beta) \Big) \Big] \frac{2v_{,}}{N},$$

$$2(N + N_{,}) = 2[N + N_{,}] + \frac{\partial(2N + 2N_{,})}{\partial(2V)} 2v_{,}$$
$$= \frac{C(\cos\beta + \mu \sin\beta) + (n\cos\beta + a_{,} \sin\beta)\, |\mathfrak{P}|}{(a_{,} - \lambda a)(\cos\beta + \mu \sin\beta)} + 4Q' \cos c$$
$$+ \Big[\Big\{ P + 4\frac{s}{r} Q \Big\} (n\cos\beta + a_{,} \sin\beta) + (hP_{,} + 4s_{,} Q_{,} + 2s_{,,} Q_{,,})(\cos\mu + \mu \sin\beta) \Big] \frac{2v_{,}}{N},$$

$$2R_{,,} = [2R_{,,}] + \frac{\partial(2R_{,,})}{\partial(2V)} 2v_{,} = \mu_{,,}\left(P_{,}\cos\alpha - \frac{C(\cos\beta+\mu\sin\beta)+(n\cos\beta+\lambda a\sin\beta)\{\mathfrak{P}\}}{(a_{,}-\lambda a)(\cos\beta+\mu\sin\beta)}\right)$$

$$+\Big[2Q_{,,}.\left(\frac{s_{,,}}{r_{,,}}-1\right)(a_{,}-\lambda a)(\cos\beta+\mu\sin\beta)$$

$$-\mu_{,,}\Big[\Big\}P+4\frac{s}{r}Q\Big\}(n\cos\beta+\lambda a\sin\beta)+(hP_{,}+4s_{,}Q_{,}+2s_{,,}Q_{,,}(\cos\beta+\mu\sin\beta)\Big]\Big]\frac{2v_{,}}{\mathfrak{N}},$$

$$2N_{,,} = [2N_{,,}] + \frac{\partial(2N_{,,})}{\partial(2V)} 2v_{,} = (P_{,}+2Q_{,,}) - \cos\alpha\frac{C(\cos\beta+\mu\sin\beta)+(n\cos\beta+\lambda a\sin\beta)\{\mathfrak{P}\}}{(a_{,}-\lambda a)(\cos\beta+\mu\sin\beta)}$$

$$-\Big(\Big\}P+4\frac{s}{r}Q\Big\}(n\cos\beta+\lambda a\sin\beta)+(hP_{,}+4s_{,}Q_{,}+2s_{,,}Q_{,,})(\cos\beta+\mu\sin\beta)\Big)\frac{4v_{,}}{\mathfrak{N}};$$

und aus den so dargestellten Ausdrücken erhellet, dass die Beschleunigung der Bewegung der Theilkraft $2v_{,}$ proportional ist, dass die Grössen K, $4R_{,}$, $2(N+N_{,})$ mit der Beschleunigung zugleich zu- und abnehmen, $2N_{,,}$ dagegen abnimmt, während die Beschleunigung wächst, und umgekehrt; und dass diese Zu- und Abnahmen sich verhalten wie die Beschleunigungen. Ob $2R_{,,}$ bei wachsender Beschleunigung zunimmt, oder abnimmt, oder unverändert bleibt, hangt hauptsächlich von dem Verhältniss des Gewichts der Tragräder zu dem des ganzen Zuges und von dem Werthe des Exponenten $\mu_{,,}$ ab.

§. 75.

Wird der Reibungsquotient $\frac{2(N+N_1)}{4R_1}$ für die rollende Bewegung der Treibräder wieder durch R_q, und werden die in den Ausdrücken von $4R_{,}$, $2(N+N_{,})$, $2R_{,,}$ und $2N_{,,}$ so eben angegebenen Factoren von $2v_{,}$, nämlich

$$\mathfrak{N}.\frac{\partial(4R_1)}{\partial(2V)},\quad \mathfrak{N}.\frac{\partial(2N+2N_{,})}{\partial(2V)},\quad \mathfrak{N}.\frac{\partial(2R_{,,})}{\partial(2V)},\quad \mathfrak{N}.\frac{\partial(2N_{,,})}{\partial(2V)},$$

der Reihenfolge nach durch $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{J}_{,}$, $\mathfrak{L}'$ bezeichnet, so ist

$$R_q = [R_q] + \frac{\mathfrak{J}[2N+2N_{,}]-\mathfrak{L}[4R_{,}]}{\mathfrak{N}[2N+2N_{,}]^2}2v_{,} \ldots\ldots$$

$$\frac{R_{,,}}{N_{,,}} = \left[\frac{R_{,,}}{N_{,,}}\right] + \frac{\mathfrak{J}_{,}[2N_{,,}]-\mathfrak{L}_{,}[2R_{,,}]}{\mathfrak{N}[2N_{,,}]^2}2v_{,} \ldots\ldots$$

$$= \left[\frac{R_{,,}}{N_{,,}}\right] + \frac{\left(\frac{s_{,,}}{r_{,,}}-1\right)(a_{,}-\lambda a)(\cos\beta+\mu\sin\beta)[2N_{,,}]+\mu_{,,}\mathfrak{L}_{,}\cos\alpha}{\mathfrak{N}[2N_{,,}]^2}2Q_{,,}.2v\ldots$$

und es lässt sich auch hier aus den Verhältnissen, in welchen die Werthe der Grössen $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{L}$, $[4R_{,}]$, $2[N+N_{,}]$ zu einander stehen, so wie aus den gegenseitigen Verhältnissen der Grössen $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{J}_{,}$, $\mathfrak{L}_{,}$, $[2R_{,,}]$, $[2N_{,,}]$ schliessen, dass

die Coefficienten von $2c_1$ in den zweiten Gliedern dieser Ausdrücke wesentlich positiv sind, und dass daher die Reibungsquotienten für die rollende Bewegung der Treibräder und der Tragräder bei beschleunigter Bewegung grösser sind als bei gleichförmiger, und mit der Beschleunigung zugleich zu- und abnehmen.

Vergleicht man die Reibungsquotienten R_q und $\frac{R_{,,}}{N_{,,}}$ unter sich, so findet sich, dass

$$[4R_,]-[2R_{,,}]=\{\mathfrak{P}\}.\frac{\cos\beta}{\cos\beta+\mu\sin\beta}+(P_,+4Q_{,,}+2Q_{,,})\sin\alpha+S$$

und $\frac{\mathfrak{Z}[2N+2N_,]-\mathfrak{L}[4R_,]}{[2N+2N_,]^2}$ im Allgemeinen grösser sind als $\frac{\mathfrak{Z}_,[2N_{,,}]-\mathfrak{L}_,[2R_{,,}]}{[2N_{,,}]^2}$; woraus sich folgern lässt, dass R_q, wenn die Last des Dampfwagens auf das doppelte Treibräderpaar und das Tragräderpaar ungefähr gleich vertheilt ist, auf wagerechter Bahn, und um so mehr bei ansteigender Bewegung, grösser ist als $\frac{R_{,,}}{N_{,,}}$, oder dass bei den Treibrädern, leichter als bei den Tragrädern, eine gleitende Bewegung eintreten kann; dass dagegen in absteigender Bewegung, unter stärkeren Neigungen, der umgekehrte Fall Statt findet.

§. 76.

Mit dem Neigungswinkel α ändern sich, wie bei dem vierrädrigen Dampfwagen (§. 63), die Grössen $2V_{,,}$, K und X so, dass $2V_{,,}$ und für eine bestimmte Beschleunigung auch K, mit α zugleich zu- und abnehmen, X dagegen für einen bestimmten Werth der Kraft $2V=2(V_,+c_,)$ abnimmt, während α wächst, und umgekehrt.

Für den Reibungsquotient R_q ist bei gleichförmiger Bewegung, wenn der Luftwiderstand S als unabhängig von α betrachtet wird:

$$\frac{d[4R_,]}{d\alpha}=(P_,+4Q_,+2Q_{,,})\cos\alpha-\mu_{,,}P_,\sin\alpha+\frac{d\{\mathfrak{P}\}}{d\alpha}\cdot\frac{\cos\beta+\mu_{,,}\sin\beta}{\cos\beta+\mu\sin\beta}$$
$$-\mu_{,,}.\frac{\frac{dC}{d\alpha}(\cos\beta+\mu\sin\alpha)+(n\cos\beta+a_,\sin\beta).\frac{d\{\mathfrak{P}\}}{d\alpha}}{(a_,-\lambda a)(\cos\beta+\mu\sin\beta)},$$

$$\frac{d[2N+2N_,]}{d\alpha}=\frac{\frac{dC}{d\alpha}(\cos\beta+\mu\sin\beta)+(n\cos\beta+a_,\sin\beta).\frac{d\{\mathfrak{P}\}}{d\alpha}}{(a_,-\lambda a)(\cos\beta+\mu\sin\beta)}-4Q_,\sin\alpha,$$

wo, nach der Bedeutung von C (§. 71),

$$\frac{dC}{d\alpha}=[h\cos\alpha-(a_,-i)\sin\alpha]P_,+a\sin\alpha(1-2\lambda)2Q_,+(4r_,Q_,+2r_{,,}Q_{,,})\cos\alpha$$

und vermöge (§. 59), $\frac{\partial \{\mathfrak{P}\}}{\partial \alpha} = \{P + 4Q\} \cos \alpha + \mu \{P\} \sin \alpha$
ist; und es findet sich, entwickelt:

$$\frac{\partial [R_q]}{\partial \alpha} [2N + 2N_,]^2 \text{ oder } [2N + 2N_,] . \frac{\partial [4R_,]}{\partial \alpha} - [4R_,] . \frac{\partial [2N + 2N_,]}{\partial \alpha}$$
$$= (P + 4Q_, + 2Q_{,,}) \left(C_, + \mu \{P\} . \frac{n \cos \beta + a_, \sin \beta}{(a_, - \lambda a)(\cos \beta + \mu \sin \beta)} \right)$$
$$+ \{P + 4Q\} . \left(\frac{\cos \beta + \mu_{,,} \sin \beta}{\cos \beta + \mu \sin \beta} C_, - \mu_{,,} (P_, + 4Q_,) . \frac{n \cos \beta + a_, \sin \beta}{(a_, - \lambda a)(\cos \beta + \mu \sin \beta)} \right)$$
$$- C_{,,} \left(\mu \{P\} . \frac{\cos \beta + \mu_{,,} \sin \beta}{\cos \beta + \mu \sin \beta} + \mu_{,,} (P_, + 4Q_,) \right) - S . \frac{\partial [2N + 2N_,]}{\partial \alpha},$$

wenn der Kürze wegen $C_,$ statt $\frac{(a_, - i) P_, + (a_, - \frac{1}{3} a) 4 Q_, + m S \cos \alpha}{a_, - \lambda a}$ und

$C_{,,}$ statt $\frac{h P_, + 4 r_, Q_, + 2 r_{,,} Q_{,,} + m S \sin \alpha}{a_, - \lambda a}$

gesetzt wird.

Da die hier entwickelt gegebenen Ausdrücke von $\frac{\partial [4R_,]}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial [2N + 2N_,]}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial [R_q]}{\partial \alpha}$, in welchen die die Exponenten μ und $\mu_{,,}$ als Factoren enthaltenden Glieder bei den verhältnissmässig kleinen Werthen dieser Exponenten die minder erheblichen sind, als wesentlich positiv gelten können, so werden die Grössen $[4R_,]$, $2[N + N_,]$ und der Reibungsquotient R_q für gleichförmige Bewegung mit dem Winkel α zugleich grösser und kleiner.

Für die beschleunigte Bewegung ist (§. 63):

$$\frac{dR_q}{d\alpha} (2N + 2N_,)^2 = \frac{d[R_q]}{d\alpha} [2N + 2N_,]^2 + \frac{2 v_,}{\mathfrak{R}} \left(\mathfrak{L} . \frac{d[4R_,]}{d\alpha} - \mathfrak{J} . \frac{d[2N + 2N_,]}{d\alpha} \right)$$
$$+ \frac{d(2 v_,)}{d\alpha} . \frac{\mathfrak{J}[2N + 2N_,] - \mathfrak{L}[4R_,]}{\mathfrak{R}},$$

und es sind, wie bei dem vierrädrigen Dampfwagen, zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Erstlich. Wenn die Grösse der Beschleunigung als bestimmt vorausgesetzt wird, in welchem Falle $\frac{d(2v_,)}{d\alpha}$ gleich Null ist, nimmt der Reibungsquotient R_q, da das zweite Glied des vorstehenden Ausdrucks von $\frac{dR_q}{d\alpha}$. (dessen drittes Glied wegfällt, der Winkel α mag positiv oder negativ sein), im Allgemeinen als positiv anzunehmen und gegen das erste verhältnissmässig klein ist, ebenfalls

mit dem Winkel α zugleich zu und ab. Der Factor $\mathfrak{L}.\frac{\partial[4R_,]}{\partial\alpha}-\mathfrak{J}.\frac{\partial[2N+2N_,]}{\partial\alpha}$ ist, näher entwickelt:

$$=\mathfrak{L}[(P_,+4Q_,+2Q_{,,})\cos\alpha-\mu_{,,}(P_,+4Q_,)\sin\alpha]$$

$$+\frac{\partial\{\mathfrak{P}\}}{\partial\alpha}\Big[(hP+4s_,Q_,+2s_{,,}Q_{,,})(\cos\beta+\mu_{,,}\sin\beta)-(n\cos\beta+a_,\sin\beta)(P_,+4Q+2\tfrac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,})\Big]$$

$$-\Big[\frac{\partial C}{\partial\alpha}-(a_,-\lambda a)4Q_,\sin\alpha\Big]\Big[\Big\{P+4\tfrac{s}{r}Q\Big\}(\cos\beta+\mu_{,,}\sin\beta)$$

$$\Big(P_,+4Q_,+2\tfrac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}\Big)(\cos\beta+\mu\sin\beta)\Big].$$

Zweitens. Wird die Triebkraft $2V$ als bestimmt betrachtet, in welchem Falle $\frac{\partial(2v_,)}{\partial\alpha}=-\frac{\partial(2V_,)}{\partial\alpha}$ ist, so findet sich, wie bei dem vierrädrigem Dampfwagen (§. 63), da

$$2V_,=[4R_,]+\mu_,[2N+2N_,]-\mu_,.4Q_,\cos\alpha\quad\text{und}$$

$$\frac{\partial[2V_,]}{\partial\alpha}=\frac{\partial[4R_,]}{\partial\alpha}+\mu_,.\frac{\partial[2N+2N_,]}{\partial\alpha}+\mu_,.4Q_,\sin\alpha$$

ist:

$$\frac{\partial R_,}{\partial\alpha}(2N+2N_,)^2=\frac{\partial[R_,]}{\partial\alpha}[2N+2N_,]^2\Big(1-\frac{\mathfrak{J}+\mu_,\mathfrak{L}}{\mathfrak{R}}\Big)$$

$$+\frac{2V+\mu_,.4Q_,\cos\alpha}{\mathfrak{R}}\Big(\mathfrak{L}.\frac{\partial[4R_,]}{\partial\alpha}-\mathfrak{J}.\frac{\partial[2N+2N_,]}{\partial\alpha}\Big)-\mu_,.\frac{4Q\sin\alpha}{\mathfrak{R}}(\mathfrak{J}[2N+2N_,]-\mathfrak{L}[4R_,]),$$

und man kann ferner, da $1-\frac{\mathfrak{J}+\mu_,\mathfrak{L}}{\mathfrak{R}}=(a_,-\lambda a)\Big(\frac{s_,}{r_,}-1\Big)\frac{4Q_,}{\mathfrak{R}}(\cos\beta+\mu\sin\beta)$ ist, und in Betracht dass

$$[4R_,]\sin\alpha+\frac{\partial[4R_,]}{\partial\alpha}\cos\alpha=P_,+4Q_,+2Q_{,,}+S\sin\alpha+\{P+4Q\}.\frac{\cos\beta+\mu_{,,}\sin\beta}{\cos\beta+\mu\sin\beta}$$

$$-\mu_{,,}\Big(C_{,,}+\{P+4Q\}.\frac{n\cos\beta+a_,\sin\beta}{(a_,-\lambda a)(\cos\beta+\mu\sin\beta)}\Big),$$

$$[2N+2N_,]\sin\alpha+\frac{\partial[2N+2N_,]}{\partial\alpha}\cos\alpha=C_{,,}+\{P+4Q\}.\frac{n\cos\beta+a_,\sin\beta}{(a_,-\lambda a)(\cos\beta+\mu\sin\beta)},$$

und $\frac{\mu_,.4Q_,}{\mathfrak{R}}\Big[\mathfrak{L}.\Big([4R_,]\sin\alpha+\frac{\partial[4R_,]}{\partial\alpha}\cos\alpha\Big)-\mathfrak{J}.\Big([2N+2N_,]\sin\alpha+\frac{\partial[2N+2N_,]}{\partial\alpha}\cos\alpha\Big)\Big]$

$$=\frac{\mu_{,,}4Q_,}{\mathfrak{R}}.\left\{\begin{aligned}&\mathfrak{L}(P_,+4Q_,+2Q_{,,}+S\sin\alpha)+\{P+4Q\}[(hP_,+4s_,Q_,+2s_{,,}Q_{,,})(\cos\beta+\mu_{,,}\sin\beta)\\&-\Big(P_,+4Q_,+2\tfrac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}\Big)(n\cos\beta+a_,\sin\beta)]\\&-(hP_,+4r_,Q_,+2r_{,,}Q_{,,}+mS\sin\alpha)\Big[\Big\{P+4\tfrac{s}{r}Q\Big\}(\cos\beta+\mu_{,,}\sin\beta)\\&+\Big(P_,+4Q_,+2\tfrac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}\Big)\cos\beta+\mu\sin\beta\Big]\end{aligned}\right\}$$

sich ergiebt, die Summe der den Factor $\mu_{,}.4Q_{,}$ enthaltenden Glieder, welche sich nahezu gegenseitig aufheben, also gegen die Summe der übrigen Glieder sehr klein sind, wenn es sich um Beurtheilung des Vorzeichens von $\frac{\partial R_q}{\partial \alpha}$ handelt, hinreichend genau:

$$\frac{\partial R_q}{\partial \alpha}(2N+2N_{,})^2 = (a_{,}-\lambda a)\left(\frac{s_{,}}{\dot{r}_{,}}-1\right)\frac{4Q_{,}}{\mathfrak{R}}(\cos\beta+\mu\sin\beta)\frac{\partial[R_q]}{\partial \alpha}[2N+2\dot{N}_{,}]^2$$
$$+\frac{2V}{\mathfrak{R}}\left(\mathfrak{L}\frac{\partial[4R]}{\partial \alpha}-\mathfrak{J}\frac{\partial[2N+2N_{,}]}{\partial \alpha}\right)$$

setzen.

Auch in diesem Falle hangt somit das Vorzeichen von $\frac{\partial R_q}{\partial \alpha}$ im Wesentlichen von dem des Quotienten $\frac{\partial [R_q]}{\partial \alpha}$ und von dem in (1) entwickelt angegebenen Factor $\mathfrak{L}\cdot\frac{\partial[4R_{,}]}{\partial \alpha}-\mathfrak{J}\cdot\frac{\partial[2N+2N_{,}]}{\partial \alpha}$ ab, und es lässt sich hieraus, wenn auch im letztern Ausdruck von $\frac{\partial R_q}{\partial \alpha}(2N+2N_{,})^2$ das zweite Glied gegen das erste weniger unerheblich ist, als in dem Ausdruck des vorigen Falles, der Schluss ziehen, dass auch für einen bestimmten Werth der Triebkraft $2V$ der Reibungsquotient R_q, sowohl in ansteigender als in absteigender Bewegung, zugleich mit dem Winkel α wächst und kleiner wird.

§. 77.

Wird noch der Reibungsquotient $\frac{R_{,,}}{N_{,,}}$ der Tragräder, wie im vorigen Paragraph derjenige R_q der Treibräder, in Beziehung auf die Veränderungen untersucht, welche er mit dem Neigungswinkel α der Bahn erfährt, so ist für die gleichförmige Bewegung:

$$\frac{\partial[2N_{,,}]}{\partial \alpha} = -(P_{,}+2Q_{,,})\sin\alpha - \frac{\frac{\partial C}{\partial \alpha}(\cos\beta+\mu\sin\beta)+(n\cos\beta+\lambda a\sin\beta)\frac{\partial\{\mathfrak{P}\}}{\partial \alpha}}{(a_{,}-\lambda a)(\cos\beta+\mu\sin\beta)}$$

$$\frac{\partial[2R_{,,}]}{\partial \alpha} = \mu_{,,}\left(\frac{\partial[2N_{,,}]}{\partial \alpha}+2Q_{,,}\sin\alpha\right); \text{ und}$$

$$\frac{\partial\left[\frac{R_{,,}}{N_{,,}}\right]}{\partial \alpha}[2N_{,,}]^2 \text{ oder } [2N_{,,}]\frac{\partial[2R_{,,}]}{\partial \alpha}-[2R_{,,}]\frac{\partial[2N_{,,}]}{\partial \alpha} \text{ ergiebt sich}$$

$$= -\mu_{,,}.2Q_{,,}\left(C_{,,}+\{P+4Q\}\frac{n\cos\beta+\lambda a\sin\beta}{(a_{,}-\lambda a)(\cos\beta+\mu\sin\beta)}\right).$$

Für die beschleunigte Bewegung dagegen ist

$$\frac{\partial \frac{R_{,,}}{N_{,,}}}{\partial \alpha}(2N_{,,})^2 = \frac{\partial \left[\frac{R_{,,}}{N_{,,}}\right]}{\partial \alpha}[2N_{,,}]^2 + \frac{2v_{,}}{\mathfrak{R}}\left(\mathfrak{L}_{,}\frac{\partial[2R_{,,}]}{\partial \alpha} - \mathfrak{J}_{,}\frac{\partial[2N_{,,}]}{\partial \alpha}\right) + \frac{\frac{\partial(2v_{,})}{\partial \alpha}}{\mathfrak{R}}(\mathfrak{J}_{,}[2N_{,,}] - \mathfrak{L}_{,}[2R_{,,}])$$

und

$$\mathfrak{J}_{,}[2N_{,,}] - \mathfrak{L}_{,}[2R_{,,}] = 2Q_{,,}\left[(a_{,}-\lambda a)\left(\frac{s_{,,}}{r_{,,}}-1\right)(\cos\beta + \mu\sin\beta)[2N_{,,}] + \mu_{,,}\mathfrak{L}_{,}\cos\alpha\right],$$

$$\frac{\mathfrak{L}_{,}\partial[2R_{,,}]}{\partial \alpha} - \frac{\mathfrak{J}_{,}\partial[2N_{,,}]}{\partial \alpha} = 2Q_{,,}\left[-(a_{,}-\lambda a)\left(\frac{s_{,,}}{r_{,,}}-1\right)(\cos\beta + \mu\sin\beta)\frac{\partial[2N_{,,}]}{\partial \alpha} + \mu_{,,}\mathfrak{L}_{,}\sin\alpha\right].$$

Bei näherer Betrachtung findet man, dass die beiden letzten Factoren des zweiten und dritten Gliedes, so wie der Factor

$$2Q_{,,}\left(C_{,,} + \{P + 4Q\}\frac{a\cos\beta + \lambda a\sin\beta}{(a_{,}-\lambda a)(\cos\beta + \mu\sin\beta)}\right)$$

des ersten Gliedes von $\frac{\partial \frac{R_{,,}}{N_{,,}}}{\partial \alpha}(2N_{,,})^2$, als wesentlich positiv zu betrachten sind, und dass die Factoren $\mu_{,,}$ und $\frac{2v_{,}}{\mathfrak{R}}$ von dem Factor $\frac{\frac{\partial(2V_{,})}{\partial \alpha}}{\mathfrak{R}}$ jedenfalls in überwiegend stärkerem Verhältnisse übertroffen werden, als unter den drei erstgenannten Factoren einer den andern übertreffen kann. Der Quotient $\frac{\partial \frac{R_{,,}}{N_{,,}}}{\partial \alpha}$ ist daher im Allgemeinen negativ, und wird nur in dem Falle, wenn bei wechselndem α die Beschleunigung unverändert bleibt, oder wenn $\frac{\partial(2v_{,})}{\partial \alpha}$ gleich Null ist, nach Beschaffenheit der gegenseitigen Werthverhältnisse der gegebenen Grössen, insbesondere des Werths der der Beschleunigung proportionalen Theilkraft $2v_{,}$, positiv werden können; woraus folgt, dass bei gleichförmiger Bewegung, und in dem Falle der beschleunigten Bewegung, wenn die Triebkraft $2V$ bei wechselndem α unverändert bleibt oder $\frac{\partial(2v_{,})}{\partial \alpha} = -\frac{\partial(2V_{,})}{\partial \alpha}$ ist, der Reibungsquotient $\frac{R_{,,}}{N_{,,}}$ kleiner wird, während der Winkel α zunimmt; und umgekehrt; dass derselbe aber im erstgenannten Falle, der beschleunigten Bewegung, nämlich für einen bestimmten Werth der Beschleunigung, wenn dieser hinreichend gross ist, auch mit dem Winkel α zugleich wird wachsen und abnehmen, oder in gleicher Richtung mit diesem sich wird verändern können.

§. 78.

Um die zwischen den Zahlen 0 und 1, mit Einschluss dieser beiden Gränzwerthe, begriffene Verhältnisszahl λ (§. 70) so viel als möglich näher zu bestimmen, wird man ihr am besten denjenigen Werth geben, welcher die Wirkung des Dampfwagens zur kleinsten macht; d. h. durch welchen die zur gleichförmigen rollenden Bewegung des Dampfwagens erforderliche Triebkraft $2V$ und der Reibungsquotient R_q ihre grössten Werthe, die der Beschleunigung proportionale Grösse X dagegen ihren kleinsten Werth in Bezug auf λ bekommen.

Stellt ψ irgend eine Function von λ von der Form $\frac{p\lambda+q}{p_{,}\lambda+q_{,}}$ vor, in welcher die Grössen $p, q, p_{,}, q_{,}$ kein λ enthalten, so ist $\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = \frac{pq_{,}-p_{,}q}{(p_{,}\lambda+q_{,})^2}$, und ψ bekommt seinen grössten Werth durch den grössten Werth von λ, nämlich $\lambda=1$. wenn $pq_{,}>p_{,}q$ ist; dagegen durch den kleinsten Werth von λ, nämlich $\lambda=0$, und umgekehrt, wenn $pq_{,}<p_{,}q$ ist, während $pq_{,}=p_{,}q$ die Grösse ψ von λ unabhängig, nämlich $=\frac{p}{p_{,}}=\frac{q}{q_{,}}$ giebt.

So findet sich, dass, wenn C_{+} die Summe $C+4Q_{,}(a_{,}-\lambda a)\cos\alpha$ bezeichnet, nämlich

$$=a_{,}\cos\alpha(P_{,}+4Q_{,})-cP_{,}-a\cos\alpha.2Q_{,}+(4r_{,}Q_{,}+2r_{,,}Q_{,,})\sin\alpha+mS$$

ist:

$$\frac{\partial(2V_{,})}{\partial\lambda}=(\mu_{,}-\mu_{,,})a\cdot\frac{C_{+}+\frac{n\cos\beta+a_{,}\sin\beta}{\cos\beta+\mu\sin\beta}\cdot\{\mathfrak{P}\}}{(a_{,}-\lambda a)^2},$$

wesentlich positiv oder negativ ist, je nachdem $\mu_{,}$ grösser oder kleiner ist als $\mu_{,,}$.

Wird $\psi=X$ gesetzt, so findet sich, wenn man ferner der Kürze wegen

$$\mathfrak{N}_{,}\text{ statt }\left\{P+4\frac{s}{r}Q\right\}(\cos\beta+\mu_{,,}\sin\beta)+\left(P_{,}+4\frac{s_{,}}{r_{,}}Q_{,}+2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}\right)(\cos\beta+\mu\sin\beta)$$

schreibt, und wenn $\{\mathfrak{P}\}$, $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{L}$ in derselben Bedeutung wie früher (§§ 59 u. 75) genommen werden, dass

$$pq_{,}-p_{,}q\text{ oder }\mathfrak{N}^2.\frac{\partial X}{\partial\lambda}$$

$$=-(\mu_{,}-\mu_{,,})a(\cos\beta+\mu\sin\beta)$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{N}_{,}C_{+}+\mathfrak{L}(2V-(P_{,}+4Q_{,}+2Q_{,,})\sin\alpha-\mu_{,,}P_{,}\cos\alpha-S+(\mu_{,}-\mu_{,,})4Q_{,}\cos\alpha)\\+\{\mathfrak{P}\}\left[\left(P_{,}+4\frac{s_{,}}{r_{,}}Q_{,}+2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}\right)(n\cos\beta+a_{,}\sin\beta)-(hP_{,}+4s_{,}Q_{,}+2s_{,,}Q_{,,})(\cos\beta+\mu_{,,}\sin\beta)\right]\end{array}\right.$$

wesentlich negativ oder positiv ist, je nachdem $\mu_{,}$ grösser oder kleiner ist als $\mu_{,,}$.

Unter sonst gleichen Umständen erhält daher die Kraft $2V$, ihren grössten, die Grösse X ihren kleinsten Werth durch $\lambda = 1$, oder durch $\lambda = 0$, je nachdem $\mu_{,}$ grösser oder kleiner als $\mu_{,,}$ ist; und wenn $\mu_{,} = \mu_{,,}$ ist, so behalten $2V$, und X unverändert dieselben Werthe, wie auch die Zahl λ genommen werden mag.

Der Reibungsquotient der Treibräder R_q nimmt für die gleichförmige und die beschleunigte Bewegung eine Form an, in welcher der Nenner von λ unabhängig, oder $p_{,} = 0$ ist. Daher wird, für $\psi = R_q$, $\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = \frac{p}{q_{,}}$ und, da $q_{,}$ positiv ist, mit p zugleich positiv oder negativ; oder R_q erhält, je nachdem p positiv oder negativ ist, durch $\lambda = 1$ oder $\lambda = 0$ seinen grössten Werth.

Für die gleichförmige Bewegung ist (§. 75):

$$[R_q] = \frac{(a_1 - \lambda a)\left[\{\mathfrak{P}\}\frac{\cos\beta + \mu_{,,}\sin\beta}{\cos\beta + \mu\sin\beta} + (P_{,} + 4Q_{,} + 2Q_{,,})\sin\alpha + \mu_{,,}(P_{,} + 4Q_{,})\cos\alpha + S\right] - \mu_{,,}\left(C_{+} + \frac{n\cos\beta + a_{,}\sin\beta}{\cos\beta + \mu\sin\beta}\{\mathfrak{P}\}\right)}{C_{+} + \frac{n\cos\beta + a_{,}\sin\beta}{\cos\beta + \mu\sin\beta}\{\mathfrak{P}\}},$$

daher $p = -a\left(\{\mathfrak{P}\}\frac{\cos\beta + \mu_{,,}\sin\beta}{\cos\beta + \mu\sin\beta} + (P_{,} + 4Q_{,} + 2Q_{,,})\sin\alpha + \mu_{,,}(P_{,} + 4Q_{,})\cos\alpha + S\right)$,

und $q_{,}$ oder $(a_{,} - \lambda a)[2N + 2N_{,}] = C_{+} + \frac{n\cos\beta + a_{,}\sin\beta}{\cos\beta + \mu\sin\beta}\{\mathfrak{P}\}$.

Für die beschleunigte Bewegung dagegen erhält man

$$R_q = \frac{\mathfrak{N}[4R_{,}] + \mathfrak{J}(2V - 2V_{,})}{\mathfrak{N}[2N + 2N_{,}] + \mathfrak{L}(2V - 2V_{,})},$$

und findet

$$\begin{aligned} p = &- a\mathfrak{N}_{,}(2V + \mu_{,}.4Q_{,}\cos\alpha) \\ &+ a\left(\frac{s_1}{r_{,}} - 1\right)4Q_{,}(\cos\beta + \mu\sin\beta)\Big[2V + (\mu_{,} - \mu_{,,})4Q_{,}\cos\alpha - \{\mathfrak{P}\}\frac{\cos\beta + \mu_{,,}\sin\beta}{\cos\beta + \mu_{,,}\sin\beta} \\ &- (P_{,} + 4Q_{,} + 2Q_{,,})\sin\alpha - \mu_{,,}P_{,}\cos\alpha - S\Big], \text{ und} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{,} \text{ oder } \mathfrak{N}(2N + 2N_{,}) = &\ \mathfrak{N}_{,}\left(C_{+} + \frac{n\cos\beta + a_{,}\sin\beta}{\cos\beta + \mu\sin\beta}\{\mathfrak{P}\}\right) \\ &+ \mathfrak{L}\Big(2V + (\mu_{,} - \mu_{,,})4Q_{,}\cos\alpha - \{\mathfrak{P}\}\frac{\cos\beta + \mu_{,,}\sin\beta}{\cos\beta + \mu\sin\beta} \\ &- (P' + 4Q_{,} + 2Q_{,,})\sin\alpha - \mu_{,,}P_{,}\cos\alpha - S\Big). \end{aligned}$$

Der Coefficient p wird zwar, wie die vorstehenden Ausdrücke desselben zeigen, bei absteigender, gleichförmiger oder beschleunigter Bewegung, wenn der negative Werth des Winkels α ein gewisses Maass überschreitet, so wie bei verzögerter Bewegung, positiv werden können, im Allgemeinen aber als wird er negativ zu betrachten sein, und der Reibungsquotient R_q daher für $\lambda = 0$ grösser sich ergeben, als für jeden andern Werth, welchen λ bekommen kann. Und da ferner, wegen der Verschiedenheit der Durchmesser der Treibräder und der Tragräder, der Exponent $\mu_,$ gewöhnlich kleiner sein wird, als der Exponent $\mu_{,,}$, so folgt aus diesen Erörterungen, dass die Voraussetzung, die Zahl λ oder die Grösse N, sei gleich Null, d. h. der Druck des Dampfwagens auf die Bahn werde nur durch die hintern Treibräder und durch die Tragräder ausgeübt, so dass die vordern Treibräder keinen Theil daran nehmen, den Effect des Dampfwagens in den meisten Fällen kleiner angiebt, als jede andere Vertheilung dieses Drucks, und dass sonach eben dieser Werth von λ, als derjenige, welcher bei numerischen Berechnungen die grösste Sicherheit gewährt, im Allgemeinen vor den übrigen zur Anwendung sich eignet.

§. 79.

Die in (§. 64) im Betreff des mit abnehmendem Winkel α eintretenden Wechsels der Vorzeichen der Grössen $2V_,$ und $[4R_,]$, der Bestimmung der Winkel $\alpha_,$ und $\alpha_{,,}$, welche diese Grössen zu Null machen, u. s. w. enthaltenen Untersuchungen und Bemerkungen finden eben so wohl auf den sechsrädrigen, als auf den vierrädrigen Dampfwagen Anwendung. In Bezug auf den ersten ist nach (§. 74),

für $[4R_,] = 0$ oder $\alpha = \alpha_{,,}$:

$$2V_, = \mu_, . \frac{C(\cos\beta + \mu\sin\beta) + (n\cos\beta + a_,\sin\beta)\,|\mathfrak{P}|}{(a_, - \lambda a)(\cos\beta + \mu_,\sin\beta)},$$

für $4R = 0$:

$$2V_\circ = \left(\mu_, + \frac{\mathfrak{R}-\mathfrak{I}}{\mathfrak{I}}\mu_{,,}\right)\left(\frac{C}{a_, - \lambda a} + \frac{n\cos\beta + a_,\sin\beta}{a_, - \lambda a} \cdot \frac{|\mathfrak{P}|}{\cos\beta + \mu\sin\beta}\right)$$
$$- \frac{\mathfrak{R}-\mathfrak{I}}{\mathfrak{I}}\left(|\mathfrak{P}|\,\frac{\cos\beta + \mu_{,,}\sin\beta}{\cos\beta + \mu\sin\beta}(P_, + 4Q_, + 2Q_{,,})\sin\alpha + \mu_{,,}P_,\cos\alpha + S\right).$$

Desgleichen gilt Das, was in (§. 65) in Betreff der zum Uebergange aus dem Zustande der Ruhe in den der Bewegung erforderlichen Grösse der Kraft $2V$, der Berechnung der Geschwindigkeit, welche der Dampfwagen unter gegebenen Um-

ständen annimmt, und des Weges, den er zurücklegt, so wie in Betreff des Einflusses der absoluten Grösse des Reibungscoefficienten f und des Trägheitsmoments der Räder auf die rollende Bewegung bemerkt ist, ebenfalls von den sechsrädrigen Dampfwagen.

Erwägt man, dass die Abstände c und h, so weit sie in die Ausdrücke von $2V_{,}$, X und K (§. 74) eingehen, den Factor $\mu_{,}-\mu_{,,}$ haben, so lässt sich folgern, dass die Lage des Schwerpuncts des Dampfwagens auf die beschleunigte und gleichförmige rollende Bewegung, wenn sie möglich ist, nur sehr geringen Einfluss hat; wogegen aus den Ausdrücken von $2(N+N_{,})$ und von $2N_{,,}$ (§. 74) zu entnehmen ist, dass eben diese Abstände c und h auf das Verhältniss, nach welchem der Gewichtsdruck des Dampfwagens auf die Tragräder und die Treibräder sich vertheilt, daher auch auf die Grösse der Reibungsquotienten $R_{,}$ und $\frac{R_{,,}}{N_{,,}}$ und auf die Möglichkeit der rollenden Bewegung, von nicht unerheblichem Einflusse sind.

Um die aus den Gleichungen (J) abgeleiteten Ausdrücke auf die *Bewegung rückwärts*, bei welcher der angehängte Wagenzug vor dem Dampfwagen und die Treibräder desselben vor den Tragrädern vorausgehen, anzuwenden, muss man die Winkel α und β in dem für die Fuhrwerke (§. 7) angegebenen Sinne auf die Richtung dieser Bewegung beziehen und die Abstände i, a und a mit verändertem Vorzeichen nehmen.

Gleitende Bewegung.

§. 80.

Endlich ergeben sich noch, die Tragräder als rollend und f kleiner als $\frac{4R_{,}}{2(N+N_{,})}$ vorausgesetzt, folgende

(K.) *Gleichungen der theilweise gleitenden Bewegung*

des sechsrädrigen Dampfwagens:

$$1)\quad -K\cos\beta-S+f(2N+2N_{,})-2R_{,,}-(P_{,}+4Q_{,}+2Q_{,,})(\sin\alpha+X)=0,$$

$$2)\quad -K\sin\beta+2(N+N_{,}+N_{,,})-(P_{,}+4Q_{,}+2Q_{,,})\cos\alpha=0,$$

$$3)\quad -n\cos\beta.K+cP_{,}+(a\cos\alpha-2r_{,}\sin\alpha)2Q_{,}+(a_{,}\cos\alpha-r_{,,}\sin\alpha)2Q_{,,}$$
$$-2aN_{,}-2a_{,}N_{,,}-mS-(hP_{,}+4r_{,}Q_{,}+2s_{,,}Q_{,,})X-4Q_{,}U_{,}=0,$$

$$4)\quad 2E_{2}(G_{2}-\varphi_{,})+f(2N+2N_{,})+T.F\theta_{+}-4Q_{,}(\sin\alpha+X)=0,$$

$$5)\quad -2E_{2}(1+\varphi_{,}G_{2})+2(N+N_{1})-T.F_{1}\theta_{+}-4Q_{,}-\cos\alpha=0,$$

$$
\begin{array}{lll}
6) & -\varphi_{,}\varrho_{,}.2E_2\sqrt{(1+G_2^2)}-fr_{,}(2N+2N_{,})+T.F_2\theta_{+}-4Q_{,}U_{,} & =0,\\
7) & 2E_{,,}(G_{,,}-\varphi_{,,})-2R_{,,}-2Q_{,,}(\sin\alpha+X) & =0,\\
8) & -2E_{,,}(1+\varphi_{,,}G_{,,})+2N_{,,}-2Q_{,,}\cos\alpha & =0,\\
9) & -\varphi_{,,}\varrho_{,,}.2E\sqrt{(1+G_{,,}^2)}+2r_{,,}R_{,,}-2Q_{,,}(s_{,,}-r_{,,})X & =0,\\
10) & N_{,}-\lambda(N+N_{,}) & =0;
\end{array}
$$

aus welchen Gleichungen, indem K und λ als gegeben betrachtet werden, die Grössen X, $U_{,}$, $R_{,,}$, N, $N_{,}$, $N_{,,}$, E_2, G_2, $E_{,,}$, $G_{,,}$ als Unbekannte zu suchen sind.

§. 81.

Werden zu diesem Ende wieder die Grössen $\mu_{,}$, $\mu_{,,}$, Y_2, Z_2, $Y_{,,}$, $Z_{,,}$ in derselben Bedeutung wie für die rollende Bewegung (§. 71) eingeführt, und die Wurzelgrössen $\sqrt{(1+G_2^2)}$ und $\sqrt{(1+G^2_{,,})}$ näherungsweise durch $\frac{1+\varphi_{,}G_2}{(1+\varphi_{,}^2)}$ und $\frac{1+\varphi_{,,}G_{,,}}{\sqrt{(1+\varphi_{,,}^2)}}$ ersetzt, so erhält man aus:

(1, 4 u. 7) $\quad Y_2+Y_{,,}=-K\cos\beta-S-T.F\theta_{+}+P_{,}(\sin\alpha+X)$,

(2, 5 u. 8) $\quad Z_2+Z_{,,}=P_{,}\cos\alpha+K\sin\beta-T.F_1\theta_{+}$,

(3, 5, 6, 8 u. 10) $\quad [a_{,}-\lambda a+(f+\mu_{,})r_{,}]Z_2=C-fr_{,}.4Q\cos\alpha+(n\cos\beta+a_{,}\sin\beta)K$
$+T.(F_2\theta_{+}-(a_{,}-\lambda a+fr_{,})F_{,}\theta_{+})+(hP_{,}+4r_{,}Q_{,}+2s_{,,}Q_{,,})X$,

wo $C=(a_{,}\cos\alpha-c)P_{,}-a\cos\alpha(1-2\lambda)2Q_{,}+(4r_{,}Q_{,}+2r_{,,}Q_{,,})\sin\alpha+mS$ ist,

(4 u. 5) $\quad Y_2+fZ_2=4Q_{,}(\sin\alpha-f\cos\alpha+X)-T.(F\theta_{+}+fF\theta_{+})$,

(7 u. 9) $\quad Y_{,,}-\mu Z_{,,}=2Q_{,,}\left(\sin\alpha+\frac{s_{,,}}{r_{,,}}X\right)$,

und hieraus durch Auflösung, wenn man zu fernerer Abkürzung

B statt $(P_{,}+4Q_{,}+2Q_{,,})\sin\alpha+\mu_{,,}P_{,}\cos\alpha+S$

schreibt:

$$X=\frac{\begin{array}{c}(f+\mu_{,,})[K(n\cos\beta+a_{,}\sin\beta)+C-fr_{,}.4Q_{,}\cos\alpha+T.(F_2\theta_{+}+\mu_{,}r_{,}F_{,}\theta_{+})]\\-[a_{,}-\lambda a+(f+\mu_{,})r_{,}][K(\cos\beta+\mu_{,,}\sin\beta)+B-f.4Q_{,}\cos\alpha]\end{array}}{[a_{,}-\lambda a+(f+\mu_{,})r_{,}]\left(P_{,}+4Q_{,}+2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}\right)-(f+\mu_{,,})(hP_{,}+4r_{,}Q_{,}+2s_{,,}Q_{,,})},$$

$$Y_2=\frac{\begin{array}{l}[K(n\cos\beta+a_{,}\sin\beta)+C-fr_{,}.4Q_{,}\cos\alpha+T.(F_2\theta_{+}+\mu_{,}r_{,}F_{,}\theta_{+})]\\ \quad\times\left[\mu_{,,}.4Q_{,}-f\left(P_{,}+2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}\right)\right]+[K(\cos\beta+\mu_{,,}\sin\beta)+B\\ \quad-f.4Q_{,}\cos\alpha]\,[f(hP_{,}+4r_{,}Q_{,}+2s_{,,}Q_{,,})\\ \quad-\{a_{,}-\lambda a)+(f+\mu_{,})r_{,}\}\,4Q_{,}]\end{array}}{\begin{array}{c}[a_{,}-\lambda a+(f+\mu_{,})r_{,}]\left(P_{,}+4Q_{,}+2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}\right)\\-(f+\mu_{,,})(hP_{,}+4r_{,}Q_{,}+2s_{,,}Q_{,,})\end{array}}-T.F\theta_{+}+4Q_{,}(\sin\alpha-f\cos\alpha),$$

$$Z_2=\frac{\begin{array}{c}(P_{,}+4Q_{,}+2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,})[K(n\cos\beta+a_{,}\sin\beta)+C-fr_{,}.4Q_{,}\cos\alpha+T.\{F_2\theta_+-(a_{,}-\lambda a+fr_{,})F_{,}\theta_+\}]\\-(hP_{,}+4r_{,}Q_{,}+2s_{,,}Q_{,,})[K(\cos\beta+\mu_{,,}\sin\beta)+B-f.4Q_{,}\cos\alpha-(f+\mu_{,,})T.F_{,}\theta_+]\end{array}}{[a_{,}-\lambda a+(f+\mu_{,})r_{,}](P_{,}+4Q_{,}+2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,})-(f+\mu_{,,})(hP_{,}+4r_{,}Q_{,}+2s_{,,}Q_{,,})},$$

$$Y_{,,}=\frac{\begin{array}{l}[K(n\cos\beta+a_{,}\sin\beta)+C-fr_{,}.4Q_{,}\cos\alpha+T.(F_2\theta_++\mu_{,}r_{,}F_{,}\theta^+)]\\ \quad\times(f.2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}-\mu_{,,}(P_{,}+4Q_{,}))+[K(\cos\beta+\mu_{,,}\sin\beta)\\ \quad+B-f.4Q_{,}\cos\alpha][\mu_{,,}(hP_{,}+4r_{,}Q_{,}+2s_{,,}Q_{,,})\\ \quad-[a_{,}-\lambda a+(f+\mu_{,})r_{,}]2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,}]\end{array}}{\begin{array}{c}[a_{,}-\lambda a+(f+\mu_{,})r_{,}](P_{,}+4Q_{,}+2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,})\\-(f+\mu_{,,})(hP_{,}+4r_{,}Q_{,}+2s_{,,}Q_{,,})\end{array}}-\mu_{,,}(P_{,}\cos\alpha+K\sin\beta)+2Q_{,,}\sin\alpha,$$

$$Z_{,,}=\frac{\begin{array}{l}-(P_{,}+4Q_{,}+2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,})[K(n\cos\beta+a_{,}\sin\beta)+C-fr_{,}.4Q_{,}\cos\alpha+T.(F_2\theta_++\mu_{,}r_{,}F_{,}\theta_+)\\ \quad-[a_{,}-\lambda a+(f+\mu_{,})r_{,}](P_{,}\cos\alpha-K\sin\beta)]+(hP_{,}+4r_{,}Q_{,}+2s_{,,}Q_{,,})[K(\cos\beta-f\sin\beta)\\ \quad+(P_{,}+4Q_{,}+2Q_{,,})\sin\alpha-f(P_{,}+4Q_{,})\cos\alpha+S]\end{array}}{[a_{,}-\lambda a+(f+\mu_{,})r_{,}](P_{,}+4Q_{,}+2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,})-(f+\mu_{,,})(hP_{,}+4r_{,}Q_{,}+2s_{,,}Q_{,,})};$$

wodurch zugleich auch E_2, G_2, $E_{,,}$, $G_{,,}$ und,

vermöge (5) $2(N+N_1)=Z_2+T.F_{,}\theta_++4Q_{,}\cos\alpha$,

$$=\frac{\begin{array}{c}(P_{,}+4Q_{,}+2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,})[K(n\cos\beta+a_{,}\sin\beta)+C-fr_{,}.4Q_{,}\cos\alpha+T.(F_2\theta_++\mu_{,}r_{,}F_{,}\theta_+)]\\-(hP_{,}+4r_{,}Q_{,}+2s_{,,}Q_{,,})[K(\cos\beta+\mu_{,,}\sin\beta)+B-f.4Q_{,}\cos\alpha]\end{array}}{[a_{,}-\lambda a+(f+\mu_{,})r_{,}](P_{,}+4Q_{,}+2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,})-(f+\mu_{,,})(hP_{,}+4r_{,}Q_{,}+2s_{,,}Q_{,,})}+4Q_{,}\cos\alpha,$$

vermöge (5 u. 6) $4Q_{,}U_{,}=T.(F_2\theta_++\mu_{,}r_{,}F_{,}\theta_+)+\mu_{,}r_{,}.4Q_{,}\cos\alpha-(f+\mu_{,})r_{,}(2N+2N_{,})$,

» (7 u. 9) $2R_{,,}=Y_{,,}-2Q_{,,}(\sin\alpha+X)=\mu_{,,}Z_{,,}+2Q_{,,}\left(\frac{s_{,,}}{r_{,,}}-1\right)X$,

» (8) $2N_{,,}=Z_{,,}+2Q_{,,}\cos\alpha$

entwickelt sind.

Wird nun noch, wie es die als rollend vorausgesetzte Bewegung des angehängten Wagenzuges bedingt, $X=\frac{K\cos\beta+\mu\sin\beta)-\{\mathfrak{P}\}}{\{P+4\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q\}}$ (§. 59) gesetzt, so findet sich, indem zugleich im Sinne des (§. 67), wie auch der Kürze wegen, statt der Kraft $T.\left(\frac{1}{r_{,}}F_2\theta_++\mu_{,}F_{,}\theta_+\right)$ die als unabhängig von der relativen Grösse des Winkels θ gedachte Kraft $2V$ eingeführt wird:

$$K = \frac{\begin{array}{l}\left\{P+4\frac{s}{s}Q\right\}[(f+\mu_{,,})(C-fr_{,}.4Q_{,}\cos\alpha+2r_{,}V)-(a_{,}-\lambda a+(f+\mu_{,})r_{,})(B-f.4Q_{,}\cos\alpha)] \\ +\,|\mathfrak{P}|\,(a_{,}-\lambda a+(f+\mu_{,})r_{,})\left(P_{,}+4Q_{,}+2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}\right)-(f+\mu_{,,})(hP_{,}+4r_{,}Q_{,}+2s_{,,}Q_{,,})\end{array}}{\begin{array}{l}\left\{P+4\frac{s}{r}Q\right\}[(a_{,}-\lambda a+(f+\mu_{,})r_{,})(\cos\beta+\mu_{,,}\sin\beta)-(f+\mu_{,,})(n\cos\beta+a_{,}\sin\beta)] \\ +(\cos\beta+\mu\sin\beta)\left[(a_{,}-\lambda a+(f+\mu_{,})r_{,})\left(P_{,}+4Q_{,}+2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}\right)-(f+\mu_{,,})(hP+4r_{,}Q_{,}+2s_{,}Q_{,})\right]\end{array}},$$

und sodann

$$X = \frac{\begin{array}{l}[(f+\mu_{,,})(C-fr_{,}.4Q_{,}\cos\alpha+2r_{,}V)-[a_{,}-\lambda a+(f+\mu_{,})r_{,}](B-f.4Q_{,}\cos\alpha)](\cos\beta+\mu\sin\beta) \\ -\,|\mathfrak{P}|\,[[a_{,}-\lambda a+(f+\mu_{,})r_{,}](\cos\beta+\mu_{,,}\sin\beta)-(f+\mu_{,,})(n\cos\beta+a_{,}\sin\beta)]\end{array}}{\begin{array}{l}\left\{P+4\frac{s}{r}Q\right\}[[a_{,}-\lambda a+(f+\mu_{,})r_{,}](\cos\beta+\mu_{,,}\sin\beta)-(f+\mu_{,,})(n\cos\beta+a_{,}\sin\beta)] \\ +(\cos\beta+\mu\sin\beta)[[a_{,}-\lambda a+(f+\mu_{,})r_{,}]\left(P_{,}+4Q_{,}+2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}\right)-(f+\mu_{,,})(hP+4r_{,}Q_{,}+2r_{,,}Q_{,})]\end{array}}$$

$$= \frac{\begin{array}{l}f(\cos\beta+\mu\sin\beta)[C+2r_{,}V-r_{,}B+(a_{,}-\lambda a+(\mu_{,}-\mu_{,,})r_{,})4Q_{,}\cos\alpha] \\ -f\,|\mathfrak{P}|\,[r_{,}(\cos\beta+\mu_{,,}\sin\beta)-n\cos\beta-a_{,}\sin\beta]-(\cos\beta+\mu\sin\beta)[(a_{,}-\lambda a+\mu_{,}r_{,})B-\mu_{,,}(C+2r_{,}V)] \\ -\,|\mathfrak{P}|.[(a_{,}-\lambda a+\mu_{,}r)(\cos\beta+\mu\sin\beta)-\mu_{,,}(n\cos\beta+a\sin\beta)]\end{array}}{\begin{array}{l}f.\left\{P+4\frac{s}{r}Q\right\}[r_{,}(\cos\beta+\mu_{,,}\sin\beta)-n\cos\beta-a_{,}\sin\beta] \\ +f(\cos\beta+\mu\sin\beta)\left[r_{,}\left(P_{,}+4Q_{,}+2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}\right)-hP_{,}-4r_{,}Q_{,}-2s_{,,}Q_{,,}\right] \\ +\left\{P+4\frac{s}{r}Q\right\}[(a_{,}-\lambda a+\mu_{,}r_{,})(\cos\beta+\mu_{,,}\sin\beta)-\mu_{,,}(n\cos\beta+a_{,}\sin\beta)] \\ +(\cos\beta+\mu\sin\beta)\left[(a_{,}-\lambda a+\mu_{,}r_{,})\left(P_{,}+4Q_{,}+2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}\right)-\mu_{,,}(hP+4r_{,}Q_{,}+2s_{,,}Q_{,,}\right]\end{array}}.$$

Endlich kann auch hier das früher wiederholt bemerkte Verfahren (§. 59, 72) dazu angewendet werden, den Grad der Genauigkeit, bis zu welchem die entwickelten Ausdrücke den Gleichungen (K) genügen, zu prüfen und die Exponenten μ, $\mu_{,}$, $\mu_{,,}$, so wie zugleich den vorstehenden Ausdruck von K, wenn es erforderlich sein sollte, auf dem Wege allmäliger Annäherung zu verbessern.

§. 82.

Wenn der Nenner der beiden letzteren Ausdrücke von X und K mit $\mathfrak{N}$ bezeichnet, und $Z_2+T.F_{,}\theta_{+}$ oder $2(N+N_{,})-4Q_{,}\cos\alpha=\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ gesetzt wird, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} = {} & (C+2r_{,}V-fr.4Q_{,}\cos\alpha)\left[\left\{P+4\frac{s}{r}Q\right\}(\cos\beta+\mu_{,,}\sin\beta)\right. \\ & \left.+\left(P+4Q_{,}+2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}\right)(\cos\beta+\mu\sin\beta)\right]-(B-f.4Q_{,}\cos\alpha)\left[\left\{P+4\frac{s}{r}Q\right\}(n\cos\beta+a_{,}\sin\beta)\right. \\ & \left.+(hP_{,}+4r_{,}Q_{,}+2s_{,,}Q_{,,})(\cos\beta+\mu\sin\beta)\right]-|\mathfrak{P}|\left[(hP_{,}+4r_{,}Q_{,}+2s_{,,}Q_{,,})(\cos\beta+\mu_{,,}\sin\beta)\right. \\ & \left.-\left({}_{,}P+4Q_{,}+2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}\right)(n\cos\beta+a_{,}\sin\beta)\right],\end{aligned}$$ und

$$-\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial f}=\frac{1}{4Q_{,}\cos\alpha}\cdot\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial f}=\left\{P+4\frac{s}{r}Q\right\}[n\cos\beta+a_{,}\sin\beta-r_{,}(\cos\beta+\mu\sin\beta)]$$
$$+\left[hP_{,}+2s_{,,}Q_{,,}-r_{,}\left(P_{,}+2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}\right)\right](\cos\beta+\mu\sin\beta)\,,$$

folglich
$$\frac{\partial(2N+2N_{,})}{\partial f}=-\frac{\partial\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}\partial f}\cdot\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}+4Q_{,}\cos\alpha\right)\quad\text{und}$$
$$\frac{4Q_{,}}{r_{,}}\cdot\frac{\partial U_{,}}{\partial f}=-\left[2N+2N_{,}+(f+\mu_{,})\cdot\frac{\partial(2N+2N_{,})}{\partial f}\right]$$
$$=-\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}+4Q\sin\alpha\right)\left[1-(f+\mu_{,})\cdot\frac{\partial\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}\partial f}\right],$$

wesentlich negativ, da das Glied $(f+\mu_{,})\cdot\frac{\partial\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}\partial f}$, wenn es auch positiv wäre, jedenfalls kleiner als 1 ist.

Dagegen ist

$$\frac{\partial(2N+2N_{,})}{r_{,}.\partial(2V)}=\frac{\left\{P+4\frac{s}{r}Q\right\}(\cos\beta+\mu_{,,}\sin\beta)+\left(P_{,}+4Q_{,}+\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}\right)(\cos\beta+\mu\sin\beta)}{\mathfrak{N}}\,,$$

$$\text{und}\quad\frac{4Q_{,}}{r_{,}}\cdot\frac{\partial U_{,}}{\partial(2V)}=1-(f+\mu_{,})r_{,}\cdot\frac{\partial(2N+2N_{,})}{r_{,}.\partial(2V)}\,,$$

wesentlich positiv, und eben so finden sich ferner:

$$\mathfrak{N}^{2}\cdot\frac{\partial X}{\partial f}=(\cos\beta+\mu\sin\beta)[a_{,}-\lambda a+(\mu-\mu_{,,})r_{,}]$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}[C+2rV+(a_{,}-\lambda a+\mu r_{,})4Q\cos\alpha]\left[\left\{P+4\frac{s}{r}Q\right\}(\cos\beta+\mu_{,,}\sin\beta)\right.\\ \left.+\left(P_{,}+4Q_{,}+2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}\right)(\cos\beta+\mu\sin\beta)\right]-(B+\mu_{,,}.4Q_{,}\cos\alpha)\\ \times\left[\left\{P+4\frac{s}{r}Q\right\}(n\cos\beta+a_{,}\sin\beta)+(hP_{,}+4r_{,}Q_{,}+2s_{,,}Q_{,,})(\cos\beta+\mu\sin\beta)\right]\\ -\{\mathfrak{P}\}\left[(hP_{,}+4r_{,}Q_{,}+2s_{,,}Q_{,,})(\cos\beta+\mu_{,,}\sin\beta)\right.\\ \left.-\left(P_{,}+4Q_{,}+2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}\right)(n\cos\beta+a_{,}\sin\beta)\right]\end{array}\right\},$$

$$\frac{\partial X}{\partial(2V)}=\frac{(f+\mu_{,})r_{,}}{\mathfrak{N}}(\cos\beta+\mu\sin\beta)\,,$$

so wie auch

$$\frac{\partial K}{\partial f}=\frac{\left\{P+4\frac{s}{r}Q\right\}}{\cos\beta+\mu\sin\beta}\cdot\frac{\partial X}{\partial f}\quad\text{und}\quad\frac{\partial K}{\partial(2V)}=\frac{\left\{P+4\frac{s}{r}Q\right\}}{\cos\beta+\mu\sin\beta}\cdot\frac{\partial X}{\partial(2V)},$$

wesentlich positiv.

Die hier entwickelten Differentialquotienten zeigen demnach, dass die Grössen X, K und U mit der Kraft $2V$ zugleich zu- und abnehmen, und dass bei gleichbleibender Triebkraft die Grössen X und K mit dem Reibungsquotienten f ebenfalls zugleich wachsen und abnehmen, U, dagegen wächt, wenn f abnimmt; und umgekehrt.

§. 83.

Vermöge der (§. 54) angegebenen Bedingungen für das Entstehen der rollenden und der theilweise gleitenden Bewegung des Dampfwagens sind die Gleichungen (K) und die aus ihnen abgeleiteten Ausdrücke nur dann anwendbar und gültig, wenn der Reibungscoefficient f kleiner ist als der der Triebkraft $2V$ zugehörige Reibungsqsquotient R_q für die rollende Umdrehung der Treibräder, oder, was Dasselbe ist, wenn die Triebkraft $2V$ grösser ist als die Kraft $2Vf$, welche den Reibungsquotienten R_q dem gegebenen Coefficienten f gleich macht (§. 68). Und nur für solche grössere Werthe der Triebkraft sind die Grössen X, K und U, im vorigen Paragraphen als mit derselben zugleich zu- und abnehmend zu betrachten.

Werden die beiden Ausdrücke von X, welche aus den Gleichungen (J) und (K) hervorgegangen sind (§§. 72 u. 81), einander gleich gesetzt, so ergiebt sich daraus f gleich dem Reibungsquotienten der Treibräder für die beschleunigte rollende Bewegung, und umgekehrt müssen daher auch durch $f = R_r$ die aus den Gleichungen (K) folgenden Ausdrücke in die entsprechenden, aus den Gleichungen (T) gefundenen, sei es für die beschleunigte oder für die gleichförmige Bewegung, übergehen.

Für einen bestimmten Werth der Triebkraft $2V$ ist bei rollender Bewegung X grösser, U, dagegen kleiner als bei theilweise gleitender Bewegung.

Die Bemerkungen (§. 68) über die Verhältnisse der Bewegung, welche während derselben eintretende Aenderungen der Stärke der Triebkraft und der Reibung zwischen den Rädern und der Bahn zur Folge haben, finden auf den sechsrädrigen Dampfwagen eben so wohl wie auf den vierrädrigen Anwendung; nur mit dem Unterschiede, dass, wenn die als bestimmt und in der Beziehung, dass $f = R_q$ oder $V = Vf$ ist, zu f stehend angenommene Triebkraft $2V$ zunimmt, ohne dass f sich ändert, bei dem sechsrädrigen Dampfwagen die beiden Grössen U, und X ebenfalls, jedoch die erstere verhältnissmässig mehr als die letztere, zunehmen; so dass U, grösser als $(s, - r,)X$ oder die Umdrehung der Treibräder theilweise gleitend wird.

Die Bildung und Entwickelung der Gleichungen (K) beruht auf der Voraussetzung, dass, während die Treibräder mit theilweise gleitender Umdrehung sich bewegen, die Umdrehung der Tragräder des Dampfwagens und der Räder des angehängten Wagenzuges rollend sei. Sollte daher, entweder aus numerischen Berechnungen, oder durch Erfahrung sich ergeben, dass diese Voraussetzung nicht zutreffe, oder mit den für die bekannten Grössen angenommenen Werthen unvereinbar sei, dass nämlich f kleiner sei als der aus den Gleichungen (K) folgende Reibungsquotient $\frac{R_{\prime\prime}}{N_{\prime\prime}}$ (§. 81), oder auch kleiner als irgend einer der auf den Wagenzug bezüglichen Quotienten $\frac{R}{N}$, (welche letztere in der die gewöhnlichen Räderfuhrwerke betreffenden Abtheilung dieser Vorträge ihre Bestimmung finden): so wären auch die aus den Gleichungen (K) gezogenen Folgerungen unstatthaft; und wollte man für solche, minder wesentliche Fälle der Bewegung zu richtigen, nicht an inneren Widersprüchen leidenden Ergebnissen gelangen, so müssten die Zusammensetzung der Gleichungen der Bewegung und deren Entwickelung auf Voraussetzungen, welche unter sich und mit den Werthen der gegebenen Grössen bestehen können, gegründet und hiernach geändert werden. Insbesondere darf, wenn die Gleichungen (K) anwendbar sein sollen, der Reibungsquotient R_q der Treibräder weder Null noch negativ werden, weil in solchem Falle der Coefficient f, welcher nicht grösser als R_q sein darf, vermöge dieser Bedingung kleiner sein würde, als der Quotient $\frac{R_{\prime\prime}}{N_{\prime\prime}}$ (§. 81), der nur positiv sein kann.

Drittes Kapitel.

Nachträge zu den beiden vorigen Capiteln.

§. 84.

Hat der Dampfwagen zwei Trageräderpaare, statt eines einzelnen, so kann es für die Rechnung genügen, ihn als sechsrädrig, mit vier Treibrädern, zu betrachten, und zwar so, dass die vier Tragräder an einer in der Mitte zwischen den Achsen der beiden Trageräderpaare mit ihnen parallel angenommenen Axenlinie zu zwei Tragrädern vereinigt sind, und demgemäss in den Gleichungen (J u. K) des sechsrädrigen Dampfwagens und in den aus ihnen abgeleiteten Ergebnissen, um sie auf diesen achträdrigen Wagen anwendbar zu machen, $4Q_{\prime\prime}$ statt $2Q_{\prime\prime}$ zu setzen und den Abstand a, in paralleler Richtung mit der Bahnlinie von der Axenlinie

des hintern Treibräderpaares an bis zu jener hypothetischen Axenlinie zu rechnen, während P, das Gewicht des achträdrigen Dampfwagens, mit Ausschluss der Räder und Achsen bedeutet.

Auch hat man in eben diesen, auf den sechsrädrigen Dampfwagen Bezug habenden Gleichungen, und in den aus ihnen entwickelten Ausdrücken und Folgerungen nur die Grössen a, λ und N, gleich Null, und $2Q_{,}$, $2R$, statt $4Q_{,}$, $4R$, zu setzen, um sie ferner auf den vierrädrigen Dampfwagen mit zwei Treibrädern und zwei Tragrädern anwenden zu können; wodurch die Aufgabe aufhört unbestimmt zu sein.

Für Dampfwagen mit andern, zur Ausführung gelangten, oder möglichen Combinationen von Rädern mag es hinreichen, im Vorigen die eigenthümliche Natur der Bewegung der in ihrer Eigenschaft als Räderfuhrwerke betrachteten Dampfwagen im Allgemeinen nachgewiesen und die Grundsätze aufgestellt zu haben, nach welchen die Untersuchungen über die jeder Art derselben zukommenden besonderen Verhältnisse der Bewegung auszuführen sind. Und eben so wird es nach den vorgetragenen Sätzen keine sehr wesentliche Schwierigkeiten haben, diejenigen Beziehungen zwischen den einwirkenden Kräften und Widerständen, und der aus ihnen hervorgehenden Bewegung, welche in den Fällen eintreten, wenn zwei oder mehrere Dampfwagen in Verbindung mit einander zur Fortschaffung grösserer Lasten dienen, durch den Calcul zu ermitteln.

§. 85.

Die Function $F\theta$, welche das Gesetz bezeichnet, nach welchem die Grösse der an den Treibrädern arbeitenden Kraft der Maschine mit dem Winkel θ sich ändert, wurde bei der Bildung der Gleichungen der Bewegung und deren Entwickelung als bekannt vorausgesetzt (§. 56). Da es eben so schwierig sein wird, dieses Gesetz mit der bestehenden Einrichtung irgend einer Maschine übereinstimmend genau anzugeben, als die den Wechsel der Triebkraft regelnden Einrichtungen so ins Werk zu setzen, dass sie einem bestimmten Gesetze vollkommen entsprechen: so können folgende Ueberlegungen wenigstens dazu beitragen, von der Beschaffenheit der Function $F\theta$ nach den Bedingungen, denen sie genügen soll, eine etwas nähere Vorstellung zu erlangen.

Das Moment, mit welchem die am Kurbelgriff eines Treibrades arbeitende Kraft der Maschine das Rad zu drehen strebt, in dem Augenblicke der Bewegung, auf welchen der Winkel θ sich bezieht, ist nach (§. 56):

$$T.F_2\theta = T.F\theta.b\sin\theta\left(1-\frac{\frac{b}{l}\cos\theta}{\sqrt{[1-(\frac{b}{l}\sin\theta)^2]}}\right),$$

und $F\theta$ muss, da T diese Kraft für $\theta = 90°$ bezeichnet, für eben diesen Werth von θ gleich 1 werden. Soll nun das Moment, und zwar das der Triebkraft eines jeden der beiden Cylinder für sich, eine stetig nach derselben Richtung erfolgende Umdrehung des Rades, woran sie arbeitet, wie es vorausgesetzt werden muss, hervorbringen können, ohne auch nur augenblicklich die entgegengesetzte Richtung anzunehmen, so darf dasselbe für keinen Werth des Winkels θ negativ werden, und die Function $F\theta$ muss daher, da der Bruch $\frac{b}{l}$ jedenfalls kleiner als 1 und der Factor $1-\frac{b}{l}\cdot\frac{\cos\theta}{\sqrt{[1-(\frac{b}{l}\sin\theta)^2]}}$ positiv ist, so beschaffen sein, dass sie mit $\sin\theta$ zugleich das Vorzeichen wechselt, oder dass sie für $\theta = 0$ und 180 Gr. gleich Null und von 180 bis 360 Gr. negativ ist.

Als die geeignetste Form dieser Function ergiebt sich demnach $F\theta = \sin^n\theta$, wenn n eine positive ungerade ganze Zahl bedeutet, und unter diesen Zahlen ist $n = 1$ diejenige, welche das Moment der umdrehenden Kraft im Allgemeinen grösser als die übrigen macht.

Setzt man demgemäss $F\theta = \sin\theta$, so erhält man, nach den Bezeichnungen in (§. 56):

$$F\theta_+ = \sin\theta + \cos\theta,$$

$$F_1\theta_+ = \frac{b}{l}\cdot\left(\frac{\sin^2\theta}{\sqrt{[1-(\frac{b}{l}\sin\theta)^2]}}+\frac{\cos^2\theta}{\sqrt{[1-(\frac{b}{l}\cos\theta)^2]}}\right),$$

$$F_2\theta_+ = b\sin^2\theta\left(1-\frac{b}{l}\cdot\frac{\cos\theta}{\sqrt{[1-(\frac{b}{l}\sin\theta)^2]}}\right)+b\cos^2\theta\left(1+\frac{b}{l}\cdot\frac{\sin\theta}{\sqrt{[1-(\frac{b}{l}\cos\theta)^2]}}\right),$$

$$\frac{1}{r_1}\cdot F_2\theta_+ + \mu_1 F_1\theta_+ = \frac{b}{r_1}+\mu_1\frac{b}{l}\cdot\left(\frac{\sin^2\theta}{\sqrt{[1-(\frac{b}{l}\sin\theta)^2]}}+\frac{\cos^2\theta}{\sqrt{[1-(\frac{b}{l}\cos\theta)^2]}}\right)$$
$$+\frac{b}{r_1}\cdot\frac{b}{l}\sin\theta.\cos\theta\cdot\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{[1-(\frac{b}{l}\cos\theta)^2]}}-\frac{\sin\theta}{\sqrt{[1-(\frac{b}{l}\sin\theta)^2]}}\right);$$

und für die (§§. 61 u. 74) statt der Function $T.\left(\frac{1}{r_1}F_2\theta_+ + \mu_1 F_1\theta_+\right)$ eingeführte Kraft

$$2V = \frac{2H.T}{e^{4\pi H}-1} \cdot \int_{2\pi \div 0} e^{2H\theta}\left(\frac{1}{r_,} F_2\theta_+ + \mu_, F_,\theta_+\right) \partial\theta$$

ergiebt sich durch Integration:

$$= T\left\{\frac{b}{r_,} + \mu_, \frac{b}{l} \cdot \left[1 + \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{b}{l}\right)^2 + \frac{15}{64} \cdot \left(\frac{b}{l}\right)^4 + \frac{175}{16.64} \cdot \left(\frac{b}{l}\right)^6 \ldots\ldots\right]\right.$$
$$\left. + \mu_, \cdot \frac{1}{8}\left(\frac{b}{l}\right)^3 \cdot \frac{4H^2}{16+4H^2} \cdot \left[1 + \frac{9}{8} \cdot \left(\frac{b}{l}\right)^2 + \frac{35}{32} \cdot \left(\frac{b}{l}\right)^4 \ldots\ldots\right] \ldots\ldots\right\}$$

$$-2HT\frac{b}{r_,} \cdot \frac{b}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1+2H}{1+4H^2}\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\left(\frac{b}{l}\right)^2 + \frac{15}{512}\left(\frac{b}{l}\right)^4 \ldots\ldots\right] + \frac{3+2H}{9+4H^2}\left[\frac{1}{4} + \frac{3}{32}\left(\frac{b}{l}\right)^2 + \frac{27}{512}\left(\frac{b}{l}\right)^4 \ldots\right] \\ + \frac{5+2H}{25+4H^2} \cdot \frac{1}{32}\left(\frac{b}{l}\right)^2\left[1 + \frac{15}{16}\left(\frac{b}{l}\right)^2 \ldots\ldots\right] + \frac{7+2H}{49+4H^2} \cdot \frac{3}{512}\left(\frac{b}{l}\right)^4 \ldots\ldots \end{array} \right.$$

Für den vierrädigen Dampfwagen (§. 61) ist $H = \frac{\varkappa \Delta \Sigma r_,}{\mathfrak{R}} (\cos\beta + \mu \sin\beta)$, für den sechsrädigen Dampfwagen (§. 72) dagegen

$$H = [a_, - \lambda a + (\mu_, - \mu_{,,}) m] \frac{\varkappa \Delta \Sigma r_,}{\mathfrak{R}} (\cos\beta + \mu \sin\beta),$$

wenn die Buchstaben $\varkappa$, Δ, Σ, $\mathfrak{R}$ in der oben (§. 62, 65, 74) ihnen beigelegten Bedeutung genommen werden; und da die Grössen H, $\mu_,$ und $\left(\frac{b}{l}\right)^2$ verhältnissmässig klein sind, so kann das bestimmte Integral

$$\frac{2H}{e^{4\pi H}-1} \cdot \int_{2\pi \div 0} e^{2H\theta}\left(\frac{1}{r_,} . F_2\theta_+ + \mu_, F_,\theta_+\right) \partial\theta \text{ näherungsweise } = \frac{b}{r_,} + \frac{b}{l}\left(\mu_, - \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{r_,} H\right)$$

oder auch nur $= \frac{b}{r_,} + \mu_, \frac{b}{l}$ gesetzt werden.

Wenn jedoch auch das Moment $T.F\theta_+$ durch die Function $F\theta = \sin\theta$ für jeden Werth des Winkels θ, oder während eines ganzen Rad-Umlaufs, nur positiv werden kann, so folgt daraus noch nicht, dass die Grösse $2V$ durch $F\theta = \sin\theta$, bei übrigens gleichen Grössenverhältnissen, nothwendig grösser sich ergebe, als durch jede andere Function von θ, welche diese Eigenschaft nicht hat.

Die Grösse $F\theta$ ist im Vorigen als eine stetige, während des ganzen Kreis-Umlaufs der Kurbel, oder während des ganzen Kolbenlaufs sich gleich bleibende Function von θ betrachtet und behandelt worden. Wäre sie Dies nicht, oder zerfiele der Kurbelkreis in mehrere Theile, für deren jeden die Function $F\theta$ einen andern Ausdruck hätte, so müsste das Integral

$$\int\limits_{2\pi\div 0} e^{2H\theta}\left(\frac{1}{r_{,}}F_2\theta_+ + \mu_{,}F_{,}\theta_+\right)\partial\theta, \text{ wofür auch } 2\int\limits_{2\pi\div 0} e^{2H\theta}\left(\frac{1}{r_{,}}F_2\theta_+ + \mu_{,}F_{,}\theta\right)\partial\theta$$

gesetzt werden kann, stückweise, nämlich für jeden dieser Theile der entsprechende besondere Theil des Integrals, genommen werden. Wird z.B. der Druck des Dampfs auf den Kolben als während des ganzen Kolbenlaufs gleich gross vorausgesetzt, so hat man, von $\theta=0$ an bis $\theta=\pi$, d. h. für den obern Halbkreis des Kurbel-Umlaufs, oder für den Kolbenlauf vorwärts, $F\theta=1$, und von $\theta=\pi$ an bis $\theta=2\pi$, d. h. für den untern Halbkreis des Kurbel-Umlaufs, oder für den Kolbenlauf rückwärts, $F\theta=-1$ anzunehmen. Das eben angegebene Integral zerfällt dann in die beiden Theile:

$$+2\int\limits_{\pi\div 0} e^{2H\theta}\left[\frac{b}{r_{,}}\sin\theta\left(1-\frac{b}{l}\cdot\frac{\cos\theta}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{b}{l}\sin\theta\right)^2\right]}}\right)+\mu_{,}\frac{b}{l}\cdot\frac{\sin\theta}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{b}{l}\sin\theta\right)^2\right]}}\right]\partial\theta \text{ und}$$

$$-2\int\limits_{2\pi\div\pi} e^{2H\theta}\left[\frac{b}{r_{,}}\sin\theta\left(1-\frac{b}{l}\cdot\frac{\cos\theta}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{b}{l}\sin\theta\right)^2\right]}}\right)+\mu_{,}\frac{b}{l}\cdot\frac{\sin\theta}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{b}{l}\sin\theta\right)^2\right]}}\right]\partial\theta,$$

und es ergiebt sich, wenn der Einfachheit wegen bei der Integration die den Factor $\left(\frac{b}{l}\right)^2$ enthaltenden Glieder weggelassen werden, die Grösse

$$2V=\frac{4H.T}{e^{4\pi H}-1}\cdot\left[\left(\frac{b}{r_{,}}+\mu_{,}\frac{b}{l}\right)\cdot\frac{(e^{2\pi H}+1)^2}{1+4H^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{b}{r_{,}}\cdot\frac{b}{l}\cdot\frac{(e^{2\pi H}-1)^2}{1+H^2}\right];$$

welcher Ausdruck für $H=0$ auf $\frac{4}{\pi}T\cdot\left(\frac{b}{r_{,}}+\mu_{,}\cdot\frac{b}{l}\right)$ zurückgeht, während für $F\theta=\sin\theta$, unter den gleichen Abkürzungen, $2V=T\left(\frac{b}{r_{,}}+\mu_{,}\cdot\frac{b}{l}\right)$ gefunden wurde.

§. 86.

Die in die Rechnung aufgenommene eingebildete Kraft $2V$ (§. 61) ist zwar der Bedingung gemäss bestimmt worden, dass sie, als eine vom Winkel θ unabhängige Kraft, die Umdrehungsgeschwindigkeit nach jedem Umlaufe der Treibräder gleichwohl eben so gross giebt, wie die Kraft $T\cdot\left(\frac{1}{r_{,}}F_2\theta_+ + \mu_{,}F_{,}\theta_+\right)$, und kann insofern als ihr gleichgeltend betrachtet werden. Die Aequivalenz dieser beiden Kräfte ist jedoch desshalb nicht vollständig, weil die wirkliche Zeit eines durch die letztere Kraft hervorgebrachten Räder-Umlaufs im Allgemeinen

nicht genau eben so gross ist, als es die Zeit eines Umlaufs sein würde, wenn die Umdrehung durch die surrogirte Kraft $2V$ hervorgebracht würde.

Wird nämlich durch u_0 die Umdrehungsgeschwindigkeit am Anfange des Umlaufs oder für $\theta = 0$ bezeichnet, und durch $u_0^2(1+\vartheta)$ das Quadrat u_1^2 der wirklichen Umdrehungsgeschwindigkeit für irgend einen Werth des Winkels θ, durch $u_0^2(1+\tau)$ aber das Quadrat der der Kraft $2V$ entsprechenden Umdrehungsgeschwindigkeit für denselben Werth dieses Winkels, ausgedrückt, so dass ϑ und τ Functionen von θ vorstellen, welche für $\theta = 0$ verschwinden, so ist:

Die wirkliche Umlaufszeit $= \int_{2\pi\div 0} \frac{\partial\theta}{u_0}(1+\vartheta)^{-\frac{1}{2}} = \int_{2\pi\div 0} \frac{\partial\theta}{u_0}(1-\tfrac{1}{2}\vartheta+\tfrac{3}{8}\vartheta^2\ldots)$,

Die der Kraft $2V$ entsprechende Umlaufszeit $= \int_{2\pi\div 0} \frac{\partial\theta}{u_0}(1+\tau)^{-\frac{1}{2}} = \int_{2\pi\div 0} \frac{\partial\theta}{u_0}(1-\tfrac{1}{2}\tau+\tfrac{3}{8}\tau^2\ldots)$,

und es müssten ϑ und τ gleiche Functionen von $F\theta$ oder von θ sein, wenn die beiden Umlaufszeiten allgemein für jede Function $F\theta$ gleich gross sein sollten.

Aus der Gleichung (O, §. 61) findet sich aber, indem man in ihr $u_0^2(1+\vartheta)$ satt u_1^2 und Null statt ε setzt:

$$Hu_0^2.\vartheta = (B+Hu_0^2)(e^{-H\theta}-1) + 2He^{-2H\theta}.AT\int_{\theta\div 0} e^{2H\theta}\left(\frac{1}{r_i}F_2\theta_+ + \mu_i F_i\theta_+\right)\partial\theta,$$

und aus der Gleichung (P, §. 61):

$$Hu_0^2.\tau = (B+Hu_0^2)(e^{-2H\theta}-1)+2AV(1-e^{-2H\theta}) = (2AV-B-Hu_0^2)(1-e^{-2H\theta}),$$

und die Gleichheit beider Umlaufszeiten würde erfordern, dass

$$2V(1-e^{-2H\theta}) = 2HTe^{-2H\theta}\int_{\theta\div 0} e^{2H\theta}\left(\frac{1}{r_i}F_2\theta_+ + \mu_i F_i\theta_+\right)\partial\theta\ ,$$

d. h., weil $2V = \frac{2HT}{e^{4\pi H}-1}\int_{2\pi\div 0} e^{2H\theta}\left(\frac{1}{r_i}F_2\theta_+ + \mu_i F_i\theta_+\right)\partial\theta$ ist, dass für jeden Werth des Winkels θ im Kreise,

$$\frac{\int_{\theta\div 0} e^{2H\theta}(\frac{1}{r_i}F_2\theta_+ + \mu F_i\theta_+)\partial\theta}{e^{2H\theta}-1} = \frac{\int_{2\pi\div 0} e^{2H\theta}(\frac{1}{r_i}F_2\theta_+ + \mu F_i\theta_+)\partial\theta}{e^{4\pi H}-1}$$

sei; welche letztere Gleichheit nur dann Statt finden kann, wenn $T.\left(\frac{1}{r_i}F_2\theta_+ + \mu_i F_i\theta_+\right)$ nach θ *constant* oder gleich $2V$ ist. Die beiden Umlaufszeiten können daher nicht für jede Function $F\theta$ ganz gleich gross sein, sondern nur für solche, (wenn es deren giebt), für welche die Grösse $\frac{1}{r_i}F_2\theta_+ + \mu_i F_i\theta_+$ nach θ beständig ist; wie Dies unmittelbar aus der Bedingung $\vartheta = \tau$ für jeden Winkel θ, d. h. aus

der Bedingung der Gleichheit der wirklichen und der der Kraft $2V$ zugehörigen Umdrehungsgeschwindigkeit für jeden Augenblick des Umlaufs, folgt.

In dem besondern Falle, wenn $\tau = 0$ oder $V = V_{,}$ (§. 61) ist, kommt die angegebene Bedingung $\vartheta = \tau$ darauf hinaus, dass für jeden Werth des Winkels θ,

$$\frac{\int\limits_{\theta\div 0} e^{2H\theta}\left(\frac{1}{s_{,}}F_2\theta_+ + \mu_{,}F_{,}\theta_+\right)\partial\theta}{e^{2H\theta}-1} = \frac{B+Hu_0^2}{2HAT}, \text{ d. h. } T.\left(\frac{1}{r_{,}}F_2\theta_+ + \mu_{,}F_{,}\theta_+\right) = \frac{B+Hu_0^2}{A} = 2V_{,} \text{ sei.}$$

Durch $F\theta = \sin\theta$ wird die Bedingung der Beständigkeit der Grösse $\frac{1}{r_{,}}F_2\theta_+ + \mu_{,}F_{,}\theta_+$ zwar nicht vollkommen, jedoch nahebei erfüllt, und der Unterschied der beiden betrachteten Umlaufszeiten könnte daher, wenn $F\theta = \sin\theta$ wäre, nur sehr geringe sein.

§. 87.

Die Beziehung, welche bei der Umdrehung der Treibräder zwischen der Lage des Kurbel-Arms oder dem Winkel θ, und dem Stande des Kolbens im Dampfcylinder Statt findet, ergiebt sich wie folgt.

Wenn der Winkel θ gleich Null ist, oder der Kurbel-Arm ce (Fig. 5) beim Umlaufe des Rades hinter der Achsenlinie in der Parallelen cn oder in der verlängerten Axe des Cylinders sich befindet, so fällt der der Kurbelstange und der Kolbenstange gemeinschaftliche Gelenkpunct a in den Punct m, und es steht der Kolben am hintern Ende des Cylinders. Während nun der Kurbel-Arm den Winkel $nce = \theta$ beschreibt, durchläuft der Gelenkpunct a den Weg ma, und der Kolben denselben Raum vom hintern Ende des Cylinders an; und wenn z diesen Raum oder den dem Winkel θ entsprechenden Abstand des Kolbens vom hintern Ende des Cylinders (den Kolbenhub) bezeichnet, während b und l (§. 56) die Längen ce und ae des Kurbel-Arms und der Kurbelstange ausdrüken, so ist:

$$an = l + z, \quad nk = (1-\cos\theta)b, \quad \text{und } (ae)^2 = (ak)^2 + (ke)^2, \text{ d. h.}$$

$$l^2 = [l + z - b(1-\cos\theta)]^2 + b^2\sin^2\theta,$$

woraus $z = b(1-\cos\theta) - l\left[1 - \sqrt{\left(1 - \left(\frac{b}{l}\sin\theta\right)^2\right)}\right]$,

$$\cos\theta = 1 - \frac{2lz + z^2}{2b(l-b+z)}, \qquad \sin\theta = \frac{\pm\sqrt{[z(2b-z)(2l+z)(2(l-b)+z)]}}{2b(l-b+z)}$$

folgt. Das obere Vorzeichen von $\sin\theta$ bezieht sich auf den Kolbenlauf vorwärts, das untere auf den Kolbenlauf rückwärts; der Abstand z aber ist immer vom hintern Ende des Cylinders an zu rechnen.

Es ist demnach $z=0$ für $\theta=0$, und $z=2b$ für $\theta=180°$, aber $z=b+\sqrt{(l^2-b^2)}-l<b$ für $\theta=90°$ und $270°$, und für $z=b$ ist $\sin\theta=-\frac{b}{2l}$, $\sin\theta=\pm\sqrt{\left[1-\left(\frac{b}{2l}\right)^2\right]}$. Wenn der Kolben im Laufe vorwärts die Mitte des Cylinders erreicht, hat der Kurbel-Arm einen Bogen $>90°$, und wenn der Kolben im Rückgange wieder in der Mitte anlangt, einen Bogen $<270°$ beschrieben. Dieses Nichtzusammentreffen von $z=b$, mit $\theta=\begin{cases}90°\\270°\end{cases}$ oder der Unterschied zwischen z und $(1-\cos\theta)b$ ist um so geringer, je grösser l gegen b ist, und würde verschwinden, wenn l unendlich gross wäre.

Der im Obigen durch $T.F\theta$ bezeichnete Druck des Dampfs auf den Cylinderkolben lässt sich nach den vorstehenden Ausdrücken von $\sin\theta$ und $\cos\theta$, wenn $F\theta$ bekannt ist, auch als eine Function des Abstandes z ausdrücken.

§. 88.

Das bei der Berechnung des Trägheitsmoments der Räder, mit Inbegriff der Achsen, anzuwendende Verfahren wird als bekannt vorausgesetzt. (Bei der gewöhnlichen Bauart der Treibräder und der Tragräder der Dampfwagen fällt das Trägheitsmoment eines Räderpaares mit der Achse im Allgemeinen zwischen $0{,}5\ Mr^2$ und $0{,}54\ Mr^2$, wenn r den Halbmesser der Räder und M die Masse des Räderpaares mit der Achse bezeichnet.)

Für die umdrehende Bewegung der Kuppelstangen, welche diese Theile der Dampfwagen mit den durch sie verbundenen Treibrädern gemein haben, findet sich, wenn man das Gewicht einer Kuppelstange mit ϖ bezeichnet und die Quantitäten der Bewegung als Kräfte nach den beiden coordinirten Axen zerlegt, für den dem Winkel θ entsprechenden Augenblick der Bewegung und für die Beschleunigung der Quantität der umdrehenden Bewegung einer Kuppelstange:

Nach der Richtung der Axe der x (a.) $=\frac{\varpi}{g}b\sin\theta.\frac{\partial u_r}{\partial t}$.

Nach der darauf senkrechten Richtung (b.) $=\frac{\varpi}{g}b\sin\theta.\frac{\partial u_r}{\partial t}$.....

und, die Hälfte des Gewichts ϖ auf jedes der beiden durch die Kuppelstange verbundenen Treibräder gerechnet, für das Moment der Beschleunigung der Quan-

tität der Bewegung der halben Kuppelstange, in Bezug auf die Axenlinie des Treibrades, zu welchem diese Hälfte gehört, und zwar für der Moment

Der Beschleunigung nach der Richtung der Axe der x, $= \frac{2g}{w} b^2 \sin^2\theta . \frac{\partial u}{\partial t}$,

Der Beschleunigung nach der darauf senkrechten Richtung, $= \frac{w}{2g} b^2 \cos^2\theta . \frac{\partial u}{\partial t}$;

daher, für jeden Werth des Winkels θ, für

Das ganze Moment der Beschleunigung (c.), $= \frac{w}{2g} b^2 . \frac{\partial u}{\partial t} \ldots\ldots$;

wie wenn die halbe Masse der Stange am Ende des Kurbel-Armes jedes Rades vereinigt wäre.

Auf den Punct der Berührung zwichen dem hintern Treibrade und der Bahnlinie bezogen, ergiebt sich aber, für den dem Winkel θ entsprechenden Augenblick der Bewegung, für das Moment der Beschleunigung der Quantität der Bewegung

Der einen Hälfte der Kuppelstange am hintern Treibrade, $= \frac{w}{2g} b^2 . \frac{\partial u_{\prime}}{\partial t} (1 + \sin\theta)$,

Der andern Hälfte am vordern Treibrade, $= \frac{w}{2g} b^2 . \frac{\partial u_{\prime}}{\partial t} \left(1 + \sin\theta - \frac{a}{b} \cos\theta\right)$,

(wo a den Abstand zwichen den Achsenlinien der beiden Treibräderpaare (§. 56) bedeutet),

Daher der ganzen Kuppelstange (d.) $= \frac{w}{g} b^2 . \frac{\partial u_{\prime}}{\partial t} \left(1 + \sin\theta - \frac{a}{2b} \cos\theta\right) \ldots$;

wie wenn die ganze Masse der Stange, in einem Puncte vereinigt, auf dem Umfange eines in der Mitte zwischen den beiden Treibrädern befindlichen Kreises vom Halbmesser der Kurbel sich bewegte.

Die Beschleunigungen (a, b) und die Momente (c, d) sollten, auf die beiden Kuppelstangen mit Rücksicht auf die verschiedene Stellung der ihnen zugehörigen Kurbelarme bezogen, nach den oben angeführten und angewendeten Grundsätzen in die Gleichungen (G, H, J, K) aufgenommen werden, wodurch die aus ihnen abgeleiteten Ausdrücke der unbekannten Grössen, und insbesondere die Gleichung (M, §. 61) eine etwas veränderte Gestalt annehmen würden. Da jedoch das Gewicht der Kuppelstangen im Verhältniss zum Gewicht der Treibräder wenig beträchtlich ist, und die Glieder mit $\sin\theta$ und $\cos\theta$ der Beschleunigungen und Momente im Umfange eines Kreis-Umlaufes sich aufheben, so kann es genügen, das Moment $\frac{w}{g} b^2$ in das Trägheitsmoment $\frac{2Q_{\prime}}{g} k_{\prime}^2$ der Treibräder einzurechnen; eben so wie auch w in dem Gewicht $2Q_{\prime}$ mitbegriffen ist.

§. 89.

Der Buchstab T (§. 56) bedeutet den wirksamen Druck des Dampfs auf den Kolben eines Cylinders, für $\theta = 90^0$, oder für denjenigen Augenblick eines Rad-Umlaufes, in welchem der Kurbel-Arm über der Axenlinie senkrecht auf der Bahnlinie steht; er ist ein Product der Kolbenfläche in die Spannung des Dampfs oder in den Druck, den die Einheit der Kolbenfläche erleidet, oder, näher bezeichnet, in den Unterschied, um welchen dieser Druck auf die Flächen-Einheit auf der einen, in der Bewegung nachfolgenden Seite des Kolbens grösser ist, als auf der vorausgehenden Seite. Die Spannung des Dampfs im Cylinder ist im Allgemeinen von der im Kessel verschieden, und wird von dieser um so mehr übertroffen, je grösser die Geschwindigkeit ist, mit welcher der Dampfwagen sich bewegt. Um den Druck im Cylinder genau zu finden, müsste eine strenge Theorie neben der Bewegung des Dampfwagens zugleich die Bewegung der ganzen Masse des sich entwickelnden Dampfs in Rechnung bringen. Da jedoch an eine Lösung der in diesem Umfange aufgefassten Aufgabe nicht zu denken ist, und die einer unmittelbaren Messung des Drucks T entgegenstehenden Schwierigkeiten ebenfalls kaum zu überwinden sein werden, so wird man sich damit begnügen müssen, für das Gesetz, nach welchem der Druck T von der Spannung des Dampfs im Kessel und von der Geschwindigkeit der Bewegung des Dampfwagens abhangt, eine *empirische Formel* aufzustellen, welche den Bedingungen entsprechen muss, dass der Druck T, für $u_, \doteq 0$, oder im Anfange der Bewegung des Dampfwagens, dem Producte der Kolbenfläche in die Spannung des Dampfs im Kessel gleich sei, und dass er mit wachsender Geschwindigkeit u abnehme, aber, wie weit auch $u_,$ zunähme, weder Null, noch negativ werden könne. Bezeichnet T_k das obengenannte Product der Kolbenfläche in den nach der Flächen-Einheit gemessenen (wirksamen) Druck des Dampfs im Kessel, und e die Grundzahl der *natürlichen Logarithmen*, so kann man, um diesen Bedingungen auf eine einfache Weise zu genügen, $T = T_k . e^{-\mathfrak{E} u_,}$ setzen, in welchem Ausdruck $u_,$, wie bisher, die Umdrehungsgeschwindigkeit der Treibräder, und $\mathfrak{E}$ eine numerische Grösse bezeichnet, die von der Stärke der Dampf-Entwickelung, der Weite der Dampfleitungsröhren und andern Umständen abhangt, und durch Versuche gefunden werden muss.

Die Gleichung $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = gX$ für die rollende Bewegung, oder die Gleichung (M) (§. 61), nimmt hiernach, wenn zur Abkürzung ξ in der Bedeutung von

$\frac{2H}{e^{4\pi H}-1}\cdot\int_{2\pi\div 0} e^{2H\theta}\left(\frac{1}{r_,}F_2\theta_+ + \mu_, F_, \theta_+\right)\partial\theta$ statt $\frac{1}{r_,}F_2\theta_+ + \mu_, F_, \theta_+$ gesetzt und $\mathfrak{N}$ in der Bedeutung des Nenners von X und K (§. 59 oder 72) genommen wird, die Form

$$(Q.)\qquad \frac{\partial u_,}{\partial t} = \xi A.T_k.e^{-\mathfrak{E}u_,} - B - Hu_,^2$$

an, wo in Bezug auf den vierrädrigen Dampfwagen (§. 59):

$$A = (\cos\beta + \mu\sin\beta)\frac{g}{r_,\mathfrak{N}},$$

$$B = \{[(P_, + 4Q_,)\sin\alpha + \mu_, P_, \cos\alpha](\cos\beta + \mu\sin\beta) + \{\mathfrak{P}\}(\cos\beta + \mu_, \sin\beta_,)\}\frac{g}{r_,\mathfrak{N}},$$

in Bezug auf den sechsrädrigen Dampfwagen (§. 72):

$$A = (a_, - \lambda a)(\cos\beta + \mu\sin\beta)\frac{g}{r_,\mathfrak{N}},$$

$$B = [(a_,-\lambda a)\{[(P_,+4Q_,+2Q_{,,})\sin\alpha+\mu_{,,}P_,\cos\alpha](\cos\beta+\mu\sin\beta)+\{\mathfrak{P}\}(\cos\beta+\mu_{,,}\sin\beta)\}$$
$$+(\mu_, - \mu_{,,})[(C-mS)(\cos\beta+\mu\sin\beta)+\{\mathfrak{P}\}(n\cos\beta+a_,\sin\beta)]\}\frac{g}{r_,\mathfrak{N}}$$

ist, H aber die in (§. 85) angegebene Bedeutung hat.

§. 90.

Für die gleichförmige Bewegung oder für $\frac{\partial u_,}{\partial t} = 0$ giebt die vorstehende Gleichung (Q), wenn die Geschwindigkeit dieser Bewegung, nämlich der gleichförmigen umdrehenden Bewegung der Treibräder, durch u bezeichnet und ψ statt $e^{\mathfrak{E}}$ geschrieben wird:

$$(R.)\qquad p\xi\psi^{-u} - q = 0,$$

und es ist hier für den vierrädrigen Dampfwagen:

$$p = T_k,\quad q = (P_, + 4Q_,)\sin\alpha + \mu_, P_, \cos\alpha + \{\mathfrak{P}\}\frac{\cos\beta + \mu_, \sin\beta}{\cos\beta + \mu\sin\beta} + \frac{\varkappa\Delta\Sigma}{g}(r_, u)^2,$$

und für den sechsrädrigen Dampfwagen:

$$p = T_k,\quad q = (P_, + 4Q_, + 2Q_{,,})\sin\alpha + \mu_{,,}P_,\cos\alpha + \{\mathfrak{P}\}\frac{\cos\beta + \mu_{,,}\sin\beta}{\cos\beta + \mu\sin\beta}$$
$$+(\mu_, - \mu_{,,})\left(\frac{C-mS}{a_, - \lambda a} + \{\mathfrak{P}\}\frac{n\cos\beta + a_,\sin\beta}{(a_, - \lambda a)(\cos\beta + \mu\sin\beta)}\right) + \left(1 + \frac{(\mu_, - \mu_{,,})m}{a_, - \lambda a}\right)\frac{\varkappa\Delta\Sigma}{g}(r_, u)^2.$$

Wenn die beständige Geschwindigkeit u durch einen Versuch mit gleichförmiger Bewegung eines Dampfwagens, und die übrigen in die Gleichung (R) eingehenden Grössen, bis auf eine der beiden ξ, ψ, durch Beobachtung, oder durch

Rechnung bekannt sind, so kann die Gleichung dazu dienen, die Unbekannte zu bestimmen; und hat man durch weitere Versuche mit demselben Dampfwagen andere Werthe p', q', u' für die bekannten Grössen ermittelt, so lassen sich daraus die diesem Dampfwagen angehörigen Werthe der beiden Grössen ξ, ψ, als der Unbekannten, und somit auch der Grösse $\mathfrak{S}$, durch Rechnung finden. Die beiden Gleichungen

$$p\xi\psi^{-u} - q = 0 \quad , \quad p'\xi\psi^{-u'} - q' = 0$$

geben nämlich durch Auflösung, wenn unter log *natürliche Logarithmen* verstanden werden:

$$\psi = \left(\frac{pq'}{p'q}\right)^{\frac{1}{u-u'}} \quad , \quad \xi = \frac{q}{p}\cdot\left(\frac{pq'}{p'q}\right)^{\frac{u}{u-u'}} = \frac{q'}{p'}\cdot\left(\frac{pq'}{p'q}\right)^{\frac{u'}{u-u'}},$$

$$\log\psi \text{ oder } \mathfrak{S} = \frac{1}{u-u'}\log\frac{pq'}{p'q}, \quad \log\xi = \log\frac{q}{p} + \frac{u}{u-u'}\log\frac{pq'}{p'q} = \log\frac{q'}{p'} + \frac{u'}{u-u'}\log\frac{pq'}{p'q}.$$

Wenn $u \gtrless u'$ ist, so muss, damit $\mathfrak{S}$, wie es sein soll, positiv werde, $\frac{q}{p} \lessgtr \frac{q'}{p'}$ sein; ξ wird dagegen immer positiv. Die Geschwindigkeiten u und u' müssen unter sich verschieden, und ihr Unterschied darf nicht zu klein sein; wäre $p = p'$, so müssten q und q', oder wäre $q = q'$, so müssten p und p' unter sich verschieden sein.

Die empirische Ermittelung der die Function $\frac{1}{r_{\prime}}F_2\theta_+ + \mu_{\prime}F_{\prime}\theta_+$ ersetzenden Grösse ξ, wie sie irgend einer bestimmten Bauart des Dampfwagens entspricht, macht die Kenntniss der Function $F\theta$, sofern die meisten der aus den Gleichungen (G, H, J, K) abgeleiteten Ausdrücke die Function $F\theta$ nicht für sich, sondern nur in der Combination $\frac{1}{r_{\prime}}F_2\theta_+ + \mu_{\prime}F\theta_+$ enthalten, für den auf Dampfwagen von jener Bauart Bezug habenden Calcul entbehrlich; und nur zu Berechnungen, welche die Kenntniss der, die Function $F\theta$ anders als in der genannten Combination enthaltenden Grössen Y_2 und Z_2 erfordern, ist ebenfalls die Kenntniss der letzteren Function an und für sich nöthig.

Um die Grössen ξ und $\mathfrak{S}$ auf dem Wege der Versuche mit genügender Sicherheit zu bestimmen, ist es unerlässlich, dass die Werthe der als bekannt vorausgesetzten Grössen während der Versuche so viel als möglich unverändert bleiben und genau ermittelt werden. Es könnte hiezu etwa von Nutzen sein, eine solche Erwerthung, insbesondere der auf den Widerstand der Luft bezüglichen Flächengrösse Σ, durch eigends für diesen Zweck an den Dampfwagen anzubringende Vorrichtungen zu erleichtern.

§. 91.

Wenn die Grössen ξ und $\mathfrak{S}$ bekannt sind, so giebt die Gleichung (R), d. h. die Gleichung

$$\xi A . T_k . e^{-\mathfrak{S}u} - B - Hu^2 = 0$$

den Druck T_k, welchen die gleichförmige Bewegung des Dampfwagens mit einer bestimmten Geschwindigkeit erfordert, nämlich $T_k = \frac{B + Hu^2}{\xi A} e^{\mathfrak{S}u}$, oder auch, näherungsweise auf indirectem Wege, die beständige Geschwindigkeit, mit welcher der Dampfwagen, bei einem gegebenen Werthe von T_k, gleichförmig sich bewegen kann. Und diese Gleichung zeigt, dass ein grösserer Druck T_k, unter sonst gleichen Umständen, auch eine grössere Geschwindigkeit u giebt, und dass, wenn überhaupt eine Fortbewegung möglich sein soll, T_k grösser als $\frac{B}{\xi a}$ sein muss; in Uebereinstimmung mit (§§. 60 u. 73.)

Mit der Integration der Gleichungen für die rollende Bewegung:

$$\partial t = \frac{\partial u_{,}}{\xi A T_k . e^{-\mathfrak{S}u_{,}} - B - Hu_{,}^2} \quad \text{und} \quad \partial \theta = \frac{u_{,} \partial u_{,}}{\xi A T_k . e^{-\mathfrak{S}u_{,}} - B - Hu_{,}^2},$$

durch welche die Zeit t und der zurückgelegte Weg $x = r_{,}\theta$ als Functionen der Geschwindigkeit $\frac{\partial x}{\partial t} = r_{,}u_{,} = r_{,}\frac{\partial \theta}{\partial t}$, und daher mittelbar auch der zurückgelegte Weg als Function der Zeit dargestellt werden würden, könnte die Aufgabe, die dynamischen Verhältnisse der Dampfwagen in ihrer Eigenschaft als Räderfuhrwerke theoretisch zu erforschen, als gelöset betrachtet werden. Diese Integration wird jedoch nur auf dem Wege der Quadraturen zu bewerkstelligen sein, und scheint um so mehr von etwas untergeordneter Bedeutung zu sein, als die Zeitdauer der Bewegung, wie sie aus ihr sich ergiebt, nach (§. 86), wegen der Substitution von ξ an die Stelle von $\frac{1}{r_{,}} F_2 \theta_{+} + \mu_{,} F_{,} \theta_{+}$, noch einer Verbesserung bedürfen würde, um der Forderung der Genauigkeit zu genügen.

Die Gleichung $\partial t = \frac{\partial u_{,}}{\xi A T_k . e^{-\mathfrak{S}u_{,}} - B - Hu_{,}^2}$ giebt, auch ohne sie zu integriren, zu erkennen, dass die Zeit t für $u_{,} = u$ unendlich gross ist, oder dass die Bewegung des Dampfwagens eigentlich nie eine vollständige Gleichförmigkeit erlangt, wenn auch in kurzer Zeit ein der gleichförmigen Bewegung nahe kommender Zustand der beschleunigten Bewegung eintritt.

§. 92.

Ueber die Anwendung der vorstehenden Ergebnisse zu Zahlenrechnungen, welche auf den Gebrauch der Dampfwagen sich beziehen, mögen schliesslich noch einige Bemerkungen folgen.

Bei manchen, die Bewegung der Dampfwagen betreffenden Fragen, kann die eingebildete Triebkraft $2V$, welche man sich am äussern Umfange der Treibräder angebracht vorstellt (§. 61), ohne Rücksicht auf die Art ihrer Erzeugung, für sich als bewegende Kraft betrachtet, und es kann daher, sowohl von derjenigen Veränderlichkeit der Triebkraft, welche auf die bei der Umdrehung der Räder wechselnde Lage der Kurbel-Arme Bezug hat und durch die Function $F\theta$ vertreten wird, als auch von der Beziehung, in welcher die Grössen T und T_k, oder die Spannung des Dampfs in den Cylindern und die im Kessel, zu einander stehen, abgesehen werden; eben so wie man bei manchen, die Bewegung der gewöhnlichen Räderfuhrwerke betreffenden Fragen, die absolute Grösse der Zugkraft nicht zu kennen braucht.

Bei dieser Vorstellungs-Art von der Triebkraft kann nun derjenige Werth derselben, welcher zur gleichförmigen rollenden Bewegung des Dampfwagens auf wagerechter Bahn mit einer bestimmten Last und Geschwindigkeit nöthig ist, und mit dem gebräuchlichen Maasse der Triebkraft nach der Erfahrung sich vergleichen lässt, d. h. nach den bisherigen Bezeichnungen die Grösse $2V_,$ (§. 61) für $\alpha = 0$ und für bestimmte Werthe von $\{P + 4Q\}$ und $u_,$, zur Einheit, oder die Kraft $2V$ als ein Vielfaches dieses Werths von $2V_,$ genommen werden, und es wird sodann diejenige Form der aus den Gleichungen der rollenden Bewegung entwickelten Ausdrücke, welche denselben in (§§. 62 u. 74) gegeben ist, zu den anzustellenden Berechnungen die geschickteste sein.

Ueberhaupt aber wird die Ausführung dieser Rechnungen in Zahlen, da die geringe Grösse des Neigungswinkels α, wie er bei den Bahnen der Dampfwagen vorkommt, der nöthigen Genauigkeit unbeschadet, manche Erleichterung zulässt, und der Winkel β, unter welchem die Zugkraft des Dampfwagens auf die Wagen wirkt, so wie bei dem sechsrädrigen Dampfwagen die Verhältnisszahl λ (§. 78), gewöhnlich gleich Null anzunehmen ist, im Ganzen viel weniger umständlich sein, als die Gestalt, welche einige jener Ausdrücke bei ihrer Entwickelung haben, vermuthen lassen.

Stuttgart, im Mai 1852.

15.

Ueber die Functionen, welche der Gleichung

$$\varphi(x)+\varphi(y)=\psi\left(\frac{fy.Fx+fx.Fy}{\chi(xy)}\right)$$

Genüge leisten.

(Von Herrn Dr. *C. Lottner*, Lehrer der Math. und Physik an der höheren Bürgerschule zu Lippstadt.)

Abel (Oeuvres complètes de *N. H. Abel*, rédigées par *B. Holmboe*. Tom. I. No. IX) hat die allgemeinste Form für die Functionen angegeben, welche die Gleichung $\varphi x+\varphi y=\psi(xfy+yfx)$ befriedigen; und zwar ergiebt sich für die Functionen φ und ψ die Form eines Logarithmus, unter welchem die Function f enthalten ist, die selbst wieder durch eine im Allgemeinen nicht lösliche Gleichung

$$(fx-nx)^{n+a}.(fx+nx)^{n-a}=a^{2n},$$

wo n, a Constanten sind, gefunden wird. Am Ende der Untersuchung deutet *Abel* den Weg an, wie man zur Auflösung jeder Functionalgleichung von zwei Veränderlichen gelangen könne. Er sagt nämlich: „Par le même procédé, qui „a donné ci-dessus les fonctions, qui satisfont à l'équation

$$\varphi x+\varphi y=\psi(xfy+yfx),$$

„on peut trouver les fonctions inconnues dans toute autre équation à deux quan„tités variables. En effet, on peut, par des différentations successives par rapport „aux deux quantités variables, trouver autant d'équations, qui en sont nécessai„res, pour éliminer des fonctions quelconques; de sorte qu'on parviendra à une „équation, qui ne contient qu'une seule de ces fonctions et qui sera en général „une équation différentielle d'un cértain ordre. On peut donc généralement trou„ver chacune de ces fonctions par une seule équation. Il suit de là qu'une telle „équation n'est que très rarement possible." Hierdurch veranlasst, versuchte ich eine Lösung der allgemeineren Gleichung

$$\varphi x+\varphi y=\psi\left(\frac{fx.Fy+Fy.Fx}{\chi(xy)}\right).$$

Diese Gleichung ist deshalb interessant, weil, so wie in

$$\varphi x+\varphi y=\psi(xfy+yfx)$$

die Additionstheoreme der *Logarithmen* und *Kreisbogen* enthalten sind, in ihrer Form das Additionstheorem der *elliptischen Functionen* liegt. Wollte man die Untersuchung auf die von *Abel* angegebene Weise anstellen, so würde man bei den wiederholten Differentiationen auf grosse Schwierigkeiten stossen. Lässt man dagegen gewisse *Bedingungen* für die Functionen f, F, χ, φ von vorn herein zu, so kann man zu Lösungen der Gleichung gelangen. Dies wollen wir zu zeigen versuchen.

Es sei $\frac{fy.Fx+fx.Fy}{\chi(xy)}=\varrho$, so ist, wenn man partiell nach x und y differentiirt:

$$\varphi'x=\psi'\varrho\,\frac{\partial\varrho}{\partial x}\quad,\quad\varphi'y=\psi'\varrho\,\frac{\partial\varrho}{\partial y}.$$

Durch Elimination von $\psi'\varrho$ erhält man:

$$\text{(1.)}\qquad\varphi'x\,\frac{\partial\varrho}{\partial y}-\varphi'y\,\frac{\partial\varrho}{\partial x}=0.$$

Es ist aber:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial x}=\frac{\chi(xy)(fy.F'x+Fy\,f'x)-(Fx.fy+Fy\,fx)y.\chi'(xy)}{[\chi(xy)]^2}$$

$$\frac{\partial\varrho}{\partial y}=\frac{\chi(xy)\,(f'y.Fx+F'y\,fx)-(Fx.fy+Fy\,fx)x.\chi'(xy)}{[\chi(xy)]^2}$$

Es sei jetzt

$$\varphi'(0)=a\ ,\ f0=\alpha\ ,\ f'0=\alpha'\ ,\ F0=\beta\ ,\ F'0=\beta'\ ,\ \chi 0=\gamma\ ,\ \chi'0=\gamma'.$$

Stellt man sich nun die Ausdrücke für $\frac{\partial\varrho}{\partial x}$ und $\frac{\partial\varrho}{\partial y}$ in der Gleichung (1) substituirt vor, und alsdann für y immer 0 gesetzt, so findet sich:

$$\varphi'x=\frac{a\gamma(\alpha.F'x+\beta f'x)}{\gamma(\alpha'.Fx+\beta'fx)-x(\alpha.Fx+\beta fx)\gamma'},$$

Eben so:

$$\varphi'y=\frac{a\gamma(\alpha.F'y+\beta f'y)}{\gamma(\alpha'.Fy+\beta'fy)-y(\alpha.Fy+\beta fy)\gamma'}.$$

Setzt man in die Gleichung (1) die Ausdrücke $\frac{\partial\varrho}{\partial x}$ und $\frac{\partial\varrho}{\partial y}$, ohne y verschwinden zu lassen, so erhält man, nach einigen Umformungen:

$$(3.)\quad (fx.Fy+fy.Fx).\frac{\chi'(xy)}{\chi(xy)} = \frac{(f'y.Fx+F'y.fx)\varphi'x-(fy.F'x+Fy.f'x)\varphi'y}{x\varphi'x-y\varphi'y}.$$

Wollte man nun den Gang, den *Abel* einschlug, weiter verfolgen, so müsste man aus (2) die Ausdrücke von φ, x und φ, y in (3) substituiren, und dann irgend eine Bedingung für f und F daraus ableiten. Die Untersuchung würde aber dann durch die grossen Rechnungen äusserst schwierig werden. Man nehme deshalb an, *dass die Constante verschwinde.* Dann erhält man aus (3), verbunden mit (2), die Gleichung:

$$(4.)\quad (fx.Fy+fy.Fx).\frac{\chi'(xy)}{\chi(xy)}$$

$$= \frac{(\alpha\alpha' Fx.F'x-\beta\beta' fx.f'x).(f'y.Fy-fy.F'y)-(\alpha\alpha' Fy.F'y-\beta\beta' fy.f'y).(f'x.Fx-fx.F'x) + (\alpha\beta'-\alpha'\beta).(Fx.F'x\,fy\,f'y-Fy.F'y\,fx\,f'x)}{x(\alpha F'x+\beta f'x).(\alpha' Fy+\beta' fy)-y(\alpha F'y+\beta f'y).(\alpha' Fx+\beta' fx)}$$

Auch die Annahme, dass $\gamma' = 0$ ist, genügt noch nicht, um aus diesem complicirten Ausdrucke irgend etwas zu schliessen. Man suche daher zu erlangen, dass sowohl der Zähler als der Nenner des Bruchs *in zwei Theile zerfalle*, von denen der eine nur eine Function von y, der andere die entsprechende Function von x ist, d. h., dass die Gleichung (4) folgende Gestalt annehme:

$$\frac{\chi'(xy)}{\chi(xy)} = \frac{\Phi y-\Phi x}{\Psi y-\Psi x}.$$

Dieser Zweck wird erreicht, wenn man statt fx einfach x setzt. Es bieten sich ausserdem noch andere Wege dar, um zu einem Resultate zu gelangen, die wir später betrachten wollen.

I.

In dem Fälle, wenn $fx = x$ ist, wird $\alpha = 0$, $\alpha' = 1$ und

$$(5.)\qquad \varphi' x = \frac{\alpha\beta}{Fx+\beta' x}.$$

In Folge dessen geht die Gleichung (4) in nachstehende über:

$$\frac{\chi'(xy)}{\chi(xy)} = \frac{-\beta\beta' x(Fy-yF'y)+\beta\beta' y(Fx-xF'x)-\beta(yFx.F'x-xFy.F'y)}{(xFy+yFx)[\beta x(Fy+\beta' y)-\beta y(Fx+\beta' x)]}.$$

Hebt man den gemeinschaftlichen Factor β weg, bringt den Zähler auf eine symmetrische Form, dividirt Zähler und Nenner mit xy, und zieht aus dem Nenner alsdann noch den Factor xy heraus, so erhält man:

$$(6.)\qquad x y\,.\,\frac{\chi'(xy)}{\chi(xy)}=\frac{\frac{Fy.F'y}{y}+\beta' F'y-\beta'.\frac{Fy}{y}-\left(\frac{Fx.F'x}{x}+\beta' F'x-\beta'.\frac{Fx}{x}\right)}{\left(\frac{Fy}{y}\right)^2-\left(\frac{Fx}{x}\right)^2},$$

Setzt man nun $Fy=\beta'\vartheta(y)$, so lässt sich im Zähler und Nenner β'^2 wegheben und man bekommt:

$$(7.)\qquad xy\,.\,\frac{\chi'(xy)}{\chi(xy)}=\frac{\frac{\vartheta y.\vartheta' y}{y}+\vartheta' y-\frac{\vartheta y}{y}-\left(\frac{\vartheta x.\vartheta' x}{x}+\vartheta' x-\frac{\vartheta x}{x}\right)}{\left(\frac{\vartheta y}{y}\right)^2-\left(\frac{\vartheta x}{x}\right)^2}.$$

Das Problem reducirt sich also auf die Frage, wie zwei Functionen λ und τ beschaffen sein müssen, damit der Bruch $\frac{\lambda y-\lambda x}{\tau y-\tau x}$ *nur eine Function* von xy werde. Bezeichnet man diese Function mit $\varpi(xy)$, so ergiebt sich:

$$(8.)\qquad \lambda y-\lambda x=(\tau y-\tau x).\varpi(xy).$$

Durch partielle Differentiation nach y und nach x finden sich hieraus folgende Gleichungen:

$$(9.)\qquad \begin{aligned}+\lambda' y&=(\tau y-\tau x)x.\varpi'(xy)+\tau' y.\varpi(xy)\\ -\lambda' x&=(\tau y-\tau x)y.\varpi'(xy)-\tau' x.\varpi(xy)\end{aligned}$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit y, die zweite mit x, und subtrahirt die Producte, so erhält man:

$$(10.)\qquad y\lambda' y+x\lambda' x=(y\tau' y+x\tau' x).\varpi(xy).$$

Aus dieser Gleichung und aus der Gleichung (8) folgt:

$$(11.)\qquad \varpi(xy)=\frac{\lambda y-\lambda x}{\tau y-\tau x}=\frac{y\lambda' y+x\lambda' x}{y\tau' y+x\tau' x}.$$

Hätte man die Gleichung

$$\varpi_{,}(xy)=\frac{\lambda_{,}y+\lambda_{,}x}{\tau_{,}y+\tau_{,}x}$$

gehabt, so hätte sich durch eine ähnliche Rechnung gefunden, dass:

$$(11.)\qquad \varpi_{,}(xy)=\frac{\lambda_{,}y+\lambda_{,}x}{\tau_{,}y+\tau_{,}x}=\frac{y\lambda'_{,}y-x\lambda'_{,}x}{y\tau'_{,}y-x\tau'_{,}x}\ \text{ist.}$$

Es lässt sich hieraus im Allgemeinen schliessen, dass wenn $\varpi(xy)=\frac{\lambda y\mp\lambda x}{\tau y\mp\tau x}$ sein soll, alsdann der Ausdruck

$$\varpi(xy)=\frac{\lambda y\mp\lambda x}{\tau y\mp\tau x}=\frac{y\lambda' y\mp x\lambda x}{y\tau' y+x\tau x}$$

Statt finden muss. Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes auf die Gleichung (11) findet sich:

$$(12.)\quad \frac{\lambda y-\lambda x}{\tau y-\tau x}=\frac{y\lambda' y+x\lambda' x}{y\tau' y+x\tau' x}=\frac{y^2\lambda'' y+y\lambda' y-x^2\lambda'' x-x\lambda' x}{y^2\tau'' y+y\tau' y-x^2\tau'' x-x\tau' x}$$
$$=\frac{y^3\lambda''' y+3y^2\lambda'' y+y\lambda' y+x^3\lambda''' x+3x^2\lambda'' x+x\lambda' x}{y^3\tau''' y+3y^2\tau'' y+y\tau' y+x^3\tau''' x+3x^2\tau'' x+x\tau' x}=\text{etc.}$$

Diese Gleichungen werden sämmtlich erfüllt, wenn man $\lambda y=c.\tau y+c_1$ setzt, wo c und c_1 Constanten sind; die Function $\varpi(xy)$ wird in diesem Falle zu einer Constante.

Ausser dieser Auflösung lassen sich aber noch zwei andere aus der Gleichung (12) ableiten; und zwar auf folgende Weise. Die Brüche in den Gleichungen (12), bei denen das negative Zeichen im Zähler und Nenner sich zeigt, nehmen für den speciellen Fall $y=x$ den unbestimmten Werth $\frac{0}{0}$ an; also findet man ihren Werth, wenn man Zähler und Nenner nach y differentiirt und darauf $y=x$ setzt. Führt man diese Operation an den Brüchen

$$\frac{\lambda y-\lambda x}{\tau y-\tau x}=\frac{y^2\lambda'' y+y\lambda' y-x^2\lambda'' x-x\lambda' x}{y^2\tau'' y+y\tau' y-x^2\tau'' x-x\tau' x}$$

aus, so ergiebt sich:

$$(13.)\quad \frac{\lambda' x}{\tau' x}=\frac{x^2\lambda''' x+3x\lambda''+\lambda' x}{x^2\tau''' x+3x\tau''+\tau' x}.$$

Durch Veränderung der Buchstaben erhält man:

$$\frac{\lambda' y}{\tau' y}=\frac{y^2\lambda''' y+3y\lambda'' y+\lambda' y}{y^2\tau''' y+3y\tau'' y+\tau' y}.$$

Die Gleichungen (12) verlangen aber, dass

$$(14.)\quad \frac{y\lambda' y+x\lambda' x}{y\tau' y+x\tau' x}=\frac{y^3\lambda''' y+3y^2\lambda'' y+y\lambda' y+x^3\lambda''' x+3x^2\lambda'' x+x\lambda' x}{y^3\tau''' y+3y^2\tau'' y+y\tau' y+x^3\tau''' x+3x^2\tau'' x+x\tau' x}$$

sei. Hat man die beiden Gleichungen:

$$(\text{a})\quad \frac{fx}{Fx}=\frac{f_{,}x}{F_{,}x},\quad \frac{fy}{Fy}=\frac{f_{,}y}{F_{,}y},$$

so ist die Bedingung dafür, dass

$$(\text{a}_{,})\quad \frac{yfy+xfx}{yFy+xFx}=\frac{yf_{,}y+xf_{,}x}{yF_{,}y+xF_{,}x}$$

sei, offenbar, wie sich durch Multipliciren findet:

$$fy.F_{,}x+fx.F_{,}y=f_{,}y.Fx+f_{,}x.Fy$$
$$(\text{b})\quad \text{oder}\quad fx.F_{,}y-Fx.f_{,}y=f_{,}x.Fy-fy.F_{,}x.$$

Aus der Division der beiden Gleichungen (a) folgt:

$$\frac{fx.F_{,}y}{f_{,}y.Fx}=\frac{f_{,}x.Fy}{fy.F_{,}x}.$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar:

$$\frac{fx.F_{,}y-f_{,}y.Fx}{f_{,}y.Fx}=\frac{f_{,}x.Fy-fy.F_{,}x}{fy.,Fx}.$$

Da aber nach (b) die Zähler dieser Brüche gleich sind, so müssen auch die Nenner gleich sein; d. h. es muss

$$\text{(c)} \qquad f_{,}y.Fx=fy.F_{,}x \quad \text{oder} \quad \frac{fy}{f_{,}y}=\frac{Fx}{F_{,}x}$$

sein. Da ferner y und x durchaus unabhängig von einander sind, so kann die Gleichung nur erfüllt werden, wenn $\frac{fy}{f_{,}y}$ und $\frac{Fx}{F_{,}x}$ einer und derselben *Constante* gleich sind. Es ist also $\frac{fy}{f_{,}y}=\frac{fx}{f_{,}x}=c$, $\frac{Fy}{F_{,}y}=\frac{Fx}{F_{,}x}=c$. Der Ausdruck (13) gehört in die Kategorie derer, die eine Bedingungsgleichung wie ($a_{,}$) erfüllen müssen. Es lässt sich also schliessen, dass

$$\text{(15.)} \qquad \frac{\lambda'x}{x^2\lambda'''x+3x\lambda''x+\lambda'x}=\frac{\tau'x}{x^2\tau'''x+3x\tau''x+\tau'x}=c$$

oder $\quad x^2\lambda'''x+3x\lambda''x-k\lambda'x=0$, $x^2\tau'''x+3x\tau''x-\varkappa\tau'x=0$,

sei, wo $k=1-\frac{1}{c}$ ist.

Differentialgleichungen dieser Art werden bekanntlich integrirt, wenn man $\lambda'x=x^\nu$ setzt, und die verschiedenen Werthe von ν bestimmt. Man erhält in solchem Falle, nachdem man mit x^ν dividirt hat:

$$\nu(\nu-1)+3\nu-k=0, \quad \nu^2+2\nu-k=0, \quad \nu_1=-1+\sqrt{(1+k)}, \quad \nu_2=-1-\sqrt{(1+k)};$$

folglich sind die vollständigen Integrale der Gleichung (15):

$$\left.\begin{array}{l}\lambda'x=a_1x^{-1+\mu}+a_2x^{-1-\mu}\\ \tau'x=b_1x^{-1+\mu}+b_2x^{-1-\mu}\end{array}\right\}\mu=\sqrt{(1+k)}.$$

Hieraus folgt:

$$\lambda x=a_0+\frac{a_1}{\mu}x^\mu-\frac{a_2}{\mu}x^{-\mu},$$

$$\tau x=b_0+\frac{b_1}{\mu}x^\mu-\frac{b_2}{\mu}x^{-\mu},$$

oder wenn man, kurz, a_1 statt $\frac{a_1}{\mu}$, a_2 statt $-\frac{a_2}{\mu}$, b_1 statt $\frac{b_1}{\mu}$ und b^2 statt $-\frac{b^2}{\mu}$ setzt:

$$(16.)\qquad \begin{cases} \lambda x = a_0 + a_1 x^\mu + a_2 x^{-\mu} \\ \tau x = b_0 + b_1 x^\mu + b_2 x^{-\mu}. \end{cases}$$

Wäre jedoch $\mu = 0$, $k = -1$, so liessen sich die Gleichungen (15) auf folgende Form bringen:

$$\partial.(x^2\lambda'' x) + \partial.(x\lambda' x) = 0 \quad , \quad \partial.(x^2\tau'' x) + \partial(x\tau' x) = 0.$$

Durch Integration ergiebt sich:

$$x^2\lambda'' x + x\lambda' x = 2a_1 \quad , \quad x^2\tau'' + x\tau' x = 2b_1.$$

Dividirt man diese Gleichung mit x, so wird die Seite links wieder ein vollständiges Differential, so dass:

$$\partial.(x\lambda' x) = 2a_1\frac{\partial x}{x} \quad , \quad \partial.(x\tau' x) = 2b_1\frac{\partial x}{x},$$

folglich $\quad x\lambda' x = 2a_1.\log x + a_2 \quad , \quad x\tau' x = 2b_1.\log x + b_2$

$\lambda x = a_0 + a_1.\log^2 x + a_2.\log x \quad , \quad \tau x = b_0 + b_1.\log^2 x + b_2.\log x$ ist.

Fasset man das Ganze zusammen, so werden die Functionen, welche die Bedingung

$$\frac{\lambda y - \lambda x}{\tau y - \tau x} = \varpi(xy)$$

erfüllen sollen, in folgenden Gleichungen enthalten sein müssen:

1) $\quad \lambda(x) = c\tau(x) + c_1 \quad , \quad \varpi(xy) = c,$

oder

2) $\quad \lambda(x) = a_0 + a_1 x_\mu + a_2 x^{-\mu},$

(16a) $\quad \tau(x) = b_0 + b_1 x^\mu + b_2 x^{-\mu} \quad , \quad \varpi(xy) = \dfrac{a_1(xy)^\mu - a_2}{b_1(xy)^\mu - b_2},$

oder

3) $\quad \left.\begin{array}{l} \lambda(x) = a_0 + a_1.\log^2 x + a_2.\log x \\ \tau(x) = b_0 + b_1.\log^2 x + b_2.\log x \end{array}\right\}, \quad \varpi(xy) = \dfrac{a_1\log(xy) + a_2}{b_1\log(xy) + b_2}.$

Wir wollen nun diese Resultate auf die Gleichung (7) nach einander anwenden.

1.

Es sei also:

$$(17.)\qquad \frac{\vartheta x\vartheta' x}{x} + \vartheta' x - \frac{\vartheta x}{x} = c\left(\frac{\vartheta x}{x}\right)^2 + c_1.$$

Hieraus erhält man sogleich:

$$\vartheta' x = \frac{c(\vartheta x)^2 + c_1 x^2 + x\vartheta x}{x\vartheta x + x^2}.$$

Diese Gleichung gehört zu den *homogenen*. Um sie zu integriren, setze man:

$$\vartheta(x) = xu.$$

Dies giebt

$$x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+u=\frac{cu^2+u+c_1}{u+1} \quad , \quad \partial u\cdot\frac{u+1}{(c-1)u^2+c_1}=\frac{\partial x}{x}.$$

Zur leichteren Integration sei $c_1 = n^2$, $c-1=-m^2$.

Es ist $$\int\partial u\cdot\frac{u+1}{n^2-m^2u^2}=-\frac{1}{2m^2}\log(m^2u^2-n^2)+\frac{1}{2mn}\log\frac{mu+n}{mu-n}+\text{Const.}$$

Geht man von den Logarithmen zu den Zahlen über, so ergiebt sich für das Integral der Differentialgleichung:

$$(mu+n)^{-\frac{1}{2m^2}+\frac{1}{2mn}}.(mu-n)^{-\frac{1}{2m^2}-\frac{1}{2mn}}=Cx.$$

Erhebt man diese Gleichung zur $-2m^{2\text{ten}}$ Potenz, und setzt wieder, (nach 6), $\frac{\vartheta x}{x}=\frac{Fx}{\beta' x}$, statt u, so geht sie in die nachstehende über:

$$(18.)\quad (m.Fx+n\beta' x)^{1-\frac{m}{n}}.(mFx-n\beta' x)^{1+\frac{m}{n}}=C_x^{2(1-m^2)}.$$

Aus dieser Gleichung müsste also Fx als Function von x bestimmt werden. Im Allgemeinen wird Dies nicht möglich sein. Die Constante m lässt sich nicht ganz willkürlich annehmen. Denn vermöge der Gleichungen (6 u. 16_a 1) hat man zur Bestimmung der Function χ:

$$xy\cdot\frac{\chi'(xy)}{\chi(xy)}=c, \text{ oder, wenn } xy=z \text{ gesetzt wird:}$$

$$\frac{\chi' z}{\chi z}=\frac{c}{z}, \text{ und daraus folgt } \log\chi z=c\log z+\log c_2,$$

$$(19.)\qquad \chi z=c_2 z^c.$$

Die Bedingung aber, die gleich im Anfange für die Function $\chi(z)$ gemacht wurde, war, dass $\gamma'=\chi'(0)=0$ sein soll. Dies wird nur möglich sein, wenn c gerade gleich Null, oder grösser als die Einheit ist. Da aber $c-1=-m^2$ ist, so muss m entweder gleich ± 1, oder m^2 negativ; d. h. m imaginär sein. Wäre $m=\pm 1$, so würde sich die Seite der Gleichung (18) rechts auf eine Constante reduciren, Fx also ganz die Form annehmen, welche *Abel* gefunden hat. In der That wird auch die Function χ in diesem Falle nur eine Constante werden; also wird man ganz die *Abel*'sche Form erlangen.

Die Function φ wird durch die Gleichung (5),

$$\varphi_{,}x=\frac{\alpha\beta}{Fx+\beta' x},$$

bestimmt. Zur Bestimmung der Function ψ setze man in der ursprünglichen Gleichung

$$\varphi x+\varphi y=\psi.\left(\frac{xFy+yFx}{\chi(xy)}\right)$$

die Grösse $y=0$, welches

$$(20.)\qquad \varphi x+\varphi 0=\psi.\left(\frac{x\beta}{\gamma}\right),\quad \text{folglich } \psi(x)=\varphi.\left(\frac{\gamma x}{\beta}\right)+\varphi 0$$

giebt. Sollte der Fall vorkommen, dass $\varphi(0)$ unendlich wäre, so müsste man, statt $y=0$ zu setzen, y irgend einen Werth y_0 annehmen lassen, so dass $\varphi(y_0)$ nicht unendlich würde; dann erhielte man

$$\varphi(x)+\varphi(y_0)=\psi.\left(\frac{xFy_0+y_0Fx}{\chi(xy_0)}\right).$$

Setzt man nun $\frac{xF(y_0)+y_0Fx}{\chi(xy_0)}=z$, und drückt x in z aus, so hat man $\psi(z)=\varphi(x)+\varphi(y_0)$, wo x durch die Gleichung

$$(20_{a}.)\qquad \frac{xFy_0+y_0Fx}{\chi(xy_0)}=z$$

bestimmt wird.

Beispiel. Man nehme an, es sei $m=n=\sqrt{(-1)}$, also $c=1-m^2=2$, so giebt die Gleichung (18)

$$F(x)=x(Cx+\beta'),\ \text{also } \varphi' x=\frac{\alpha\beta}{x(Cx+\beta')},\ \text{nach (19):}$$

$$\varphi x=\frac{\alpha\beta'}{2\beta}\cdot\log\frac{x}{Cx+2\beta'}+C_{0}\quad.\quad \chi(xy)=c_2(xy)^2.$$

Da $\varphi(0)=-\infty$ wird, so muss man das Verfahren $(20_{a}.)$ einschlagen, um das Argument von ψ zu finden. Es sei $y_0=1$; dann ist $\varphi(1)=-\frac{\alpha\beta}{2\beta'}\log(C+2\beta_{,})$.
Setzt man nun

$$\frac{xF(y_0)+y_0Fx}{\chi(xy_0)}=\frac{C+Cx+2\beta'}{c_2x}=z,$$

so folgt:

$$x=\frac{C+2\beta'}{c_2-C},$$

also

$$\psi(z)=\varphi.\left(\frac{C+2\beta'}{c_2z-C}\right)-\frac{\alpha\beta}{2\beta'}\log(C+2\beta')=\frac{\alpha\beta}{2\beta'}\log\frac{1}{C^2+2\beta' c_2z}.$$

$$\psi\left(\frac{xFy+yFx}{\chi(xy)}\right)=\psi.\left(\frac{C(x+y)+2\beta'}{c_2xy}\right)=\frac{\alpha\beta}{2\beta'}\log\frac{xy}{C^2xy+2\beta' C(x+y)+4\beta'^2}.$$

Da nun $\varphi x+\varphi y=\psi.\left(\frac{xFy+yFx}{\chi(xy}\right)$ sein soll, so muss

$$\frac{\alpha\beta}{2\beta'}\left(\log\frac{x}{Cx+2\beta'}+\log\frac{y}{Cy+2\beta'}\right)=\frac{\alpha\beta}{2\beta'}\log\frac{xy}{C^2xy+2\beta'C(x+y)+4\beta'^2}$$

sein. Diese Gleichung ist auch in der That völlig *identisch.*

Das Integral der Gleichung (17) ist nicht in der Formel (18) enthalten, wenn $c_{,}=0$ ist. Es findet sich dann, wenn ϑx wieder gleich xu gesetzt wird:

$$\frac{(u+1)\partial u}{(c-1)u^2}=\frac{\partial x}{x}.$$

Das vollständige Integral davon ist:

$$\frac{1}{c-1}\log u-\frac{1}{c-1}\cdot\frac{1}{u}=\log\frac{x}{c,}$$

oder

$$\frac{1}{u}=c_{,}x^{1-c}e^{-\frac{1}{u}}.$$

c muss hier wieder grösser als die Einheit sein.

Aus der vorstehenden Gleichung lässt sich $\frac{1}{u}$ als Function von x durch eine *Reihe* darstellen. *Lagrange* hat gefunden, dass, wenn $z=x+yf(z)$ ist, z durch folgende Reihe ausgedrückt wird:

$$z=x+yfx+\frac{y_2}{2!}\cdot\frac{\partial.(fx)^2}{\partial x}+\frac{y_3}{3!}\cdot\frac{\partial^2.(fx)^3}{\partial x^2}+\ldots\ldots$$

In gegenwärtigem Falle ist $z=\frac{1}{u}$, $f.\left(\frac{1}{u}\right)=e^{-\frac{1}{u}}$, $x=0$, $y=c_{,}x^{1-c}$, also

$$\frac{1}{u}=c_{,}x^{1-c}-\frac{2c_{,}^2}{2!}x^{2(1-c)}+\frac{3^2}{3!}c_{,}^3x^{3(1-c)}-\frac{4^3}{4!}c_{,}^4x^{4(1-c)}+\ldots\ldots$$

Da $u=\frac{\vartheta x}{x}=\frac{Fx}{\beta'x}$ ist, so folgt hieraus:

$$Fx=\frac{\beta'}{c_{,}x^{-c}-\frac{2c_{,}^2}{2!}x^{1-2c}+\frac{3^2}{3!}c_{,}^3x^{2-3c}-\frac{4^3}{4!}c_{,}^4x^{3-4c}},$$

$$\varphi x=\frac{\alpha\beta}{\beta'}\int\frac{c_{,}x^{-c}-\frac{2}{2!}c_{,}^2x^{1-2c}+\frac{3^2}{3!}c_{,}^3x^{2-3c}+\frac{4^3}{4!}c_{,}^4x^{3-4c}+\ldots..}{1+c_{,}x^{1-c}-\frac{2}{2!}c_{,}^2x^{2(1-c)}+\frac{3^2}{3!}c_{,}^3x^{3(1-c)}-\frac{4^3}{4!}c_{,}^4x^{4(1-c)}+\ldots..}\partial x,$$

$$\chi(xy)=c_2(xy)^c.$$

2.

Sollte die Gleichung: $\frac{\lambda y-\lambda x}{\tau y-\tau x}=u(xy)$ bestehen, so musste zweitens:



$$\lambda x = a_0 + a_1 x^\mu + a_2 x^{-\mu}, \quad \tau x = b_0 + b_1 x^\mu + b_2 x^{-\mu}, \quad \omega(xy) = \frac{a_2 - a_1 (xy)^\mu}{b_2 - b_1 (xy)^\mu}$$

sein. Die Constante μ, welche reell oder imaginair sein kann, wird, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, immer positiv angenommen werden können. Wenn man das Resultat auf die Gleichung (6) anwendet, so erhält man:

$$\frac{Fx.F'x}{x} + \beta' F'x - \beta'.\frac{Fx}{x} = a_0 + a_1 x^\mu + a_2 x^{-\mu},$$

$$(21.) \qquad \left(\frac{Fx}{x}\right)^2 = b_0 + b_1 x^\mu + b_2 x^{-\mu},$$

$$xy.\frac{\chi'(xy)}{\chi(xy)} = \frac{a_2 - a_1 (xy)^\mu}{b_2 - b_1 (xy)^\mu}.$$

Bestimmt man aus der zweiten Gleichung den Werth von Fx, und setzt ihn in die erste Gleichung, so erhält man zur Bestimmung der Constanten die Bedingung

$$a_0 + a_1 x^\mu + a_2 x^{-\mu} = \tfrac{1}{2}[2b_0 + (\mu+2) b_1 x^\mu + (2-\mu) b^2 x^{-\mu}] + \beta'\mu.\frac{b_1 x^\mu - b_2 x^{-\mu}}{2\sqrt{(b_0 + b_1 x^\mu + b_2 x^{-\mu})}}.$$

Es ist hier das Rationale dem Rationalen, das Irrationale dem Irrationalen gleich zu setzen. Der irrationale Theil wird nur verschwinden, wenn entweder $\mu = 0$ oder $\beta' = 0$ ist. Die erste Annahme würde nur einen speziellen Fall von dem vorher behandelten geben. Man setze daher $\beta' = 0$. Ausserdem folgt aus dem Verschwinden des rationalen Theils:

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = \frac{\mu+2}{2}.b_1, \quad a_2 = \frac{2-\mu}{2}.b_2.$$

Die Functionen F und φ ergeben sich also aus (21 und 5) auf folgende Weise:

$$Fx = x^{1-\frac{1}{2}\mu}\sqrt{(b_2 + b_0 x^\mu + b_1 x^{2\mu})},$$

$$(22.) \, \varphi' x = \frac{a\beta}{Fx} = a\beta.\frac{x^{\frac{1}{2}\mu-1}}{\sqrt{(b_2 + b_0 x^\mu + b_1 x^{2\mu})}}, \quad \varphi x = a\beta.\int\frac{x^{\frac{1}{2}\mu-1}\,\partial x}{\sqrt{(b_2 + b_0 x^\mu + b_1 x^{2\mu})}}.$$

Dieses Integral wird sich nur dann durch bekannte Functionen ausdrücken lassen, wenn $\mu = 0$ ist.

Zur Bestimmung von χ sei xy in (21) $= z$; dann folgt

$$z.\frac{\chi' z}{\chi z} = \frac{\frac{2-\mu}{2}.b_2 - \frac{\mu+2}{2}.b_1 z^\mu}{b_2 - b_1 z^\mu}.$$

Durch die Substition $z^\mu = \varrho$ erhält man:

$$\log\chi z+\frac{1}{\mu}\int\frac{\frac{2-\mu}{2}b_2-\frac{\mu+2}{2}b_1 v}{b_2-b_1 v}\cdot\frac{\partial v}{v}=\frac{2-\mu}{2\mu}\cdot b_2\int\frac{\partial v}{v(b_2-b_1 v)}-\frac{\mu+2}{2\mu_1}\cdot b_1\int\frac{\partial v}{b_2-b_1 v}$$

$$=\frac{2-\mu}{2\mu}b_2\log v+\frac{(\mu+1)b_1-(2-\mu)b_2}{2\mu b_1}\log(b_2-b_1 v),$$

folglich
$$\chi(z)=c_2 z^{\frac{2-\mu\, b_2}{2}}(b_2-b_1 z^\mu)^{\frac{(\mu+2)b_1-(2-\mu)(b_1-b_2)}{2\mu b_1}}$$

Es ist:

$$\chi'=-c_2\cdot\frac{(\mu+2)b_1-(2-\mu)b_2}{2b_1}\cdot z^{\frac{1}{2}\mu}(b_2-b_1 z^\mu)\cdot\frac{(2-\mu)(b_1-b_2)}{2\mu b_1}+c_2 b_2\cdot\frac{2-\mu}{2}(b_2-b_1 z^n)^{\frac{(\mu+2)b_1-(1-\mu)b_2}{2\mu b_1}}z^{\frac{1}{2}\mu}.$$

und es sollte $\gamma'=\chi_0=0$ sein; Dies wird nur der Fall sein können (vorausgesetzt, dass keine von den Constanten c_2, b_1, b_2 verschwindet), wenn $\mu=2$, oder negativ ist. Der letztere Fall wurde ausgeschlossen. Man bekommt also:

$$\varphi x=\alpha\beta\int\frac{\partial x}{\sqrt{(b_2+b_0 x^2+b_1 x^4)}}\qquad Fx=\sqrt{(b_2+b_0 x^2+b_1 x^4)}$$

$$\psi(x)=\varphi\left(\frac{x\gamma}{\beta}\right)+\varphi(0)=\varphi(x c_2\sqrt{b_2})+\varphi(0),$$

$$\psi\left(\frac{xFy+yFx}{\chi(xy)}\right)=\psi\left(\frac{x\sqrt{(b^2+b_0 y^2+b_1 y^4)}+y\sqrt{(b^2+b_0 x^2+b_1 x^4)}}{b_2-b_1 x^2 y^2}\right).$$

Setzt man nun, um dieses Resultat mit den gewöhnlichen Formeln in Einklang zu bringen: $b_2=1$, $b_0=-(1+k^2)$, $b_1=k^2$, $c_2=1$, so wird

$$F(0)=\beta=1,\quad \chi(0)=\gamma=1,\quad \varphi(0)=0,$$

also $\psi(x)=\varphi(x)=\int\frac{\partial x}{\sqrt{[1-(1+k^2)x^2+k^2x^4]}}=\int\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-k^2x^2)}}$.

$F(x)=\sqrt{(1-x^2)}.\sqrt{(1-k^2x^2)}$, $\chi(xy)=1-k^2x^2y^2$. Die Gleichung

$$\varphi x+\varphi y=\psi\left(\frac{xFy+yFx}{\chi(xy)}\right)$$

wird also folgende Gestalt annehmen:

$$(23.)\quad\int\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}.\sqrt{(1-k^2x^2)}}+\int\frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)}.\sqrt{(1-k^2y^2)}}$$

$$=\int\frac{d\left(\frac{x\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-k^2y^2)}+y\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}\right)}{\sqrt{\left[\left\{1-\left(\frac{x\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-k^2y^2}+y)\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}\right)^2\right\}\left\{1-k^2\left(\frac{x\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-k^2y^2}+y)\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}\right)^2\right\}\right]}}.$$

Setzt man, nach *Legendre* $x=\sin\varphi$, $y=\sin\psi$,

$$\frac{x\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-k^2y^2)}+y\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}=\sin\mu,$$

so wird

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-k^2x^2)}}=\int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}\qquad\int\frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-k^2y^2)}}=\int\frac{\partial\psi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)}},$$

und endlich das dritte Integral $=\int\frac{\partial\mu}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\mu)}}$. Wenn also alsdann die Gleichung

$$\int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}+\int\frac{\partial\psi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)}}=\int\frac{\partial\mu}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\mu)}}$$

bestehen soll, so muss μ durch die Gleichung

$$(24.)\quad \sin\mu=\frac{\sin\varphi.\cos\psi\sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)}+\sin\psi.\cos\varphi\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}{1-k^2\sin^2\psi.\sin^2\varphi}$$

gegeben sein.

Dies ist das berühmte, von *Euler* zuerst gefundene Additions-Theorem der *elliptischen Functionen erster Gattung:*

3.

Die dritte Art endlich, in welcher man der Gleichung:

$$\frac{\lambda y-\lambda x}{\tau y-\tau x}=\varpi(xy)$$

genügen konnte, bestand darin, dass man:

$$\lambda x=a_0+a_1\log^2x+a_2\log x\;,$$
$$\tau x=b_0+b_1\log^2x+b_2\log x\;,$$
$$\varpi(xy)=\frac{a_1\log xy+a_2}{b_1\log xy+b_2}$$

setzt. In unserem Falle müsste also

$$\frac{Fx.F'x}{x}+\beta'\left(F'x-\frac{Fx}{x}\right)=a_0+a_1\log^2x+a_2\log x,$$
$$\left(\frac{Fx}{x}\right)^2=b_0+b_1\log^2x+b_2\log x,$$
$$\frac{xy\chi'(xy)}{\chi(xy)}=\frac{a_1\log xy+a_2}{b_1\log xy+b_2}$$

sein. Zur nähern Bestimmung der Constanten erhält man, wenn man den Werth von Fx aus der zweiten Gleichung in die erste setzt:

$$b_0+\tfrac{1}{2}b_2+(b_1+b_2)\log x+b_1\log^2x+\beta'.\frac{2b_1\log x+b_2}{2\sqrt{(b_0+b_1\log^2x+b_2\log x)}}=a_0+a_1\log^2x+a_2\log x.$$

Dieser Gleichung lässt sich auf zweierlei Art genügen, ohne die Constanten b_1 und b_2 verschwinden zu lassen; nämlich Erstlich, indem man $\beta'=0$ setzt, oder

Zweitens, wenn man $b_2 = 2\sqrt{b_0 b_1}$ macht, in welchem Falle sich die Wurzel ausziehen lässt.

Im ersten Falle hat man

$$b_0+\tfrac{1}{2}b_2 = a_0 \quad , \quad b_1+b_2 = a_2 \quad , \quad b_1 = a_1$$

$$(25.)\ Fx = x\sqrt{(b_0+b_1\log^2 x+b_2\log x)}, \ \varphi x = a\beta\int\frac{\partial x}{Fx} = a\beta\int\frac{\partial.\log x}{\sqrt{(b_0+b_1\log^2 x+b_2\log x)}}+C.$$

φx wird also entweder zu einem *Logarithmus*, oder zu einem *Kreisbogen*, je nachdem b_1 positiv oder negativ ist; die Veränderliche in ihm wird immer nur $\log x$ sein.

Zur Bestimmung von χ ist, wenn $xy = z$ gesetzt wird:

$$\frac{z\chi' z}{\chi z} = \frac{a_1\log z+a_2}{b_1\log z+b_2}, \ \log\chi z = \int\frac{b_1\log z+b_1+b_2}{b_1\log z+b_2}\partial.\log z = \log z+\log(b_1\log z+b_2)+\log c^2,$$

folglich $\chi(z) = c_2 z(b_1\log z+b_2)$. Es wird also

$$\varphi x+\varphi y = \psi\left(\frac{\sqrt{(b_0+b_1\log^2 x+b_2\log x)}+\sqrt{(b_0+b_1\log^2 y+b_2\log y)}}{c_2(b_1\log xy+b_2)}\right)$$

sein. Da die Veränderliche nur unter dem Zeichen *log* vorkommt, so schreibe man überall statt $\log x$ bloss x, statt $\log y$ bloss y. Dies giebt:

$$\varphi x+\varphi y = \psi\left(\frac{\sqrt{(b_0+b_1 x_2+b_2 x)}+\sqrt{(b_0+b_1 y+b_2 y)}}{c_2(b_1 xy+b_2)}\right),$$

wo φx jetzt das Integral $a\beta\int\frac{\partial x}{\sqrt{(b_0+b_1 x^2+b_2 x)}}$ bedeutet.

Es lässt sich die willkürliche Constante, die zu φx hinzukommt, immer so annehmen, dass $\varphi(0)$ verschwindet. Man hat alsdann zur Bestimmung der Function ψ:

$$\varphi x = \psi\left(\frac{\sqrt{(b_0+b_1 x^2+b_2 x)}+\sqrt{b_0}}{c_2 b_2}\right).$$

Im zweiten Falle, wenn $b_2 = 2\sqrt{(b_0 b_1)}$ ist, muss

$$b_0+\sqrt{(b_0 b_1)}+2\beta'\sqrt{b_1} = a_0 \quad , \quad b_1+2\sqrt{(b_0 b_1)} = a_2 \ , \ b_1 = a_1,$$

$$F(x) = x(b_1\log x+\sqrt{b_0}) \ , \ \varphi x = a\beta\int\frac{\partial x}{Fx+\beta' x} = a\beta\int\frac{\partial.\log x}{\sqrt{(b_1\log x)}+\sqrt{(b_0+\beta')}},$$

$\chi(xy) = c_2 xy[b\log xy+2\sqrt{(b_0 b_1)}]$ sein. Dies ist also nur ein specieller Fall der Formel (25); nämlich wenn man annimmt, dass die dort vorkommende Wurzel sich ausziehen lässt.

In diesen Fällen sind, wie leicht zu sehen, die Additionstheoreme der *Logarithmen* und *Kreisbogen* enthalten.

II.

Im vorigen Abschnitt wurde die Lösung der Gleichung

$$\varphi x+\varphi y=\psi\left(\frac{xFy+yFx}{\chi(xy)}\right)$$

gegeben, in dem Falle, wenn $\chi'(0)=0$ ist. Es gelingt auch, wenn man für die Function φ eine Annahme macht, eine Lösung der allgemeineren Gleichung

$$\varphi x+\varphi y=\psi\left(\frac{fx.Fy+fy.Fx}{\chi(xy)}\right)$$

Wir fanden (2)

$$(1.)\qquad \varphi' x=\frac{\alpha\gamma(\alpha.F'x+\beta f'x)}{\gamma(\alpha'.Fx+\beta'.fx)-x(\alpha.Fx+\beta fx)\gamma'}.$$

Nimmt man nun an, dass φx *symmetrisch* sei in Bezug auf die darin vorkommenden Functionen F und f, so dass

$$\varphi(x)=\lambda(Fx,fx)=\lambda(fx,Fx)$$

ist, so wird man auch in $\varphi' x$ die Grössen F' mit f' und F mit f vertauschen können, und erhält dann

$$(2.)\qquad \varphi' x=\frac{\alpha\gamma(\alpha f'x+\beta F'x)}{\gamma(\alpha' fx+\beta' Fx)-x(\alpha fx+\beta Fx)\gamma'}$$

Aus den Gleichungen (1 und 2) folgt, wenn $Fx=u$ und $fx=v$ gesetzt wird:

$$\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial v}{\partial x}\right)\{\alpha'\gamma v+\beta'\gamma u-\alpha\gamma' xv-\beta\gamma' xu\}$$
$$=\left(\alpha\frac{\partial v}{\partial x}+\beta\frac{\partial u}{\partial x}\right)\{\alpha'\gamma u+\beta'\gamma v-\alpha\gamma' xu-\beta\gamma' xv\}.$$

Nach Auflösung der Klammern und einigen Reductionen ergiebt sich:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\{\alpha\alpha'\gamma-\alpha^2\gamma' x-\beta\beta'\gamma+\beta^2\gamma' x)v+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)\gamma u\}$$
$$=\frac{\partial v}{\partial x}\{(\alpha\alpha'\gamma-\alpha^2\gamma' x-\beta\beta'\gamma+\beta^2\gamma' x)u+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)\gamma v\}.$$

Es sei $(\alpha\alpha'-\beta\beta')\gamma=b$, $(\beta^2-\alpha^2)\gamma'=c$, $(\alpha\beta'-\alpha'\beta)\gamma=g$, so wird

$$(3.)\qquad \frac{\partial u}{\partial v}=\frac{(b+cx)u+gv}{(b+cx)v+gu}$$

die Gleichung sein, aus welcher die Abhängigkeit der beiden Functionen u und v von einander entnommen werden muss.

Man setze hier zur Erleichterung der Rechnung $g=1$. Dann braucht

man im Resultat nur $\frac{b}{g}$ und $\frac{c}{g}$ statt b und c einzuführen. Die Gleichung (3) lässt sich dann auf eine sehr einfache Form bringen. Es sei:

$$v = z - t \quad , \quad u = z + t ,$$

so folgt:

$$\frac{\partial z + \partial t}{\partial z - \partial t} = \frac{(b+cx)z + (b+cx)t + z - t}{(b+cx)z - (b+cx)t + z + t}$$

oder

$$(b+cx)z\partial z - (b+cx)z\partial t + (b+cx)t\partial z - (b+cx)t\partial t + z\partial z - z\partial t - t\partial z + t\partial t$$
$$= (b+cx)z\partial z + (b+cx)z\partial t - (b+cx)t\partial z - (b+cx)t\partial t + z\partial z + z\partial t - t\partial z + t\partial t$$

oder, wie leicht zu sehen,

$$(b+cx+1)z\partial t = t(b+cx-1)\partial z ,$$

$$\frac{\frac{\partial.\log z}{\partial x}}{\frac{\partial.\log t}{\partial x}} = \frac{b+cx+1}{b+cx-1}.$$

Es sei jetzt $\log z = r$, $\log t = s$, so erhält man

$$(4.)\qquad \frac{\frac{\partial r}{\partial x}}{\frac{\partial s}{\partial x}} = \frac{b+cx+1}{b+cx-1}.$$

Offenbar wird diese Gleichung ganz allgemein erfüllt, wenn man:

$$(5.)\qquad \frac{\partial r}{\partial x} = (b+cx+1)V, \qquad \frac{\partial s}{\partial x} = (b+cx-1)V$$

setzt, wo V zunächst irgend eine beliebige Function von x sein wird, wenn keine Gleichung zwischen F und f Statt findet. Es ergiebt sich daraus:

$$r = \int(b+cx+1)V\partial x \quad , \quad s = \int(b+cx-1)V\partial x, \text{ folglich}$$
$$(6.)\qquad z = e^{\int(b+cx+1)V\partial x} \quad , \quad t = e^{\int(b+cx-1)V\partial x},$$
$$v = fx = e^{\int(b+cx+1)V\partial x} - e^{\int(b+cx-1)V\partial x} ,$$
$$(7.)\qquad u = Fx = e^{\int(b+cx+1)V\partial x} + e^{\int(b+cx-1)V\partial x}.$$

Dies wäre die Lösung der Gleichung (3). Wenn man $u = v$ setzte, würde sie von vorn herein befriedigt.

Die Gleichung (1) ergiebt alsdann für $\varphi' x$, nachdem man mit dem gemeinschaftlichen Factor $e^{\int(b+cx)V\partial x}$ dividirt hat:

$$\varphi' x = a\gamma \frac{\alpha(b+cx+1)e^{\int V\partial x} + \alpha(b+cx-1)e^{-\int V\partial x} + \beta(b+cx+1)e^{\int V\partial x} - \beta(b+cx-1)e^{-\int V\partial x}}{(\alpha'\gamma - \alpha\gamma' x)(e^{\int V\partial x} + e^{-\int V\partial x}) + (\beta'\gamma - \beta\gamma' x)(e^{\int V\partial x} - e^{-\int V\partial x})} . V.$$

Setzt man aber für b und c ihre Werthe $b=\frac{\alpha\alpha'-\beta\beta'}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}$, $c=\frac{(\beta^2-\alpha^2)\gamma'}{(\alpha\beta'-\alpha'\beta)\gamma}$, so verwandelt sich der Ausdruck in folgenden:

$$\varphi'x=\frac{a}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}\cdot\frac{(\alpha^2-\beta^2)\{(\alpha'+\beta')\gamma-(\alpha+\beta)\gamma'x\}e^{\int V\partial x}+(\alpha^2-\beta^2)\{(\alpha'-\beta')\gamma-(\alpha-\beta)\gamma'x\}e^{-\int V\partial x}}{[(\alpha'+\beta')\gamma-(\alpha+\beta)\gamma'x]e^{\int V\partial x}+[(\alpha'-\beta')\gamma-(\alpha-\beta)\gamma'x]e^{-\int V\partial x}}\cdot V,$$

oder, nach Weglassung des gemeinschaftlichen Factors, in:

$$(8.)\qquad \varphi'x=a\cdot\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}V=-\frac{ac\gamma}{\gamma'}\cdot V.$$

Wir nahmen an, dass $\varphi'x$ in Bezug auf Fx und fx *symmetrisch* sein sollte; es zeigt sich hier also deutlich, dass die Symmetrie nur dann Statt finden kann, wenn $\varphi'x$ weder Fx noch fx enthält.

Die Function χ musste nach (I. 3) die Gleichung

$$(fx.Fy+fy.Fx)\frac{\chi'(xy)}{\chi(xy)}=\frac{(f'y.Fx+F'y.fx)\varphi'y-(fy.Fx+Fy.f'x)\varphi'y}{x\varphi'x+y\varphi'y}$$

erfüllen. Durch Substitution der Werthe von F, f, φ' ergiebt sich hieraus, wenn der Kürze wegen $Fx=e^{r_x+s_x}$, $Fy=e^{r_y+s_y}$ u.s.w. und statt V, falls x die Variable ist V_x, falls y, V_y gesetzt wird, nach einigen Umformungen:

$$2(e^{r_x+r_y}-e^{s_x+s_y})\frac{\chi'(xy)}{\chi(xy)}=\frac{2\left\{\left(e^{r_x+r_y}\cdot\frac{\partial r_y}{\partial y}-e^{s_x+s_y}\cdot\frac{\partial s_y}{\partial y}\right)\cdot V_x-\left(e^{r_x+r_y}\cdot\frac{\partial r_x}{\partial x}-e^{s_x+s_y}\right)\cdot V_y\right\}}{xV_x-yV_y}$$

$$=\frac{2\left\{e^{r_x+r_y}\cdot\left(V_x\frac{\partial r_y}{\partial x}-V_y\cdot\frac{\partial r_x}{\partial x}\right)-e^{s_x+s_y}\cdot\left(V_x\cdot\frac{\partial s_y}{\partial y}-V_y\cdot\frac{\partial s_x}{\partial x}\right)\right\}}{xV_x-yV_y}.$$

Sowohl $V_x\cdot\frac{\partial r_y}{\partial y}-V_y\cdot\frac{\partial r_x}{\partial x}$, wie $V_x\cdot\frac{\partial s_y}{\partial y}-V_y\cdot\frac{\partial s_x}{\partial x}$, reducirt sich auf $c(y-x)V_xV_y$. Man erhält demnach, nach Aufhebung des gemeinschaftlichen Factors $e^{r_x+r_y}-e^{s_x+s_y}$:

$$(9.)\qquad \frac{\chi'(xy)}{\chi(xy)}=\frac{c(y-x)V_xV_y}{xV_x-yV_y}\quad\text{oder}\quad xy\frac{\chi'(xy)}{\chi(xy)}=\frac{c(y-x)}{\frac{1}{yV_y}-\frac{1}{xV_x}}.$$

In (I, 16_a) ist angegeben worden, welche Functionen der Gleichung $\frac{\lambda y-\lambda x}{\tau y-\tau x}=\varpi(xy)$ genügen können. Offenbar kann nur die unter (2) angegebene Form hier gelten; denn λ_x ist hier $cx+a_0$; was man erhält wenn $c=a_1$, $a_2=0$, $u=1$ gesetzt wird.

τx wird also $g_0+g_1x+g_2\cdot\frac{1}{x}$ sein.

Von den Constanten g_0, g_1, g_2 dürfen g_1 und g_2 nicht zugleich Null werden. Es folgt also:

$$\frac{1}{xV_x}=g_0+g_1x+g_2\cdot\frac{1}{x},\quad V=\frac{1}{g_2+g_0x+g_1x^2}.$$

Hieraus sieht man, dass die Function V nicht, wie es zu Anfang schien, willkürlich ist. Es ergiebt sich nun weiter:

$$r_x=\int\frac{b+cx+1}{g_2+g_0x+g_1x^2}\partial x;\quad s_x=\int\frac{b+cx-1}{g_2+g_0x+g_1x^2}\partial x,\quad \frac{\chi' z}{\chi z}=-\frac{c\partial z}{g_2-g_1z},$$

$$(10.)\quad \varphi x=-\frac{ac\gamma}{\gamma'}\int V\partial x=-\frac{ac\gamma}{\gamma'}\int\frac{\partial x}{g_2+g_0x+g_1x^2}.$$

Zur Bestimmung der Function ψ setze man in der ursprünglichen Bedingungsgleichung $\varphi x+\varphi y=\psi.\left(\frac{fx.Fy+fy.Fx}{\chi(xy)}\right)$ $y=0$, so wird

$$(11.)\qquad \varphi x+\varphi 0=\psi.\left(\frac{\alpha Fx+\beta fx}{\gamma}\right).$$

Hieraus sieht man dass ψ dieselbe Function sein wird, wie φ, vermehrt um eine Constante. Wäre $\varphi(0)$ unendlich, so wende man das Verfahren an, welches in (I, 20a) angegeben ist. Um aber die Form zu finden, in welcher der Ausdruck $\frac{Fx.fy+Fy.fx}{\chi(xy)}$ in der Function χ erscheinen würde, müsste man aus der Gleichung

$$z=\frac{\alpha Fx+\beta fx}{\gamma}$$

x als Function von z suchen; dann hätte man

$$\psi z=\varphi x+\varphi 0.$$

Diese Gleichung wird sich aber nur in besondern Fällen auflösen lassen.

Wir wollen nun die unter (10) angedeuteten Integrationen ausführen. Es sei zur Abkürzung $n=\frac{g_0+\sqrt{(g_0^2-4g_1g_2)}}{2g_2}$, $n_1=\frac{g_0-\sqrt{(g_0^2-4g_1g_2}}{2g_2}$,

$$\frac{1}{g^2}\int\frac{b+cx+1}{(1+nx)(1+n_1x)}\partial x=-\frac{(b+1)n-c}{g_2(n_1-n)n}\log(1+nx)+\frac{(b+1)n_1-c}{g_2(n_1-n)n_1}\log(1+n_1x)+\log k,$$

$$\frac{1}{g^2}\int\frac{b+cx-1}{(1+nx)(1+n_1x)}\partial x=-\frac{(b-1)n-c}{g_2(n_1-n)n}\log(1+nx)+\frac{(b-1)n_1-c}{g_2(n_1-n)n_1}\log(1+n_1x)+\log k_1,$$

k und k_1 sind willkührliche Constanten, folglich ist

$$(12.)\quad 1.\quad fx = k(1+nx)^{-\frac{(b+1)n-c}{g_2(n_,-n)n}}(1+n_,x)^{-\frac{(b+1)n_,-c}{g_2(n_,-n)n_,}} - k_,(1+nx)^{-\frac{(b-1)n-c}{g_2(n_,-n)n}}(1+n_,x)^{-\frac{(b-1)n_,-c}{g_2(n_,-n)n_,}},$$

$$2.\quad Fx = k(1+nx)^{-\frac{(b+1)n-c}{g_2(n_,-n)n}}(1+n_,x)^{-\frac{(b+1)n_,-c}{g_2(n_,-n)n_,}} + k_,(1+nx)^{-\frac{(b-1)n-c}{g_2(n_,-n)n}}(1+n_,x)^{-\frac{(b-1)n_,-c}{g_2(n_,-n)n_,}},$$

$$3.\quad \varphi x = -\frac{ac\gamma}{g_2\gamma'}\int\frac{\partial x}{(1+nx)(1+n_,x)} = \frac{ac\gamma}{g_2\gamma'(n_,-n)}\log\frac{1+nx}{1+n_,x},$$

$$4.\quad \chi(xy) = C(g_2 - g_1 xy)^{\frac{c}{g_1}},$$

$$5.\quad \psi z = \varphi x + \varphi 0, \text{ wo für } x \text{ eine Wurzel der Gleichung}$$

$$\gamma z = \alpha Fx + \beta fx$$

gesetzt wird.

Beispiel. Es sei $V = \frac{1}{(b+cx)^2-1}$, dann wird:

$$\int(b+cx+1)V\partial x = \int\frac{\partial x}{b+cx-1} = \frac{1}{c}\cdot\log k(b+cx+1),$$

$$\int(b+cx-1)V\partial x = \int\frac{\partial x}{b+cx+1} = \frac{1}{c}\cdot\log k_,(b+cx+1);$$

wo k und $k_,$ willkührliche Constanten sind; und

$$fx = [k(b+cx-1)]^{\frac{1}{c}} - [k_,(b+cx+1)]^{\frac{1}{c}},$$

$$Fx = [k(b+cx-1)]^{\frac{1}{c}} + [k'(b+cx+1)]^{\frac{1}{c}}.$$

Nur für spezielle Werthe von c wird sich die Gleichung $\alpha Fx + \beta fx = z$ auflösen lassen. Man setze daher den einfachsten Fall $c = 1$; In diesem Fall ist:

$$fx = (k-k_,)(b+x) - k - k_,, \quad Fx = (k+k_,)(b+x) - k + k_,.$$

Da aber $f(0) = \alpha$, $f'(0) = \alpha'$, $F(0) = \beta$, $F'(0) = \beta$ ist, so finden folgende Gleichungen Statt:

$$\alpha = (k-k_,)b - k - k_,, \quad \beta = (k+k_,)b - k + k_,, \text{ mithin } k = \frac{\alpha+\beta}{2(b+1)}, \quad k_, = \frac{\beta-\alpha}{2(b+1)}.$$

Da $b = \frac{\alpha\alpha'-\beta\beta'}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}$ ist (2), so folgt $k = \frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta'}{2(\alpha'-\beta')}$, $k_, = -\frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta}{2(\alpha'+\beta')}$

$$(13.)\quad k - k_, = \frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta}{\alpha'^2-\beta'^2}\alpha', \quad k + k' = \frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta}{\alpha'^2-\beta'^2}\beta'.$$

Da ferner

$k-k_{\prime}=f'(0)=\alpha^{\gamma}$ und $k+k'=F'(0)=\beta'$ ist, so muss $\frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta}{\alpha'^2-\beta'^2}=1$ sein. Damit muss $e=1=\frac{(\beta^2-\alpha^2)\gamma'}{(\alpha\beta'-\alpha\beta)\gamma}$ verbunden werden. Die Functionen fx und Fx nehmen also die Gestalt

$$fx=\alpha+\alpha^{\gamma}x,\quad Fx=\beta+\beta' x,\quad \varphi x=\frac{\alpha\gamma}{2\gamma'}\log\frac{b+x+1}{b+x-1}\text{ oder}$$

$$\varphi x=\tfrac{1}{2}a\cdot\frac{\gamma}{\gamma'}\log\frac{(\alpha-\beta)(\alpha'+\beta')+x(\alpha\beta'-\alpha'\beta)}{(\alpha+\beta)(\alpha'-\beta')+x(\alpha\beta'-\alpha'\beta)}$$

an. Für die Function χ findet sich nach (12, 4):

$$\chi(xy)=C(b^2-1-xy)=C\left\{\left(\frac{\alpha\alpha'-\beta\beta'}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}\right)^2-1-xy\right\}.$$

Berücksichtigt man, dass $\alpha\beta'-\alpha'\beta=\alpha'^2-\beta'^2$ ist, so erhält man:

$$\chi(xy)=C\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha'^2-\beta'^2}-xy\right),\quad \chi(0)=\gamma,\text{ also }\chi(xy)=\gamma-\gamma\cdot\frac{\alpha'^2-\beta'^2}{\alpha^2-\beta^2}xy\,.$$

Es soll aber $\chi'(0)=\gamma_{\prime}$ sein; deshalb müsste $\frac{\gamma'}{\gamma}=\frac{\alpha'^2-\beta'^2}{\beta^2-\alpha^2}$ werden; was mit der Gleichung in (13) übereinstimmt. Man kann also

$$\chi(xy)=\gamma+\gamma' xy$$

schreiben. Um ψ zu finden musste man die Gleichung

$$\alpha Fx+\beta fy=\gamma z$$

auflösen. In diesem Falle also war: $2\alpha\beta+(\alpha\beta'+\alpha'\beta)x=\gamma z$, $x=\frac{\gamma z-2\alpha\beta}{\alpha\beta'+\alpha'\beta}$, folglich:

$$\psi(z)=\varphi x+\varphi 0=\tfrac{1}{2}a.\frac{\gamma}{\gamma'}\log\frac{\left\{(\alpha-\beta)(\alpha'+\beta')+(\gamma z-2\alpha\beta)\frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta}{\alpha\beta'+\alpha'\beta}\right\}(\alpha-\beta)(\alpha'+\beta')}{\left\{(\alpha+\beta)(\alpha'-\beta')+(\gamma z-2\alpha\beta)\frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta}{\alpha\beta'+\alpha'\beta}\right\}(\alpha+\beta)(\alpha'-\beta')}.$$

Löset man hier die Klammern auf und wendet die Formeln an, welche zwischen den Constanten bestehen, so wird im Zähler und Nenner der gemeinschaftliche Factor $\alpha\beta'-\alpha'\beta$ vorkommen, nach dessen Weglassung man

$$\psi(z)=\tfrac{1}{2}a\cdot\frac{\gamma}{\gamma'}\log\frac{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha'+\beta')^2+(\alpha-\beta)(\alpha'+\beta')\gamma z}{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha'-\beta')^2+(\alpha+\beta)(\alpha'-\beta')\gamma z}$$

erhält. Nach einigen Umformungen ergiebt sich:

$$\psi\left(\frac{fx.Fy+fy.Fx}{\chi(xy)}\right)=\psi\left(\frac{2\alpha\beta+2\alpha'\beta'.xy+(\alpha\beta'+\alpha'\beta)(x+y)}{\gamma+\gamma' xy}\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}a\cdot\frac{\gamma}{\gamma'}\log\frac{(\alpha-\beta)^2(\alpha'+\beta')^2+(\alpha-\beta)(\alpha'+\beta')(\alpha\beta'-\alpha'\beta)(x+y)+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2xy}{(\alpha+\beta)^2(\alpha'-\beta')^2+(\alpha+\beta)(\alpha'-\beta')(\alpha\beta'-\alpha'\beta)(x+y)+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2xy}.$$

Da nun $\varphi x+\varphi y=\psi\left(\frac{fx.Fy+fy.Fx}{\chi(xy)}\right)$ sein soll, so muss der obige Ausdruck folgender Summe gleich sein:

$$\tfrac{1}{2}a\frac{\gamma}{\gamma'}\left(\log\frac{(\alpha-\beta)(\alpha'+\beta')+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)x}{(\alpha+\beta)(\alpha'-\beta')+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)x}+\log\frac{(\alpha-\beta)(\alpha'+\beta')+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)y}{(\alpha+\beta)(\alpha'-\beta')+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)y}\right);$$

welche Gleichung, wie man sieht, *identisch* erfüllt wird.

Die Formeln (12) für fx und Fx geben kein bestimmtes Resultat, wenn g_0 und $g_1=0$ sind. Denn alsdann ist

$$r_x=\int\frac{b+cx+1}{g_2}\,\partial x=\frac{1}{g_2}[(b+1)x+\tfrac{1}{2}cx^2]+\log k,$$

$$s_x=\int\frac{b+cx-1}{g_2}\,\partial x=\frac{1}{g_2}[(b-1)x+\tfrac{1}{2}cx^2]+\log k_1,$$

$$fx=ke^{\frac{1}{g_2}[(b+1)x+\frac{1}{2}cx^2]}-k_1e^{\frac{1}{g_2}[(b-1)x+\frac{1}{2}cx^2]},$$

$$Fx=ke^{\frac{1}{g_2}[(b+1)x+\frac{1}{2}cx^2]}+k_1e^{\frac{1}{g_2}[(b-1)x+\frac{1}{2}cx^2]},$$

$$\varphi x=C-\frac{ac\gamma}{g_2\gamma'}x\;,\;\frac{\chi'z}{\chi z}=-\frac{c\,\partial z}{g_2}=\log C_1-\frac{c}{g_2}z\;,\;\chi(xy)=C_1e^{-\frac{c}{g_2}xy};$$

also:

$$(14.)\qquad 2C-\frac{acg}{g_2\gamma'}(x+y)=\psi\left(\frac{fx.Fx+fy.Fx}{\chi(xy)}\right)$$
$$=\psi\left[\frac{2}{C_1}\left(k^2e^{\frac{1}{g_2}[(b+1)x+y+\frac{1}{2}c(xy)]}-k_1^2e^{\frac{1}{g_2}[(b-x)(x+y)+\frac{1}{2}c(x+y)^2]}\right)\right].$$

Um die Form zu finden, in welcher die Veränderliche in der Function ψ enthalten ist, müsste man immer eine transcendente Gleichung auflösen; ausser in dem Falle wenn $k_1=0$ ist. In diesem Fall erhält man aus (14), wen $y=0$ angenommen wird:

$$2C_1-\frac{ac\gamma}{g_2\gamma'}x=\psi\left(\frac{2}{C_1}k^2e^{\frac{1}{g_2}(b+1)x+\frac{1}{2}cx^2}\right).$$

Daraus ergiebt sich:

$$\psi(z)=2C+\frac{ac\gamma(b+1)}{2\gamma'g_2}-\frac{ac\gamma}{g_2\gamma'}\cdot\sqrt{\left[\frac{1}{4g_2^2}(b+1)+\frac{2}{C}\left(\log z-\log\frac{2k_1^2}{C_1}\right)\right]}.$$

Setzt man die Rechnung weiter fort, so kommt man wieder auf eine identische Gleichung.

Die Gleichung (II. 3) von der wir ausgingen, hat, wie schon bemerkt, auch die Lösung $u_1=v$, $fx=Fx$. Nach den Formeln (12) kann fx nur gleich Fx sein, wenn $k_1=0$ ist. Man erhält deshalb als Auflösung der Gleichung:

$$\varphi x+\varphi y=\psi\frac{2Fx.Fy}{\chi(xy)}\Big),$$

$$Fx=fx=k(1+nx)^{-\frac{(b+1)n-c}{c_2(n_1-n)n}}.(1+n_1x)^{\frac{(b+1)n_1-c}{c_2(n_1-n)n_1}},$$

$$\varphi x=\frac{ac\gamma}{g_2\gamma'(n_1-n)}\log\frac{1+nx}{1+n_1x}\;,\quad \chi(xy)=C(g_2-g_1.xy)^{\frac{c}{c_1}}.$$

Um auch von diesen Formeln eine Anwendung zu geben, sei $n=\sqrt{-1}$, $n_1=-\sqrt{-1}$. Daraus folgt $g_0=0$, $\frac{g_1}{g_2}=1$. Es sei ferner

$g_1=g_2=1$, $\frac{ac\gamma}{g_2\gamma'}=-1$, $b=-1$, $C=1$, $k=1$, so erhält man:

$\varphi(x)=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{1+\sqrt{-1}.x}{1-\sqrt{-1}.x}=\text{arctang.}\,x$, $Fx=(1+x^2)^{\frac{1}{2}c}$, $\chi(xy)=(1-xy)^c$

$$\text{arctang.}\,x+\text{arctang.}\,y=\psi\left(\frac{2\{(1+x^2)(1+y^2)\}^{\frac{1}{2}c}}{(1-xy)^c}\right).$$

Für $y=0$ folgt daraus: $\text{arctang}\,x=\psi[2(1+x^2)^{\frac{1}{2}c}]$. Ist nun $2(1+x^2)^{\frac{1}{2}c}=z$, so findet sich hieraus $x=\sqrt{\left(z^{\frac{2}{c}}-1\right)}$, folglich $\psi z=\text{arctang.}\sqrt{\left(z^{\frac{2}{c}}-1\right)}$,

$$\psi\left(\frac{2Fx.Fy}{(\chi xy)}\right)=\text{arctang.}\sqrt{\left(\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1-xy)^2}-1\right)}=\text{arctang.}\frac{x+y}{1-xy};$$

mithin gelangt man auf diese Weise zu der bekannten Formel der Trigonometrie:

$$\text{arctang.}\,x+\text{arctang.}\,y=\text{arctang.}\frac{x+y}{1-xy}.$$

Berlin, im August 1850.

Druck von J. Petsch in Berlin.

Druckfehler im 46. Bande.

Seite 52 Z. 7 v. u. st. MK^2 z. s. Mk^2
» 53 » 15 v. o. » gilt » giebt
» 56 » 6 » » vor » von
» 6 v. u. » es » er
» 5 » » Oberflächen der » Oberflächen, der
» 3 » » Umfanges » Rad-Umfanges
» 57 » 2 v. o. » Masse » Massen
» 58 » 10 v. u. » $\frac{du}{dt}\cdot\frac{r^2+k^2}{r}$ » $\frac{du}{dt}=\frac{r^2+k^2}{r}$
» 59 » 12 » » $E\left(G+\varphi-\frac{\varphi\varrho}{r}\sqrt{(1+G^2)}=2P\sin\alpha\right.$
z. s. $2E\left(G+\varphi-\frac{\varphi\varrho}{r}\sqrt{(1+G^2)}\right)=2Q\sin\alpha$
» 61 » 5 v. u. st. $\mu n\cos\mu$ z. s. $\mu n\cos\beta$
» $\frac{i(\cos\beta+\mu\sin\beta)+\mu n\cos\beta}{m(\cos\beta+\mu\sin\beta)+\mu n\cos\beta}$
z. s. $\frac{i(\cos\beta+\mu\sin\beta)+\mu n\cos\beta}{m(\cos\beta+\mu\sin\beta)+\mu n\cos\beta}P$
» 4 » » $\cos+$ z. s. $\cos\beta+$
» 1 » » $\varphi-\beta$ » $\varphi-\mu$
» 63 » 12 v. o. » 1) und 5) » 2) und 5)
» 6 v. u. » $\beta\sin\beta$ » $\mu\sin\beta$
» 64 » 2 v. o. » $-r$ » -1
» 12 » » $-\frac{2Q}{\mathfrak{N}}$ » $1-\frac{2Q}{\mathfrak{N}}$
» 6 v. u. » $\frac{dH}{dH}$ » $\frac{dH}{dK}$
» 4 » » $\frac{dH}{dH}$ » $\frac{dX}{dK}$
» 3 » » $\cos\alpha+\mu\sin\alpha$ » $\sin\alpha+\mu\cos\alpha$
» 2 » » $1+\varphi\mu)$ » $(1+\varphi\mu)$
» 66 » 8 v. o. » das Vorzeichen » dasselbe
» 67 » 7 v. u. » $(a-b+n\sin\alpha)$ » $(a-b+n\sin\alpha)P$
» 6 » » $\cos\alpha$ » $\cos\beta$
» 5 » » $\cos\beta\cos\alpha$ » $n\cos\beta\cos\alpha$
» 71 » 4 v. o. » $1+\varphi G$ » $1-\varphi G$
» 14 v. u. » $[r(a+n\sin\alpha)\cos\beta+\mu[r\cos(\alpha+\beta)]$
z. s. $[(a+n\sin\alpha)\cos\beta+\mu r\cos(\alpha+\beta)]$

Seite 72 Z. 15 v. u. st. $(aK\cos\beta)$ z. s. $[aK\cos\beta$
» 14 » » $\times[(a$ » $\times((a$
» 7 » » $r(f-\mu)$ » $r((f-\mu)$
» 73 » 2 v. o. » $\sin\alpha]$, $\sin\alpha])$
» 6 » » der Zugkraft K (§. 22)
z. s. (§. 22) der Zugkraft K
» 75 » 4 » » $-[\alpha$ z. s. $-[a$
» 78 » 12 » » $(P+2Q+)$ » $(P+2Q)$
» 80 » 6 » » $e(\cos\alpha$ » $(e\cos\alpha$
» 7 v. u. » $\beta_,$ » $\mu_,$
» 5 » » G_2 » $G_,$
» 81 » 5 v. o. » k » n
» 14 » » $c\cos\beta$ » $e(\cos\beta$
» $B\cos\beta$ » $B(\cos\beta$
» 82 » 6 » » Wurzelgrösse » Wurzelgrösse $\sqrt{(1+\varphi^2)}$ durch
» 83 » 4 » » $\cos\beta$ » $n\cos\beta$
» 84 » 3 » » μC » $\mu_, C$
» 6 » » $2Q\sin\alpha$ » $2Q\sin\alpha]$
» 85 » 10 » » r_2 » r_1
» 164 » 7 » » $f_, < \frac{R}{N}$ und $f_, =$ » $f < \frac{R}{N}$ und $f_, <$
» 15 » » $+r_,$ » $-r_,$
» 6 v. u. » $N2$, » $2N$,
» 3 » » neuen » neun
» 165 » 8 » » $f_,\cos\alpha$ » $f_,\cos\alpha)$
» 6 » » $f\cos\alpha$ » $f\cos\alpha$
» 166 » 6 v. o. » $[f(n\cos\beta$ » $[f_,(n\cos\beta$
» 8 » » $(f-\mu_,)r_,$ » $(f_,-\mu_,)r_,$
» 5 v. u. » $\frac{2Q_,}{\mathfrak{N}}\sin\alpha$ » $\frac{2Q_,}{\mathfrak{N}}(\sin\alpha$
» 167 » 2 v. o. » $(n\cos\beta+(f-\mu)r\sin\beta)]$
z. s. $](n\cos\beta+(f-\mu)r\sin\beta)$
» 9 v. u. » $fC-f$ z. s. $f_,C-f$
» 8 » » $f\sin\beta$ » $f_,\sin\beta$
» 7 » » $(P+2Q_,)(\sin\alpha+f\cos\alpha)$
z. s. $(P+2Q_,)(\sin\alpha+f_,\cos\alpha)$
» 6 » » $-f(hP$ z. s. $-f_,(hP$

Seite 168 Z. 2 v. o. st. $f r,$ z. s. $f r$
» 9 » » $[e$ » $[(e$
» 12 v. u. » $\mathfrak{A}$ » $\mathfrak{A},$
» 11 » » $K\cos + f, P\cos\alpha$ » $K\cos\alpha + f, P\cos\alpha$
» 10 » » $f\cos\alpha$ » $f, \cos\alpha$
» 172 » 3 v. o. » N_2 » N_1
» 173 » 11 » » dieses auf » dieses aus
» 174 » 10 v. u. » $\tau,$ » $\varrho,$
» 8 » » $E, = \frac{Y, -\varphi, Z,}{Z, +\varphi, Y,}$ » $G, = \frac{Y, -\varphi, Z,}{Z, +\varphi, Y,}$
» 175 » 6 v. o. » $a\sin\alpha$ » $a, \sin\alpha$
» 8 » » $\mu\sin\beta,$ » $\mu, \sin\beta,$
» 9 » » $\mu\cos\alpha$ » $\mu, \cos\alpha$
» 10 » » $r,$ » $n,$
» 12 v. u. » $- r\sin\alpha$ » $+ r\sin\alpha$
» 176 » 8 u. 14 v. o. st. Q » $Q,$
» 12 v. o. st. $-a, (P,$ » $a, (P,$
» 15 » » $n, P,$ » $\mu, P,$
» 11 v. u. » $2sQ,$ » $2s, Q,$
» 8 » » $(K\cos\beta$ » $(K(\cos\beta$
» 177 » 5 v. o. » $\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ » $(\sin\alpha + \mu\cos\mu)$
» 11 » » $\frac{s}{s}$ » $\frac{s}{r}$
» 14 » » $(r\cos\beta$ » $r(\cos\beta$
» 178 » 6 » » $\sin\beta, K$ » $\sin\beta, K,$
» 15 v. u. » $(B,$ » $B,$
» 14 » » $[\mu, \cos\alpha($ » $\mu, \cos\alpha[$
» 9 u. 10 v. u. st. dieser Umstand ..... Einfluss
z. s. der Umstand, wenn die Achsen an den Rädern fest sind, nur auf die beiden letzteren Ausdrücke Einfluss,
» 179 » 1 v. o. st. man » dann
» 11 » » p durch p' » P durch P'
» 6 v. u. » hP'' » $h'P'$
» $e\sin\beta =$ » $e\sin\beta -$
» 5 » » $e\tang\beta,$ » $e\tang\beta,$
» 180 » 2 v. o. » Grössen » gegebenen Grössen
» 181 » 7 v. u. » e » $e\cos\alpha$
» 182 » 9 v. o. » Q » $Q,$
» 183 » 2 u. 6 v. o. st Q » $Q,$
» 2 v. o. st. $\cos(\alpha + \beta)$ » $\cos(\alpha + \beta,)$
» 3 » » und wenn » wenn
» 5 » » $n, \cos\beta$ » $n,, \cos\beta$
» 7 » » $n, \cos\beta,]\cos(\alpha \pm \beta,)$ » $n, \cos\beta, \cos(\alpha \pm \beta)]$
» 10 v. u. » $\cos(\alpha + \beta)$ » $\cos(\alpha + \beta,)$

Seite 184 Z. 8 v. o. st. $\cos(\alpha - \beta,)$ z. s. $\cos(\alpha + \beta,)$
» 12 » » $+ (a, \sin\beta,$ » $+ (a, \sin\beta$
» 15 » » Q » $Q,$
» 2 v. u. » $]2Q)$ » $)2Q]$
» 1 » » $]2Q,$ » $)2Q,]$
» 185 » 8 v. o. » $\eta\eta K$ » $\eta\eta, K$
» 9 » » $(f + \mu)$ » $(f - \mu)$
» 15 v. u. » $a, \sin\beta, K$ » $a, \sin\beta K$
» 13 » » f, r » $f, r,$
» 186 » 2 » » s » $s,$
» 187 » 11 » » $\left(P + 4\frac{s}{r}Q\right)(\cos\beta + \mu\sin\beta)$
z. s. $\left(P + 4\frac{s}{r}Q\right)(\cos\beta + \mu, \sin\beta)$
» 11 v. u » $P, +4Q$ z. s. $P, +4Q,$
» 5 » » $\mu, \sin\beta,$ » $\mu,, \sin\beta,$
» $\frac{s,}{r,}Q$ » $4\frac{s,,}{r,,}Q,,$
» 188 » 1 v. o. » $4\frac{s,}{r,}Q + 4\frac{s,}{r,}Q,$ z. s. $4\frac{s,}{r,}Q,$
» 234 » 9—7 v. u. st. fällt) der der umdrehenden ..... entgegengesetzt ist,
z. s. fällt und der Richtung der umdrehenden ..... entgegengesetzt ist,)
» 238 » 4 u. 21 v. o. st. $\mu,$ z. s. $n,$ (drei Mal)
» 241 » 13 v. o. st. $T. F_1\theta +$ » $T. F_2\theta +$
» 16 » » R » $R,$
» 16 u. 15 v. u. st. und während .... zugleich, um
z. s. während ..... um zugleich
» 242 » 4 v. o. st. so dass die z. s. die
» 7 » » $\frac{F_2}{E}$ » $\frac{F_2}{E_2}$
» 244 » 5 » » $V,$ » K
» 6 v. u. » $P, 4Q,$ » $P, +4Q,$
» 245 » 5 » » $\sin\alpha . \cos\beta$ » $\sin\alpha + K\cos\beta$
» 246 » 9 » » $F\theta +$ » $F_2\theta +$
» 247 » 6 » » $\theta + 2\pi$ » $\theta + 2\pi\varepsilon$
249 Z. 1 v. o. st. $\frac{\cos\beta + \mu\sin\beta}{\cos\beta + \mu\sin\beta}$ z. s. $\frac{\cos\beta + \mu, \sin\beta}{\cos\beta + \mu\sin\beta}$
» 4 » » $\mu,$ » $n,$ (zwei Mal)
» 10 u. 5 v. u. st. $\cos\beta + \mu\sin\beta)$ » $(\cos\beta + \mu\sin\beta)$
» 5 v. u. st. v_2 » $v,$
» 1 » » $r,$ » $v,$
» 250 » 4 v. o. » $\frac{2(N + N,)}{4R,}$ » $\frac{4R,}{2(N + N,)}$
» 8 » » $\mathfrak{R}[2N + 2N,]$ » $\mathfrak{R}[2N + 2N,]^2$

Seite	Zeile	statt	zu setzen
Seit. 250	Z. 7 v. u. st.	$\frac{\partial[R_\varphi]}{\partial\alpha} = [2N + 2N_,]^2$	z. s. $\frac{\partial[R_\varphi]}{\partial\alpha}[2N + 2N_,]^2$
„	4 „ „	$(2N + 2N_,)$	z. s. $[2N + 2N_,]$
„	3 „ „	(P)	„ $\{P\}$
„ 251	„ 12 „ „	$\mu \sin\beta$	„ $\mu \sin\beta)$
„	9 „ „	Reibungswinkel	„ Neigungswinkel
„	2 „ „	Q	„ $Q_,$
„ 252	„ 3 v. o. „	$\frac{I + \mu\mathfrak{L}}{\mathfrak{R}} \pm$	„ $\frac{I + \mu_,\mathfrak{L}}{\mathfrak{R}} =$
„	4 „ „	Q	„ $Q_,$
„	9 „ „	$\frac{4Q}{\mathfrak{R}}$	„ $\frac{4Q_,}{\mathfrak{J}}$
„ 253	„ 5 „ „	α	„ $\alpha_,$
„ 254	„ 11 v. u. „	$\mu \cos\beta$	„ $\mu \sin\beta$
„	10 „ „	$\frac{\mathfrak{R} - \mathfrak{J}}{\mathfrak{R}}$	„ $\frac{\mathfrak{R} - \mathfrak{J}}{\mathfrak{R}}$
„	8 „ „	V_2	„ V_0
„ 257	„ 6 v. o „	R	„ $R_,$
„	12 „ „	N_3	„ $N_,$
„ 258	„ 2 „ „	$P + 4Q_,$	„ $P_, + 4Q_,$
„	4 „ „	$+ f \sin\beta$	„ $- f \sin\beta$
„	9 v. u. „	$+ f_,. F\theta +$	„ $f.F_,\theta +$
„ 259	„ 4 „ „	$\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{L}}$	„ $\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{R}}$
„ 260	„ 15 v. o. „	F	„ T
„ 330	„ 7 „ „	$4Q_{,,}$	„ $2Q_{,,}$
„	10 „ „	$4Q_{,,}$	„ $Q_{,,}$
„	16 „ „	$\varphi_,$	„ $\varphi_{,,}$
„ 331	„ 2 „ „	(T)	„ (J)
„	13 „ „	$(\alpha - \lambda\alpha)T.F_,\theta +$	„ $(\alpha - \lambda\alpha T.F_,\theta +] -$
„	14 „ „	$(K \cos\beta$	„ $(K(\cos\beta$
	„	$\mu_{,,}F\theta +)]$	„ $\mu_{,,}F_,\theta +))$
„	15 „ „	$4Q_,\sin\alpha] - 4\frac{s_,}{r_,}$	„ $4Q_,\sin\alpha]] - 4\frac{s_,}{r_,}Q_,$
„	16 „ „	$K]$	„ $K]]$
„	4 v. u. „	$\left(P_, + 4\frac{s_,}{r_,}Q_,\right)[\mu_,$	„ $\left(P_, + 4\frac{s_,}{r_,}Q_,\right)[\mu_{,,}$
„	1 „ „	$hP.$	„ $(hP_,$
„ 332	„ 4 „ „	$2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q$	„ $2\frac{s_{,,}}{r_{,,}}Q_{,,}$
„	3 „ „	$\frac{s}{s}$	„ $\frac{s}{r}$
„ 333	„ 6 „ „	$F\theta + - 4Q_,\sin\alpha)$	„ $F\theta +) - 4Q_,\sin\alpha]$
„	5 „ „	$((\alpha_,$	„ $[(\alpha_,$
„	4 „ „	C	„ $C +$
S. 334	Z. 12 v. u. st.	$C)$	z. s. $C]$
„	11 „ „	$S]$	„ S
„	10 „ „	$\mu_, + F_,\theta +$	„ $+ \mu_, F_,\theta +$
„	9 „ „	K	„ μ in K
„	8 „ „	$(\sin\alpha)$	„ $\sin\alpha)$
„ 335	„ 3 v. o. „	und wenn	„ wenn
„ 336	„ 10 u. 14 v. o. st.	$\alpha - \lambda\alpha$	„ $\alpha_, - \lambda\alpha$
„ 337	„ 11 v. o. „	$(\mu_, - \mu_{,,})$	„ $+ (\mu_, - \mu_{,,})$
„	17 „ „	$\frac{2V_,}{\mathfrak{R}}$	„ $\frac{2v_,}{\mathfrak{R}}$
„	1 v. u. „	$\cos\mu$	„ $\cos\beta$
„ 338	„ 3 v. o. „	$2s_{,,}Q_{,,}$	„ $2s_{,,}Q_{,,})$
„	4 „ „	$- \cos\alpha$	„ $\cos\alpha -$
„	5 „ „	$\mu \sin\beta)$	„ $\mu \sin\beta))$
„	11 v. u. „	$\frac{2(N + N_,)}{4R_,}$	„ $\frac{4R_,}{2(N + N')}$
„ 339	„ 8 v. o. „	sind	„ ist
„	4 v. u. „	$\sin\alpha$	„ $\sin\beta$
„ 340	„ 1 v. o. „	$+ \mu$	„ $- \mu$
„	4 „ „	$(P$	„ $(P_,$
„	2 v. u. „	wegfällt, der Winkel ..... sein,	z. s. wegfällt,) der Winkel..... sein,
„ 341	„ 4 v. o. „	hP	z. s. $hP_,$
„	6 „ „	$(P_,$	„ $+ (P_,$
„	4 u. 14 v. o. st.	$4Q$	„ $4Q_,$
„	1 v. u. st.	$\frac{\mu_{,,}4Q_,}{\mathfrak{R}}$	„ $\frac{\mu_,4Q_,}{\mathfrak{R}}$
	„	$\cos\beta + \mu \sin\beta$	„ $(\cos\beta + \mu \sin\beta)$
„ 342	„ 3 v. o „	sind	„ ist
„	6 „ „	$[4R]$	„ $[4R_,]$
„ 344	„ 6 „ „	$2V$	„ $2V_,$
„	17 „ „	$\alpha \cos\alpha$	„ $\alpha \cos\alpha$
„ 345	„ 5 v. u. „	$\frac{\cos\beta + \mu_{,,}\sin\beta}{\cos\beta + \mu_{,,}\sin\beta}$	„ $\frac{\cos\beta + \mu_{,,}\sin\beta}{\cos\beta + \mu \sin\beta}$
„ 346	„ 4 v. o. „	als wird er	„ als
„	7 v. u. „	$\mu_,\sin\beta$	„ $\mu \sin\beta$
„	6 „ „	R	„ $R_,$
„	5 „ „	$\alpha_, - \lambda\alpha$	„ $\alpha_, - \lambda\alpha$
„	4 „ „	$(P_,$	„ $+ (P_,$
„ 347	„ 14 „ „	α und α	„ α und $\alpha_,$
„	1 „ „	$4Q_, - \cos\alpha$	„ $4Q_,\cos\alpha$
„ 348	„ 4 v. o. „	E	„ $E_{,,}$
„	16 „ „	Q	„ $Q_,$
„	11 v. u. „	$\mu Z_{,,}$	„ $\mu_{,,} Z_{,,}$
„	2 „ „	$\lambda\alpha)$	„ $\lambda\alpha$

S. 349 Z. 1 v. o. st. $2\frac{s_{\prime\prime}}{r_{\prime\prime}}Q_{\prime}$ z. s. $2\frac{s_{\prime\prime}}{r_{\prime\prime}}Q_{\prime\prime}$

„ 6 „ „ $-\mu_{\prime\prime}$ „ $+\mu_{\prime\prime}$

„ 4 v. u. „ $4\frac{s_{\prime\prime}}{r_{\prime\prime}}Q$ „ $4\frac{s}{r}Q$

„ 350 „ 1 v. o. „ $\frac{s}{s}$ „ $\frac{s}{r}$

„ 2 „ „ |𝔓| „ |𝔓|[

„ $2s_{\prime\prime}Q_{\prime\prime})$ „ $2s_{\prime\prime}Q_{\prime\prime})]$

„ 3 „ „ $hP+4r_{\prime}Q_{\prime}+2s_{\prime}Q_{\prime}$ „ $hP_{\prime}+4r_{\prime}Q_{\prime}+2s_{\prime\prime}Q_{\prime\prime}$

„ 7 „ „ $hP+4r_{\prime}Q_{\prime}+2r_{\prime\prime}Q_{\prime\prime}$ „ $hP_{\prime}+4r_{\prime}Q_{\prime}+2s_{\prime\prime}Q_{\prime\prime}$

„ 10 „ „ $\mu_{\prime}r)(\cos\beta+\mu\sin\beta)$
z. s. $\mu_{\prime}r_{\prime})(\cos\beta+\mu_{\prime\prime}\sin\beta)$

„ $a\sin\beta$ z. s. $a_{\prime}\sin\beta$

„ 13 „ „ hP „ $hP_{\prime}$

„ 4 v. u. „ fr „ $fr_{\prime}$

„ 351 „ 1 v. o. „ $\mu\sin\beta$ „ $\mu_{\prime\prime}\sin\beta$

„ 5 „ „ $4Q\sin\alpha$ „ $4Q_{\prime}\cos\alpha$

„ 351 „ 9 v. o. st. $\frac{s_{\prime\prime}}{r_{\prime\prime}}.Q_{\prime\prime}$ z. s. $2\frac{s_{\prime\prime}}{r_{\prime\prime}}Q_{\prime\prime}$

„ 12 „ „ $\mu-\mu_{\prime\prime}$ „ $\mu_{\prime}-\mu_{\prime\prime}$

„ 13 „ „ $2rV$ „ $2r_{\prime}V$

„ $\mu r_{\prime})4Q$ „ $\mu_{\prime}r_{\prime})4Q_{\prime}$

„ 4 v. u „ $f+\mu_{\prime}$ „ $f+\mu_{\prime\prime}$

„ 353 „ 2 v. o. „ U „ $U_{\prime}$

„ 16 „ „ R_{r} „ R_{q}

„ 14 „ „ T „ J

„ 356 „ 11 „ „ $T.F\theta+$ „ $T.F_{2}\theta$

S. 357 Z. 1 v. o. st. $2\int\limits_{2\pi\div 0} e^{2H\theta}\left(\frac{1}{r_{\prime}}F_{2}\theta+ +\mu_{\prime}F_{\prime}\theta\right)\partial\theta$

z. s. $2\int\limits_{2\pi\div 0} e^{2H\theta}\left(\frac{1}{r_{\prime}}F_{2}\theta+\mu_{\prime}F_{\prime}\theta\right)\partial\theta$

„ 10 v. u. st. $T\frac{b}{r_{\prime}}$ z. s. $T\left(\frac{b}{r_{\prime}}\right.$

„ 358 „ 13 „ „ $e^{-H\theta}$ „ $e^{-2H\theta}$

„ 6 „ „ $\mu F_{\prime}\theta+$ „ $\mu_{\prime}F_{\prime}\theta+$ (zwei Mal)

„ 359 „ 6 v. o. „ $\frac{1}{s_{\prime}}$ „ $\frac{1}{r_{\prime}}$

„ 360 „ 5 „ „ $\sin\theta$ „ $\cos\theta$

„ 6 v. u. „ rnd für die „ die

„ 361 „ 2 v. o. „ für der „ das

„ 3 „ „ $\frac{2g}{w}$ „ $\frac{w}{2g}$

„ 3, 4 u. 6 v. o. st. ∂u „ $\partial u_{\prime}$

„ 362 „ 11 v. n. st. u „ $u_{\prime}$

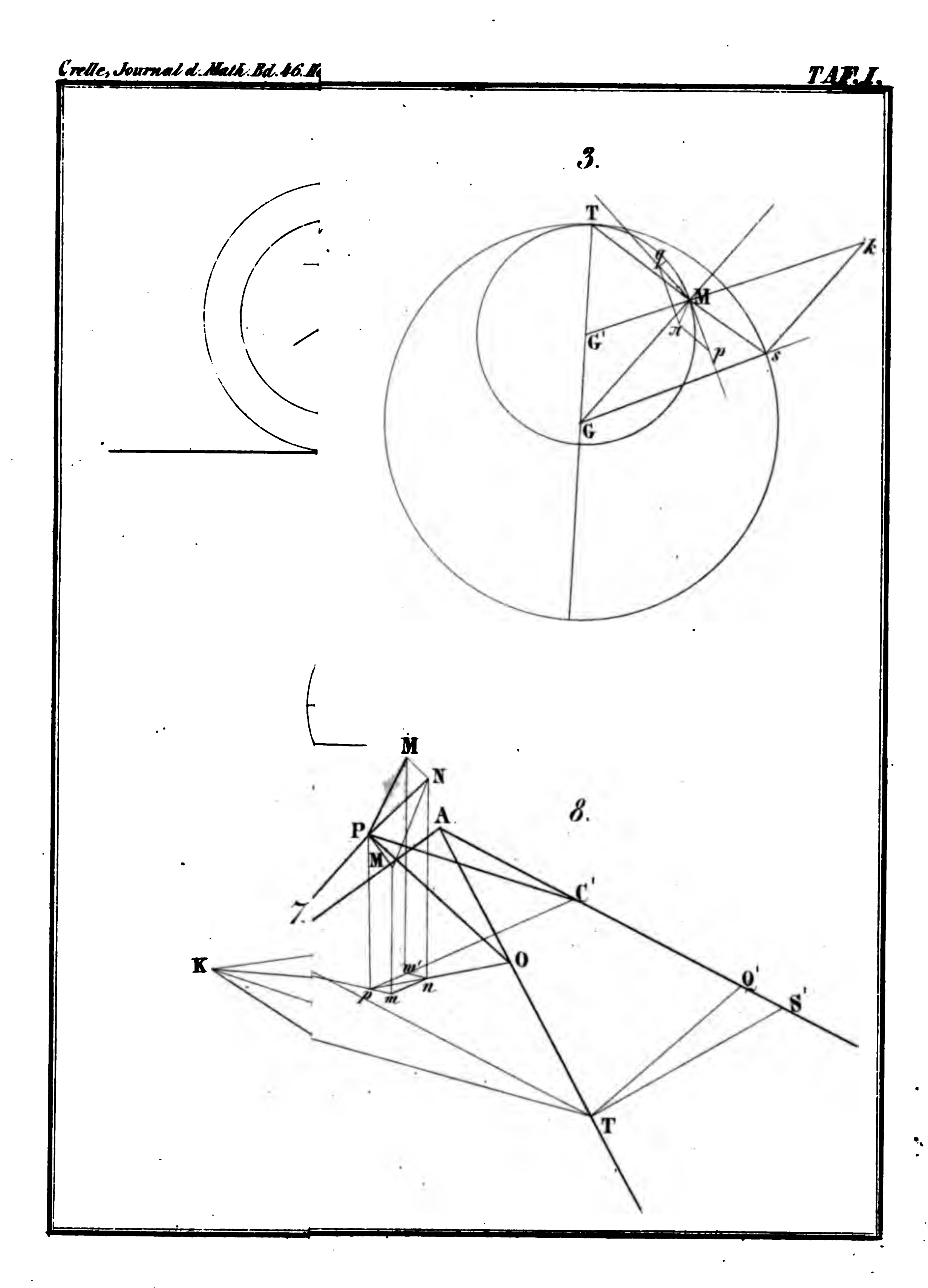
„ 364 „ 12 „ „ $\mu_{\prime}F\theta+$ „ $\mu_{\prime}F_{\prime}\theta+$

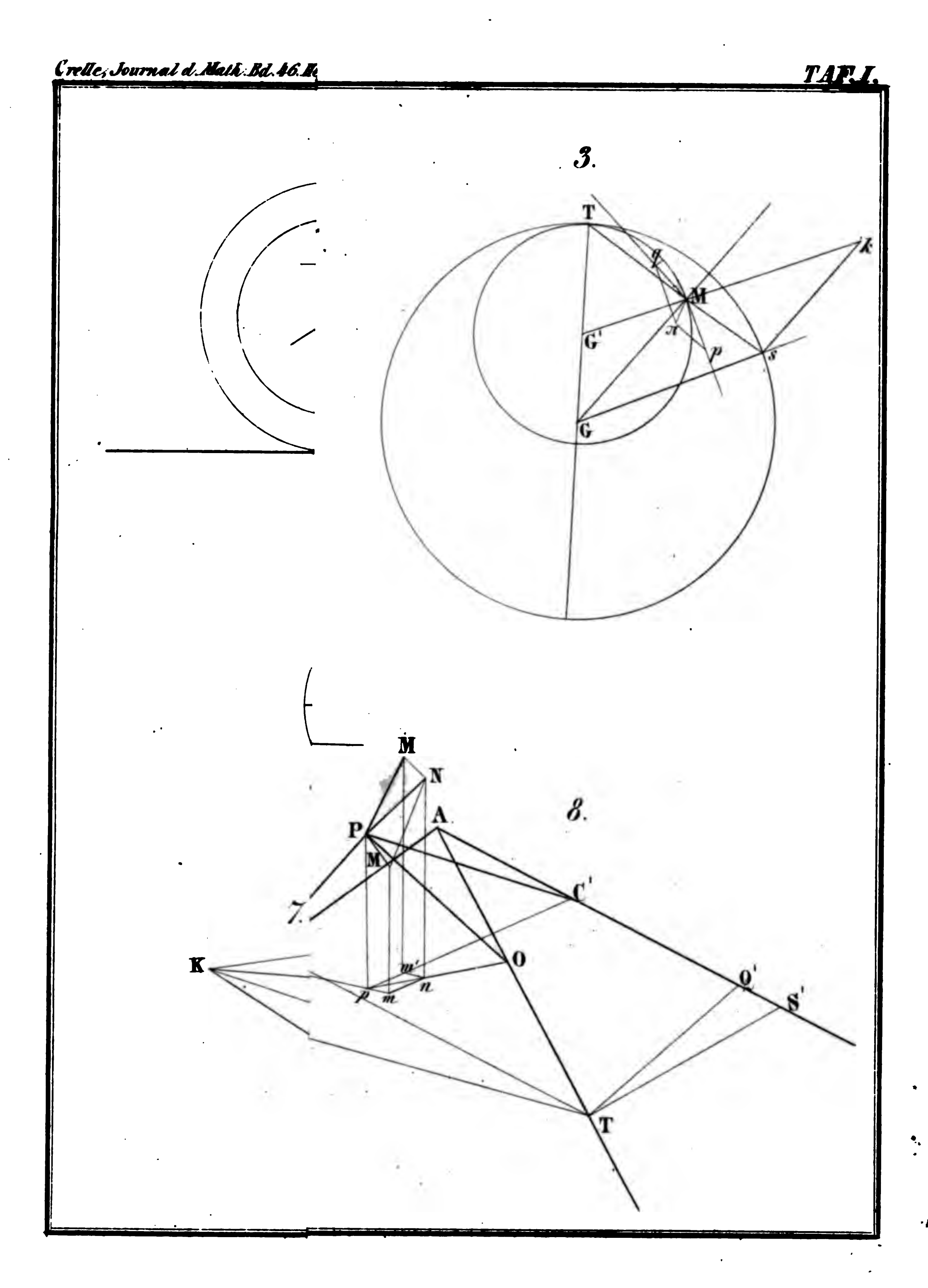
„ 365 „ 11 „ „ $\frac{B}{\xi a}$ „ $\frac{B}{\xi A}$

„ 366 „ 5 v. u. „ die Wagen „ die angehängten Wagen

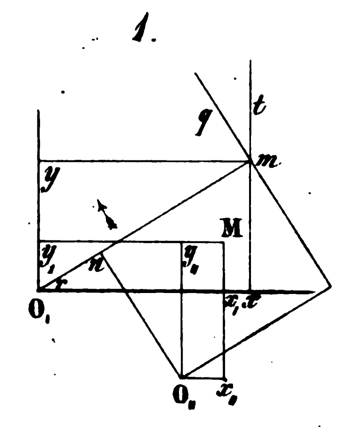
„ 2 „ „ haben, vermuthen lassen.
z. s. angenommen haben, vermuthen lassen könnte.

Fig 1 ist statt r zu setzen γ.

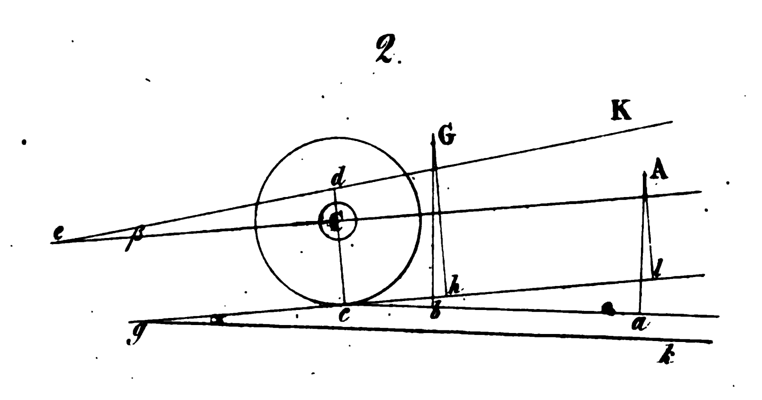

3.
T
q
k
M
G'
π
p
s
G
8.
M
N
A
P
M
C'
7.
K
O
m'
p
m
n
Q'
S'
T


3.
T
q
k
M
G'
π
p
s
G
8.
M
N
P
A
M
7.
C'
K
O
m'
p m n
Q'
S'
T

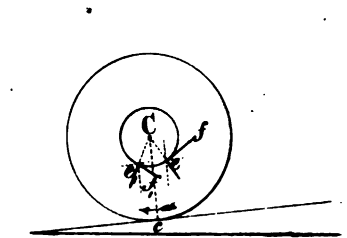
1.



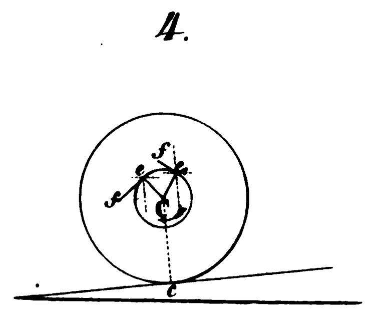
2.



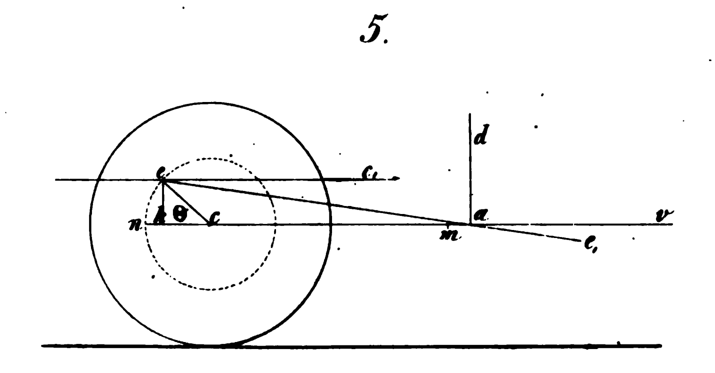
3.



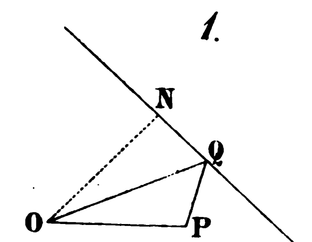
4.



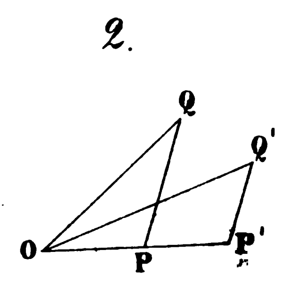
5.



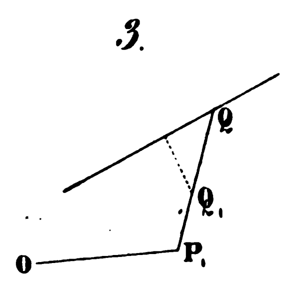
1.



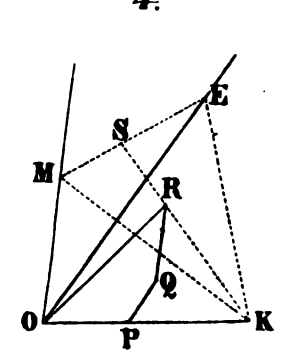
2.



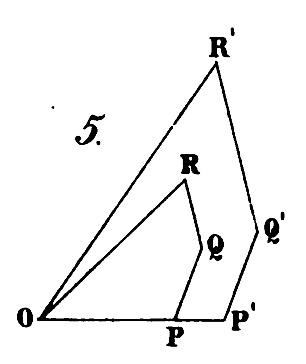
3.

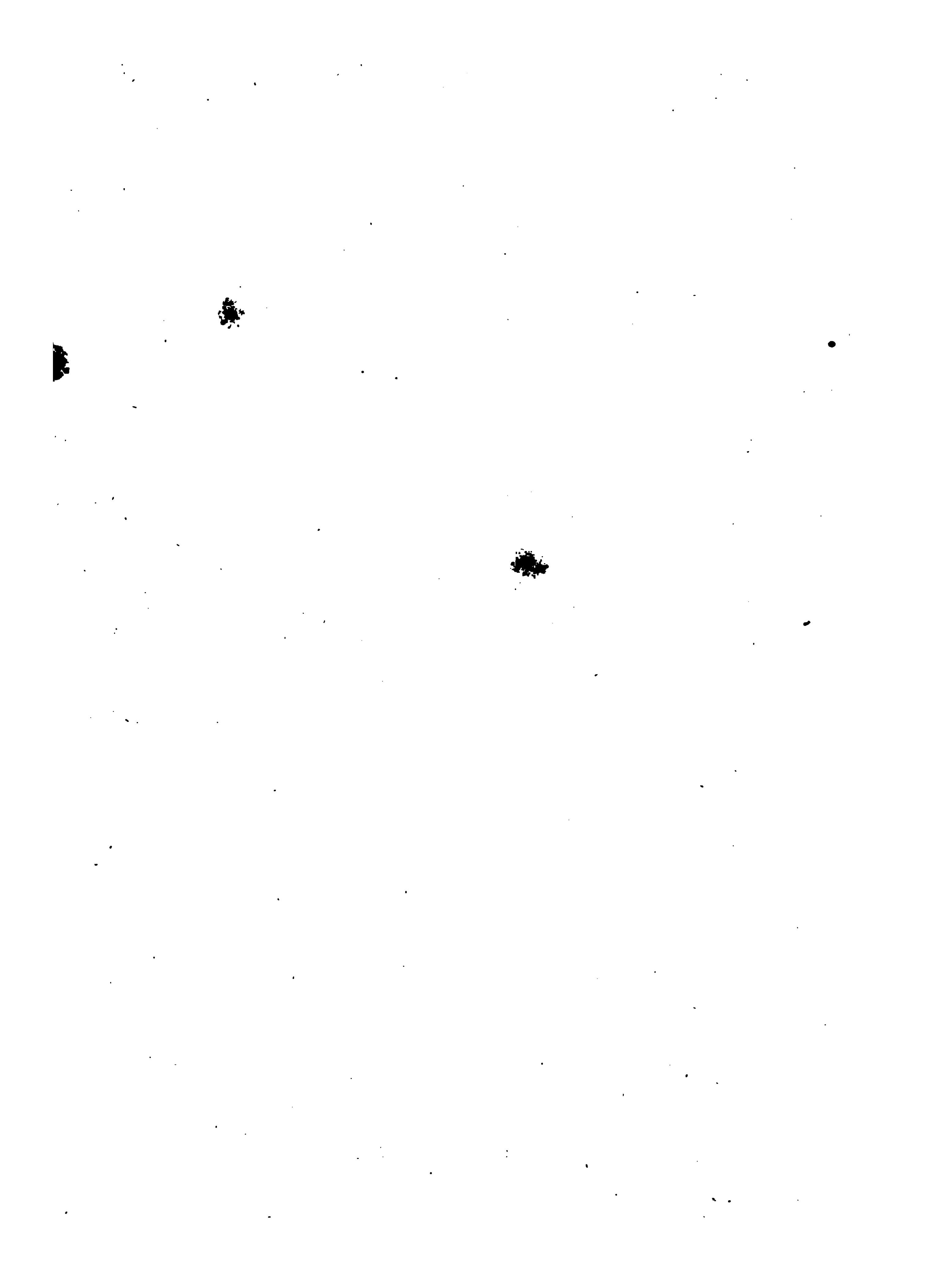


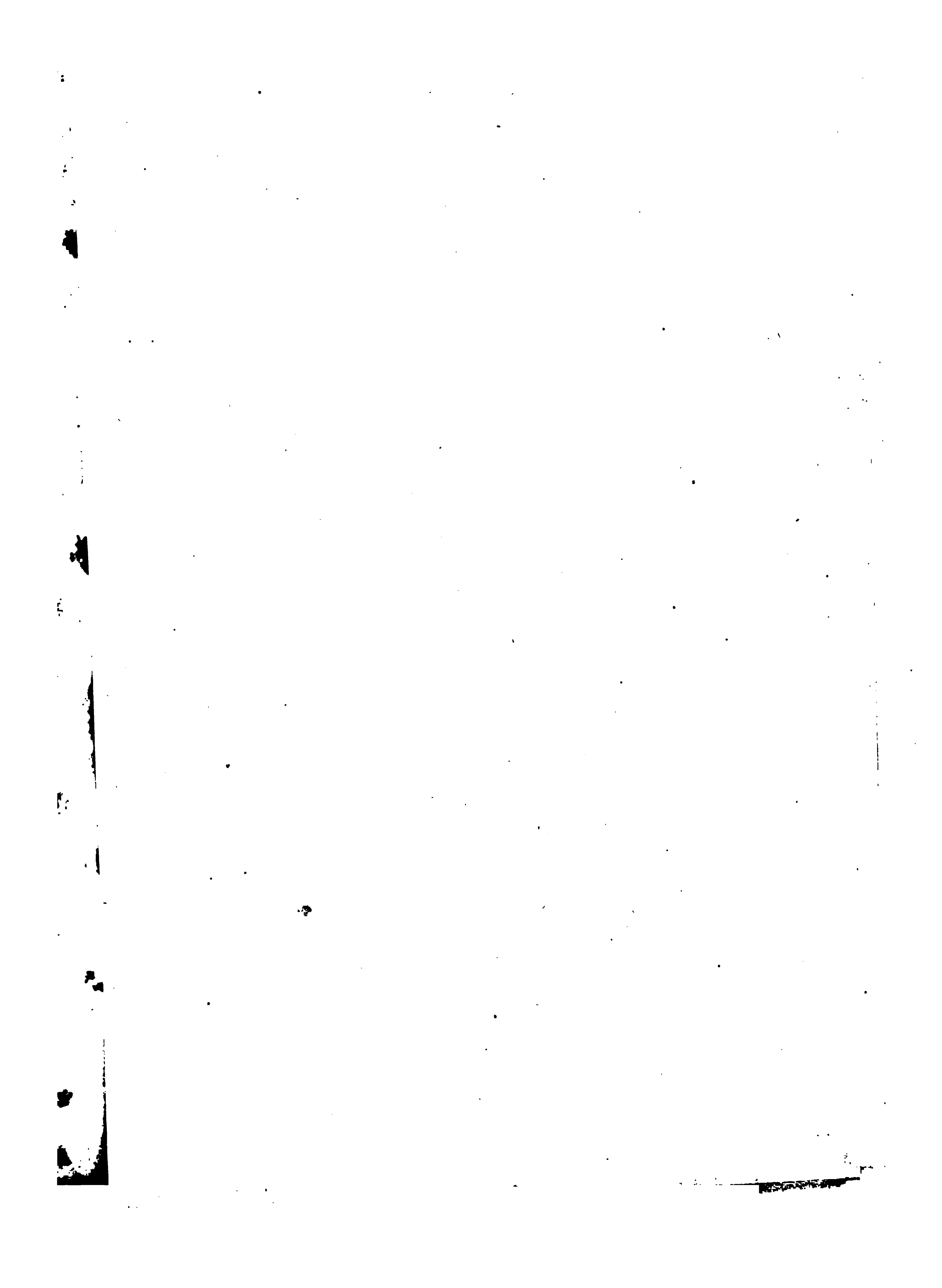
4.



5.













STORAGE ARE

